Université Abdelmalek Essaadi
Faculté des Sciences - Tétouan
**Licence Fondamentale Sciences Mathématiques et Applications**
**Semestre 6 - Schémas numériques pour les EDO**

# Travaux dirigés

Rédigé par : **Bouchaib FERRAHI**
**Département de Mathématiques**

2022-2023

Les documents relatifs à ce cours sont disponibles sur : www.ferrahi.cla.fr

Faculté des Sciences de Tétouan, BP. 2121 M'Hannech II, 93030 Tétouan Maroc.

# Table des matières

# Avant-propos

Ce polycopié, de travaux dirigés de l'année universitaire 2022-2023, destiné aux étudiant du semestre six de la Licence Fondamentale Sciences Mathématiques Appliquées (SMA), parcours Appliquée ; vise à permmetre aux étudiants d'appliquer le contenu du cours Schémas numériques des EDO qui se fixe pour premier objectif d'initier les étudiants aux méthodes numériques et leurs utilisations.

Le contenu proposé consiste en un recueil d'applications allant d'exercices élémentaires à des questions plus approfondies. Ce polycopié est adapté à la filière sus-mentionnée et se limitera au programme enseigné a la Faculté des Sciences de Tétouan durant'année précisée.

Ce travail ne constitue pas une référence complète, le lecteur intéressé peut consulter d'autres références qui traitent ce même contenu d'une manière plus profonde.

Bouchaib FERRAHI

# Chapitre 1

# Travaux dirigés - Exercices

**Exercice 1 :** On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = t + y(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a. Calculer des valeurs approchées de $y_0$, $y_1$, $y_2$ et $y_3$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.

b. Sachant que la solution exacte est donnée par $y(t) = 2e^t - t - 1$, Calculer l'erreur d'approximation pour les valeurs approchées calculées précédemment. Comment varie cette erreur en fonction de $i$ ?

**Exercice 2 :** Soit $(PC)$ le problème de Cauchy donné par :

$$(PC)\begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

a. On suppose que $(PC)$ admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte) ;

b. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et $y_n$ une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Crank-Nicolson :
En intégrant l'équation différentielle entre $t_n$ et $t_{n+1}$ puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer $y_{n+1}$ à partir de $y_n$ ;

c. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison $r$ (en fonction de $h$). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$ ;

d. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de $y_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 3 :** Considérons le problème de Cauchy : Trouver $y : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > t_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une unique solution $y$. Le principe des méthodes numériques est de subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en $m$ intervalles de longueur $h = \dfrac{T - t_0}{m} = t_{i+1} - t_i$. Pour chaque noeud $t_i = t_0 + ih$, $(1 < i < m)$ on cherche la valeur inconnue $y_i$ qui approche $y(t_i)$. Rappelons que l'ensemble des valeurs $\{y_0, y_1, ...., y_m\}$ représente la solution numérique du problème.
Dans cette exercice on va construire des nouveaux schémas numériques basés sur l'intégration de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ entre $t_i$ et $t_{i+2}$ :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt.$$

a. En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique explicite permettant de calculer $y_{i+2}$ à partir de $y_{i+1}$ et $y_i$. Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et $y_1$ sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;

b. En utilisant la formule de quadrature de Simpson pour approcher le membre de droite, écrire un schéma numérique implicite permettant de calculer $y_{i+2}$ à partir de $y_{i+1}$ et $y_i$ ; Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et $y_1$ sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;

c. Proposer une modification du schéma a la question précédente pour qu'il devient explicite.

**Exercice 4** On considère le problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 10]$, définie par :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy ;
2. Soit $h$ le pas temporel. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire ;
3. En déduire une formulation du type : $y_{i+1} = g(h, i)$ avec $g(h, i)$ une fonction à préciser (autrement dit, l'itérée en $t_i$ ne dépend que de $h$ et $i$ et ne dépend pas de $y_i$) ;
4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour déterminer les solutions obtenues avec la méthode explicite d'Euler avec $h = 2.5$ puis avec $h = 0.5$.

**Exercice 5 :** Une deuxième approche pour la résolution numérique des équations différentielles consiste à utiliser le calcul numérique de la dérivée et de l'utiliser pour approcher $y'(t_i)$. Soit $f$ une fonction supposée derivable sur un intervalle $[a, b]$ et $(_i)_{i=0,\ldots,n}$ une subdivision de $[a, b]$ en $n$ sous intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$, une valeur approché de $f'(x_i)$ peut être donnée par l'une des deux formules :

$$D_1 : \quad f'_d(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad i = 0, \ldots, n-1 \qquad D_2 : \quad f'_g(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \qquad i = 1, \ldots, n$$

a. Une fonction $f$ est donnée par les valeurs suivantes :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |

a1. Calculer, de deux manières différentes, une valeur approchée de $f'(3)$,

a2. Sachant que $f$ est définie par $f(x) = 2^x$, calculer $f'(3)$ et comparer la valeur exacte et les valeurs approchées.

b. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit $(t_i)_{i=0,\ldots,n}$ une subdivision de $[0, T]$ avec $t_i = 0 + i(\frac{T-0}{n})$, une solution approchée $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ du problème $(P)$ peut être obtenue est utilisant la dérivation numérique de la manière suivante :

b1. Écrire l'équation différentielle pour $t = t_i$ puis utiliser $D_1$ pour reformuler l'équation différentielle en une relation entre $y(t_{i+1})$ et $y(t_i)$ ;

b2. En utilisant l'approximation $y_i \simeq y(t_i)$, formuler la méthode de résolution ainsi obtenue (dite méthode d'Euler explicite) ;

b3. Formuler la méthode d'Euler implicite obtenue en utilisant la définition $D_2$ au lieu de $D_1$ ;

c. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

c1. Montrer que le problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.

c2. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.

c3. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.1$.

**Exercice 6 :** Considérons le problème de Cauchy :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = 1 - 2y(t) \\ y(t_0) = 1 \end{cases}$$

a. Montrer que le problème $(P)$ admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.

b. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{R}$ (ainsi $t_0 = 0\,;\ t_1 = h\,;\ \cdots$) et $y_n$ une approximation de $y(t_n)$.

b1. Évaluer $\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt$ en utilisant la méthode du point milieu ;

b2. Intégrer l'équation différentielle, du problème, entre $t_n$ et $t_{n+2}$ et déduire, en utilisant le résultat de la question précédente, une relation entre $y_{n+2}$ ; $y_{n+1}$ et $y_n$ (et en fonction de $h$) ;

c. Proposer une expression permettant de calculer $y_1$ et formuler le schéma obtenu (pour une résolution numérique de $(P)$).

---

**Exercice 7 :** Considérons le problème de Cauchy suivant dont on suppose qu'il existe une et une seule solution : Trouver $y : [t_0, T] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Le principe des méthodes numériques pour approcher la fonction $y$ est de subdiviser l'intervalle $[t_0; T]$ en $N$ intervalles de longueur $h = \frac{T-t0}{N}$. Pour chaque nœud $t_n = t_0 + nh$ ; $(1 \leq n \leq N)$ on cherche la valeur inconnue $u_n$ qui approche $y(t_n)$ à partir de $u_0 = y_0$. L'ensemble des valeurs $\{u_0; u_1; \cdots u_N\}$ représente la solution numérique.

Dans cette exercice on va construire des schémas numériques basés sur l'intégration approchée de l'EDO $y'(t) = f(t; y(t))$ entre $t_n$ et $t_{n+1}$ à partir de la relation :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

Les schémas d'ADAM approchent l'intégrale précédente par l'intégrale d'un polynôme interpolant $f$ en des points donnés.

a. Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler le point $\{t_n\}$. Quel schéma reconnaît-on ?

b. Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_n; t_{n+1}\}$. Quel schéma reconnaît-on ?

c. Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_{n-1}; t_n; t_{n+1}\}$ en proposant une adéquate initialisation de la suite. (Attention : on intègre $f$ sur l'intervalle $[t_n; t_{n+1}]$ mais on interpole $f$ en $t_{n-1}$, $t_n$ et $t_{n+1}$).

---

**Exercice 8 :** Soit $\beta > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -\beta y(t) & \text{Pour } t > 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $y_0$ est une valeur donnée. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et $u_n$ une approximation de $y(t_n)$ :

a. Écrire le schéma du trapèze (appelé aussi de Crank Nicolson) permettant de calculer $u_{n+1}$ à partir de $u_n$. Sous quelle condition sur $h$ le schéma du trapèze est-il A-stable ? Autrement dit, pour quelles valeurs de h la relation $lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ a-t-elle lieu ?

b. A partir du schéma du trapèze, et en utilisant une prédiction progressive de votre choix déduire le schéma de Heun. Sous quelle condition sur $h$ le schéma de Heun est-il A-stable ?

---

**Exercice 9 :** Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T\mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

1. Montrer que le schéma d'Euler explicite à pas de temps constant pour résoudre le problème précédent est consistant et stable.
2. Calculer la différentielle première et seconde de $f$.
3. En déduire l'ordre de convergence du schéma de Euler.

---

**Exercice 10 :** Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, on considère les deux problèmes :

$$\mathcal{P} \begin{cases} x'(t) = t\sin(x), & t \in [0, T], \\ x(0) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

et

$$\mathcal{S} \begin{cases} x'(t) = t^2 + x + 1, & t \in [1, T], \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

1. Donner le schéma d'Euler explicite en prenant un pas de temps constant.
2. Calculer les 2 premières itérations en prenant comme pas de temps $h = 0.1$.
3. Est-ce que ce schéma converge vers chacune des solutions de ces problèmes ?

---

**Exercice 11 :** Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in I = [t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

On utilise une partition de $I$ avec un pas de temps constant. Étudier l'ordre de convergence du schéma :

1. Du point milieu explicite.
2. d'Heun explicite.

---

**Exercice 12 :** Construire un schéma de RK explicite d'ordre 3.

---

**Exercice 13 :** Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T]. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

1. Est ce que le schéma d'Euler explicite est A-Stable ?
2. On prend dans le TSL : $L = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ et $T = 10$. Calculer la solution exacte de (3).
3. Étudier la A-Stabilité du schéma.
4. Tracer le graphe des solutions approchées et exacte pour : $h = \dfrac{1}{2}$, $h = \dfrac{3}{2}$ et $h = \dfrac{5}{2}$.

**Exercice 1 :** Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T]. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1. Retrouver le schéma d'Euler implicite en utilisant une approximation de la dérivée.
2. Est ce que le schéma d'Euler implicite à pas constant est A-stable ?

---

**Exercice 2 :** Soit $L > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème (TLS) :

$$\begin{cases} x'(t) = -Lx(t), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x_n$ une approximation de $x(t_n)$.

1. Écrire le schéma du trapèze (Crank-Nicolson) permettant de calculer $x_{n+1}$ à partir de $x_n$.
2. Étudier la A-Stabilité du schéma.
3. À partir du schéma du trapèze, en déduire le schéma de Heun, est-il A-Stable ?

---

**Exercice 3 :** L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle : $x'(t) = -\frac{x(t)}{1+t^2}$.
Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la concentration est $x(0) = 5$ , déterminer la concentration à $t = 2$ à l'aide de la méthode d'Euler implicite avec un pas $h = 0.5$.

---

**Exercice 4 :** On considère le schéma :

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{2k_2}{3} + \frac{k_3}{6}\right)$$

avec : $k_1 = f(t_n, x_n)$, $k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_1}{2})$ et $k_3 = f(t_n + h, x_n - hk_1 + 2hk_2)$.

1. Dresser le tableau du Butcher de ce schéma. Est ce que ce schéma est consistant ?
2. Appliquer le schéma à un problème du type (TLS) et exprimer, dans ce cas, $x_n$.
3. Étudier, dans ce cas, la $\lim_{n\to+\infty} x_n$ et déduire.

---

**Exercice 5 :** Nous considérons l'équation différentielle $x'(t) = x(t)t$ dont nous calculons une solution numérique par la formule suivante :

$$x_{n+1} = x_n + h(t_n + \frac{h}{2})(x_n + \frac{ht_nx_n}{2})$$

1. Sachant que nous avons utilisé un schéma de Runge-Kutta implicite de tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Déterminer toutes les valeurs sur le tableau précédent. Est ce que ce schéma est consistant ?

2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, $x_n$ ;
3. Étudier, dans ce cas, la convergence de $(x_n)_n$ et déduire.

---

**Exercice 6 :** Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que le schéma (implicite) de Runge-Kutta de tableau de Butcher suivant :

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

Soit d'ordre, au moins, égal à 2 pour la fonction $f(t,x) = x$ et l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$.

---

**Exercice 7 :** Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = xt^2$ dont nous cherchons une solution numérique par le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

1. Exprimer $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$. Est ce que ce schéma est consistant ?
2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, $x_n$ ;
3. Étudier, dans ce cas, la convergence de $(x_n)_n$ et déduire.

---

**Exercice 8 :** Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = x^2 + t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schéma d'Euler explicite puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces deux schémas :

1. Exprimer $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$ ;
2. Sachant que $x_0 = 0$ et $h = 1$, calculer $x_1$.

---

**Exercice 9 :** Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = x.t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schémas d'Euler (explicite et implicite) puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces trois schémas :

1. Exprimer $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$ ;
2. Sachant que $x_0 = 1$ et $h = 0.1$, calculer $x_1$.

---

**Exercice 10 :** Étude des méthodes RK avec $s = 2$ (cas général). Pour chaque cas : Formuler le schéma, donner un exemple et préciser si nous pouvons reconnaître un schéma classique ?

1. Schéma implicite RK à 2 étages.
2. Schéma semi-implicite RK à 2 étages.
3. Schéma explicite RK à 2 étages. Étudier la convergence et la A-stabilité de ces schémas explicites.

**Exercice 1 :** On considère un réel $\lambda$ et l'équation différentielle donnée par :

$$x(0) = \overline{x}_0 \quad \text{et } x'(t) = -\lambda x(t),\ t > 0$$

Soit $T > 0$ et la discrétisation définie par : $m \in \mathbb{N}^*$, $\hbar = \frac{T}{m}$ et $t_k = k\hbar$ pour $k = 0, 1, \cdots, m$.

1. Déterminer la solution exacte de ce problème, $\overline{x}(t)$, $t > 0$ ;
2. Appliquer le schéma d'Euler explicite et exprimer la solution numérique, $x_k$, en fonction de $k$ ;
3. Appliquer le schéma d'Euler explicite et exprimer $x_k$ en fonction de $k$ ;
4. Appliquer le schéma d'Euler implicite et exprimer $x_k$ en fonction de $k$ ;
5. On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler implicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\hbar > 0$ ;
6. On suppose que $\lambda > 0$. Donner une condition sur $\hbar$ pour que la solution du schéma d'Euler explicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ ;
7. On suppose que $\lambda < 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler explicite $x_k$ reste du signe de $x_0$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\hbar > 0\hbar$ ;
8. On suppose que $\lambda < 0$. Donner une condition sur $\hbar$ pour que la solution du schéma d'Euler implicite $x_k$ soit du signe de $x_0$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ ;
9. Soit $\overline{x}_k = \overline{x}(t_k)$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer que l'erreur de consistance du schéma d'Euler implicite :

$$r_k = \frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{\hbar} + \lambda \overline{x}_{k+1}$$

vérifie : $|r_k| \leq \frac{\overline{x}_0 \lambda^2}{2} \hbar$ pour tous $k = 0, \cdots, m-1$ ;

10. On définit l'erreur $e_k = \overline{x}_k - x_k$, $k = 0, \cdots, m$ pour le schéma d'Euler implicite. Montrer qu'elle vérifie l'équation suivante, pour tous $k = 0, \cdots, m-1$ :

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{\hbar} + \lambda e_{k+1} = r_k$$

11. On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que :

$$|e_k| \leq |e_0| + T\frac{\overline{x}_0 \lambda^2}{2}\hbar \quad \text{pour tous} \quad k = 0, \cdots, m$$

En déduire que le schéma d'Euler implicite converge à l'ordre 1 pour $\lambda > 0$ ;

12 Reprendre l'estimation d'erreur de la question 11 pour le schéma d'Euler implicite avec $\lambda < 0$ ;

13. Reprendre les questions 9,10,11 pour le schéma d'Euler explicite avec $\lambda > 0$ puis avec $\lambda < 0$.

**Exercice 2 :** La formule de Taylor peut être utilisée pour définir un schéma numérique. En effet :

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + ..... + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(x) + E(x,h)$$

$E(x,h)$ est la troncature donnée par

$$E(x,h) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}y^{(m+1)}(\xi) \quad \text{pour un certain} \quad \xi \in [x, x+h]$$

La méthode consiste à prédire $y(x+h$ en fonction de $y(x)$ en calculant et en remplaçant les dérivées successives $y^{(m)}$ en fonction de $f(x,y(x))$. Dans ce cas l'erreur peut être approchée par :

$$E(x,h) = \frac{h^m}{(m+1)!}(y^{(m)}(x+h) - y^{(m)}(x))$$

Application :

$$\begin{cases} y'(x) + 4y(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En considérant $m = 4$, estimer $y(0.1)$ et l'erreur associée.

**Exercice 3 :** Annoncer, dans le cas scalaire, les trois résultats fondamentaux (critère de consistance, critère de stabilité et le Théorème de Lax) et les démontrer.

# Chapitre 2

# Travaux dirigés - Solutions

**Exercice 1 :** On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = t + y(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a. Calculer des valeurs approchées de $y_0$, $y_1$, $y_2$ et $y_3$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.

b. Sachant que la solution exacte est donnée par $y(t) = 2e^t - t - 1$, Calculer l'erreur d'approximation pour les valeurs approchées calculées précédemment. Comment varie cette erreur en fonction de $i$ ?

**Solution :**

$f(t,x) = t + x$ est une fonction lipschitzienne et le schéma d'Euler explicite s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h(t_n + y_n) = (1+h)y_n + ht_n$$

$$y_0 = 1 \qquad y_1 = 1.1 \qquad y_2 = 1.22$$

$$y_3 = 1.362 \qquad y_4 = 1.5282$$

$$y(t_0) = y(0) = 1 \qquad y(t_1) = y(0.1) = 2e^{0.1} - 0.1 - 1 \simeq 1.1103$$

$$y(t_2) = y(0.2) = 2e^{0.2} - 0.2 - 1 = 1.2428 \qquad y(t_3) = y(0.3) = 2e^{0.3} - 0.3 - 1 = 1.3997$$

$$E_0 = |y(0) - y_0| = 0$$

$$E_1 = |y(t_1) - y_1| = |1.1103 - 1.1| = 0.0103$$

$$E_2 = |y(t_2) - y_2| = |1.2428 - 1.22| = 0.0228$$

$$E_3 = |y(t_3) - y_3| = |1.3997 - 1.362| = 0.0377$$

L'erreur semble croître d'une itération à la suivante.

**Exercice 2 :** Soit $(PC)$ le problème de Cauchy donné par :

$$(PC) \begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

a. On suppose que $(PC)$ admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte) ;

b. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et $y_n$ une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Crank-Nicolson :
En intégrant l'équation différentielle entre $t_n$ et $t_{n+1}$ puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer $y_{n+1}$ à partir de $y_n$ ;

c. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison $r$ (en fonction de $h$). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$ ;

d. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de $y_n$ en fonction de $n$.

**Solution :**

a. On suppose que $(PC)$ admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte) ;
Par séparation des variables, nous avons :

$$y' = -10y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -10y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -10dt \Rightarrow \ln(|y|) = -10t + c \Rightarrow |y| = e^c e^{-10t} \Rightarrow y = ke^{-10t}$$

et comme $y(0) = y_0 = ke^0$ alors, la solution du $(PC)$ est :

$$y(t) = y_0 e^{-10t}$$

b. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et $y_n$ une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Cranck-Nicolson :
En intégrant l'équation différentielle entre $t_n$ et $t_{n+1}$ puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer $y_{n+1}$ à partir de $y_n$ ; En intégrant l'équation, nous avons :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = -10 \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt \Rightarrow y(t_{n+1}) - y(t_n) = -10 \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$$

En appliquant la méthode du trapèze pour approcher l'intégrale su deuxième membre, nous obtenons :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = -10((t_{n+1} - t_n)\frac{y(t_{n+1}) + y(t_n)}{2}) = -10(h\frac{y(t_{n+1}) + y(t_n)}{2})) = -5h(y(t_{n+1}) + y(t_n))$$

Finalement, en utilisant l'approximation $y(t_i) \simeq y_i$ on déduit :

$$y_{n+1} - y_n = -5h(y_{n+1} + y_n) \Rightarrow (1 + 5h)y_{n+1} = (1 - 5h)y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1 - 5h}{1 + 5h} y_n$$

c. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison $r$ (en fonction de $h$). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$ ; On a :

$$y_{n+1} = \frac{1 - 5h}{1 + 5h} y_n = r y_n$$

si $h \neq \frac{1}{5}$ alors $r \neq 0$ et la suite $(y_n)_n$ est géométrique de raison $r = \frac{1-5h}{1+5h}$.
En plus, $h$ étant positif,

$$|1 - 5h| < |1| + |-5h| = 1 + 5h = |1 + 5h| \Rightarrow |r| = \frac{|1 - 5h|}{|1 + 5h|} < 1$$

d. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de $y_n$ en fonction de $n$.

$$r = \frac{1 - 5h}{1 + 5h} \geq 0 \Rightarrow 1 - 5h \geq 0 \Rightarrow h \leq \frac{1}{5}$$

En utilisant les propriétés des suites géométriques et en supposant $h < \frac{1}{5}$ on a :

$$y_n = y_0 r^n = y_0 (\frac{1 - 5h}{1 + 5h})^n$$

**Exercice 3 :** Considérons le problème de Cauchy : Trouver $y : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > t_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une unique solution $y$. Le principe des méthodes numériques est de subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en $m$ intervalles de longueur $h = \dfrac{T - t_0}{m} = t_{i+1} - t_i$. Pour chaque noeud $t_i = t_0 + ih$, $(1 < i < m)$ on cherche la valeur inconnue $y_i$ qui approche $y(t_i)$.

Rappelons que l'ensemble des valeurs $\{y_0, y_1, ...., y_m\}$ représente la solution numérique du problème.

Dans cette exercice on va construire des nouveaux schémas numériques basés sur l'intégration de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ entre $t_i$ et $t_{i+2}$ :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt.$$

a. En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique explicite permettant de calculer $y_{i+2}$ à partir de $y_{i+1}$ et $y_i$. Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et $y_1$ sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;

b. En utilisant la formule de quadrature de Simpson pour approcher le membre de droite, écrire un schéma numérique implicite permettant de calculer $y_{i+2}$ à partir de $y_{i+1}$ et $y_i$ ; Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et $y_1$ sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;

c. Proposer une modification du schéma a la question précédente pour qu'il devient explicite.

**Solution :**

Dans cette exercice on va construire des nouveaux schémas numériques basés sur l'intégration de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ entre $t_i$ et $t_{i+2}$ :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt.$$

a. En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique explicite permettant de calculer $y_{i+2}$ à partir de $y_{i+1}$ et $y_i$. Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et $y_1$ sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;

La méthode du point milieu (ou rectangle au milieu) consiste à remplacer la fonction $g(t) = f(t, y(t))$ par la constante $g(\frac{a+b}{2}) = g(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \simeq f(t_{i+1}, y_{i+1})$ :

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t_{i+1}, y_{i+1})dt = f(t_{i+1}, y_{i+1}) \int_{t_i}^{t_{i+2}} dt = f(t_{i+1}, y_{i+1})[t_{i+2} - t_i] = 2hf(t_{i+1}, y_{i+1}$$

D'ou :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = 2hf(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y(t_{i+2}) = y(t_i) + 2hf(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+2} = y_i + 2hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

Le calcul de $y_{i+2}$ nécessite les deux valeurs $y_{i+1}$ et $y_i$, par conséquent, on doit donner les deux premieres valeurs de la suite :
$y_0 = y(0)$ donnée et $y_1 = y_0^P = y_0 + hf(t_0, y_0)$ calculée par la méthode d'Euler explicite.

b. En utilisant la formule de quadrature de Simpson pour approcher le membre de droite, écrire un schéma numérique implicite permettant de calculer $y_{i+2}$ à partir de $y_{i+1}$ et $y_i$ ; Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et $y_1$ sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;

Application de la méthode de Simpson avec les trois points : $x_i$, $x_{i+1}$ et $x_{i+2}$ :

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt = \frac{t_{i+2} - t_i}{6} [f(t_i, y(t_i)) + 4f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + f(t_{i+2}, y(t_{i+2}))]$$

On a : $t_{i+2} - t_i = 2h$ et $f(t_j, y(t_j)) \simeq f(t_j, y_j)$
d'ou :

$$y_{i+2} - y_i = \frac{h}{3} [f(t_i, y_i) + 4f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_{i+2}, y_{i+2})]$$

$$y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3}\left[f(t_i, y_i) + 4f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_{i+2}, y_{i+2})\right]$$

Le calcul de $y_{i+2}$ nécessite les deux valeurs $y_{i+1}$ et $y_i$, par conséquent, on doit donner les deux premieres valeurs de la suite :
$y_0 = y(0)$ donnée et $y_1 = y_0^P = y_0 + hf(t_0, y_0)$ calculée par la méthode d'Euler explicite.
Remarquons que $y_{i+2}$ figure aussi dans le second membre, donc la méthode est implicite (nécessite un calcul supplémentaire pour isoler et calculer $y_{i+2}$.

c. Proposer une modification du schéma a la question précédente pour qu'il devient explicite.
Pour obtenir une méthode explicite, il suffit de remplacer, dans le second membre, $y_{i+2}$ par une expression équivalente (par exemple, en utilisant la méthode explicite d'Euler) : $y_{i+2} = y_{i+2}^P = y_{i+1} + hf(t_{i+}, y_{i+1})$ d'ou :

$$y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3}\left[f(t_i, y_i) + 4f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_{i+2}, y_{i+1} + hf(t_{i+}, y_{i+1}))\right]$$

**Exercice 4** On considère le problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 10]$, définie par :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy ;
2. Soit $h$ le pas temporel. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire ;
3. En déduire une formulation du type : $y_{i+1} = g(h, i)$ avec $g(h, i)$ une fonction à préciser (autrement dit, l'itérée en $t_i$ ne dépend que de $h$ et $i$ et ne dépend pas de $y_i$) ;
4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour déterminer les solutions obtenues avec la méthode explicite d'Euler avec $h = 2.5$ puis avec $h = 0.5$.

**Solution :**

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy ; Séparation des variables :

$$y' = -y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dt \Rightarrow \ln(|y|) = -t + cste \Rightarrow y = Ke^{-t}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow y = e^{-t}$$

2. Soit $h$ le pas temporel. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire $(EDO)$ ;

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}^P - y_i^P}{h} = f(t_i, y_i^P) \Rightarrow y_{i+1}^P = y_i + hf(t_i, y_i^P) = y_i^P - hy_i^P = (1-h)y_i^P \quad \text{pour } i = 1, 2, ... \\ y_0 = y(0) = 1 \text{ donnée,} \end{cases}$$

3. En déduire une formulation du type :

$$y_{i+1} = g(h, i)$$

avec $g(h, i)$ une fonction à préciser (autrement dit, l'itérée en $t_i$ ne dépend que de $h$ et $i$ et ne dépend pas de $y_i$) ; On a

$$y_{i+1}^P = (1-h)y_i^P = (1-h)(1-h)y_{i-1}^P = ... = (1-h)^{i+1}y_0 = (1-h)^{i+1}$$

On peut démontrer le résultat par récurrence.

4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour tracer les solutions : Pour chaque méthode numérique, il faut construire la table des valeurs $(t_i, y_i)$ :
   - exacte,

- obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 2.5$,

$$n = 4$$

- obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 1.25$,

$$n = 8$$

- obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 0.5$.

$$n = 20$$

4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour tracer les solutions :
   - exacte : La fonction $y(t) = e^{-t}$ Pour chaque méthode numérique, il faut construire la table des valeurs $(t_i, y_i)$ :
   - obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 2.5 \Rightarrow n = 4$ et $y_{i+1} = (-1,5)^{i+1}$, $i = 0, 1, ...$

| $i$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | $0$ | $2,5$ | $5$ | $7,5$ | $10$ |
| $y_i$ | $1$ | $-1,5$ | $2,25$ | $-3,375$ | $5,0625$ |

   - obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 0.5 \Rightarrow n = 20$ et $y_{i+1} = (0,5)^{i+1}$, $i = 0, 1, ...$

| $i$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $1,5$ | $2$ | $2,5$ | $3$ | $3,5$ | $4$ |
| $Y_i$ | $1$ | $0,5$ | $0,25$ | $0,125$ | $0,0625$ | $0,03125$ | $0,015625$ | $0,0078125$ | $0,00390625$ |

| | $9$ | $10$ | $11$ | $12$ | $13$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $4,5$ | $5$ | $5,5$ | $6$ | $6,5$ |
| | $0,001953125$ | $0,001953125$ | $0,0009765625$ | $0,00048828125$ | $0,0001220703125$ |

| | $14$ | $15$ | $16$ | $17$ |
|---|---|---|---|---|
| | $7$ | $7,5$ | $8$ | $8,5$ |
| | $0,00006103515625$ | $0,000030517578125$ | $0,0000152587890625$ | $0,00000762939453125$ |

| | $18$ | $19$ | $20$ |
|---|---|---|---|
| | $9$ | $9,5$ | $10$ |
| | $0,000003814697265625$ | $0,0000019073486328125$ | $0,00000095367431640625$ |

La courbe représente la solution exacte, les points $A$, $B2$, $C2$,.... la solution approchée avec $n = 4$ et les points $A$, $B$, $C$,... la solution approchée avec $n = 20$.

**Exercice 5 :** Une deuxième approche pour la résolution numérique des équations différentielles consiste à utiliser le calcul numérique de la dérivée et de l'utiliser pour approcher $y'(t_i)$. Soit $f$ une fonction supposée derivable sur un intervalle $[a, b]$ et $(_i)_{i=0,...,n}$ une subdivision de $[a, b]$ en $n$ sous intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$, une valeur approché de $f'(x_i)$ peut être donnée par l'une des deux formules :

$$D_1 : \qquad f'_d(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad i = 0, ..., n-1$$

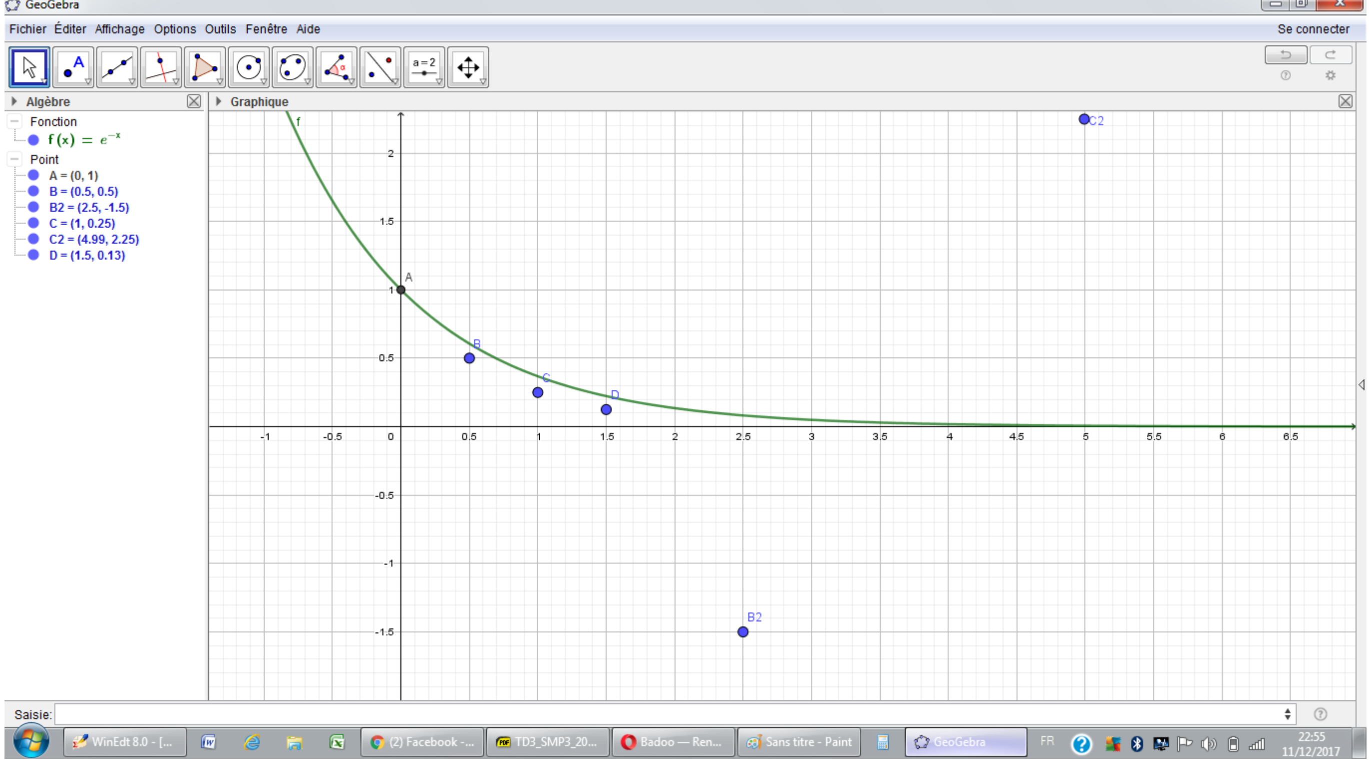
$$D_2 : \qquad f'_g(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \qquad i = 1, ..., n$$

a. Une fonction $f$ est donnée par les valeurs suivantes :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(x_i)$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |

a1. Calculer, de deux manières différentes, une valeur approchée de $f'(3)$,

a2. Sachant que $f$ est définie par $f(x) = 2^x$, calculer $f'(3)$ et comparer la valeur exacte et les valeurs approchées.




b. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit $(t_i)_{i=0,\dots,n}$ une subdivision de $[0, T]$ avec $t_i = 0 + i(\frac{T-0}{n})$, une solution approchée $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$ du problème $(P)$ peut être obtenue est utilisant la dérivation numérique de la manière suivante :

b1. Écrire l'équation différentielle pour $t = t_i$ puis utiliser $D_1$ pour reformuler l'équation différentielle en une relation entre $y(t_{i+1})$ et $y(t_i)$ ;

b2. En utilisant l'approximation $y_i \simeq y(t_i)$, formuler la méthode de résolution ainsi obtenue (dite méthode d'Euler explicite) ;

b3. Formuler la méthode d'Euler implicite obtenue en utilisant la définition $D_2$ au lieu de $D_1$ ;

c. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

c1. Montrer que le problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.

c2. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.

c3. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.1$.

**Solution :**

1) Une fonction $f$ est donnée par les valeurs suivantes :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |

a. Calculer, de deux manières différentes, une valeur approchée de $f'(3)$,

$$f'(3) = f'(x_2) \approx f'_d(3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{f(4) - f(3)}{1} = \frac{8-4}{1} = 8$$

$$f'(3) = f'(x_2) \approx f'_g(3) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{f(3) - f(2)}{1} = \frac{4-2}{1} = 2$$

b. Sachant que $f$ est définie par $f(x) = 2^x$, calculer $f'(3)$,

$$f(x) = 2^x = e^{x\ln 2} \Rightarrow f'(x) = \ln 2 e^{x\ln 2} = 2^x \ln 2 \Rightarrow f'(3) = 2^3 \ln 2 \approx 4,23$$

2) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit $(t_i)_{i=0,\ldots,n}$ une subdivision de $[0, T]$ avec $t_i = 0 + i(\frac{T-0}{n})$, une solution approchée $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ du problème $(P)$ peut être obtenue est utilisant la dérivation numérique de la manière suivante :

a. Écrire l'équation différentielle pour $t = t_i$ puis utiliser $D_1$ pour reformuler l'équation différentielle en une relation entre $y(t_{i+1})$ et $y(t_i)$ ;

On a :

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y(t_{i+1} = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))$$

b. En utilisant l'approximation $y_i \simeq y(t_i)$, formuler la méthode de résolution ainsi obtenue (dite méthode d'Euler explicite) ;

On a :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y_{i+1}) = y_i + hf(t_i, y_i)$$

c. Formuler la méthode d'Euler implicite obtenue en utilisant la définition $D_2$ au lieu de $D_1$ ;

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{h} = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y(t_i) = y(t_{i-1}) + hf(t_i, y(t_i))$$

Donc :

$$y_i = y_{i-1} + hf(t_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

3) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que ce problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.
Il s'agit d'un problème de Cauchy avec $f(t, y) = 1 + y$ et on a :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |1 + y_1 - (1 + y_2)| = |y_1 - y_2|$$

Donc $f$ est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et le problème de Cauchy admet une solution unique.
Equation différentielle linéaire du 1er ordre : $y'(t) - y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = Ke^t$ $y(t) = -1$ est une solution particulière, donc : $y(t) = ke^t - 1$ et comme $y(0) = 0$ alors $k = 1$ donc :

$$y(t) = e^t - 1$$

2. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant **la méthode d'Euler explicite ou progressive** avec $h = 0.1$.

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}^P - y_i^P}{h} = f(t_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1}^P = y_i + hf(t_i, y_i^P) \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

avec

$$h = 0.1, \ f(t, y) = 1 + y, \text{ et } y_0 = 0$$

Soit :

$$y_{i+1}^P = y_i^P + 0.1(1 + y_i^P) = 0.1 + 1.1y_i^P \text{ avec } y_0^P = y(0) = 0 \text{ et } i = 0, 1, \ldots, 10$$

- Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.1$. Notons qu'une valeur approchée de $y(t_i) = y(ih) = y_i^P = 0.1 + 1.1y_{i-1}^P$ pour $i = 1, ..., 10$ donc :
  $y(0.1) = y(t_1) \simeq y_1^P = 0.1 + 1.1 \times 0 = 0.1$, $y(0.2) = y(t_2) \simeq y_2^P = 0.1 + 1.1 \times y_1^P = 0.1 + 1.1 \times 0.1 = 0.21$,....
  **Schéma d'Euler retrograde ou implicite :**

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}^R - y_i^R}{h} = f(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+1}^R = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}^R) & \text{pour } i = 0, 1, 2, ... \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

avec

$$h = 0.1,\ f(t, y) = 1 + y, \text{ et } y_0 = 0$$

Soit :

$$y_{i+1}^R = y_i^R + 0.1(1 + y_{i+1}^R) = 0.1 + y_i^R + 0.1y_{i+1}^R \Rightarrow y_{i+1}^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y_i^R \text{ avec } y_0^R = y(0) = 0 \text{ et } i = 0, 1, ...$$

Notons qu'une valeur approchée de $y(t_i) = y(ih) = y_i^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y_{i-1}^R$ pour $i = 1, ..., 10$ donc :
$y(0.1) \simeq y_1^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y_0^R = \frac{1}{9}$, $y(0.2) = y(t_2) \simeq \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y_1^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{81} \simeq 0.23$,....

4. Comparer les erreurs d'approximation des deux méthodes.
   Il faut comparer l'erreur (la différence) entre la valeur exacte et les valeurs approchées, on peut utiliser le tableau suivant :

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | ... | 0.9 |
| Valeur exacte $y(t_i) = e^{t_i} - 1$ | 0 | $e^{0.1} - 1 \simeq 0.105$ | $e^{0.2} - 1 \simeq 0.221$ | | | | | |
| Valeur approchée explicite $y_i^P$ | 0 | 0.1 | 0.21 | | | | | |
| Valeur approchée implicite $y_i^P$ | 0 | $\frac{1}{9} \simeq 0.111$ | 0.23 | | | | | |
| Erreur $E_P = \|y(t_i) - y_i^p\|$ | 0 | 0.005 | 0.011 | | | | | |
| Erreur $E_R = \|y(t_i) - y_i^R\|$ | 0 | 0.006 | 0.009 | | | | | |

**Exercice 6 :** Considérons le problème de Cauchy :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = 1 - 2y(t) \\ y(t_0) = 1 \end{cases}$$

a. Montrer que le problème $(P)$ admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.
b. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{R}$ (ainsi $t_0 = 0$ ; $t_1 = h$ ; $\cdots$) et $y_n$ une approximation de $y(t_n)$.
   b1. Évaluer $\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt$ en utilisant la méthode du point milieu ;
   b2. Intégrer l'équation différentielle, du problème, entre $t_n$ et $t_{n+2}$ et déduire, en utilisant le résultat de la question précédente, une relation entre $y_{n+2}$ ; $y_{n+1}$ et $y_n$ (et en fonction de $h$) ;
c. Proposer une expression permettant de calculer $y_1$ et formuler le schéma obtenu (pour une résolution numérique de $(P)$).

**Solution**

Soit $(P)$ le problème de Cauchy donné par : $\quad (P) \begin{cases} y'(t) = 1 - 2y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

1. Montrer que $(P)$ admet une solution unique et résoudre ce problème (solution exacte) ;
   $(P)$ est un problème de Cauchy avec $f(t, y) = 1 - 2y$ et on a :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |1 - 2y_1 - (1 - 2y_2)| = |-2(y_1 - y_2)| = 2|y_1 - y_2|$$

Donc $f$ est 2-Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et le problème admet une solution unique.
ESSM : $y' = -2y \Rightarrow y = ke^{-2t}$ Solution particulière (variation de la constante) :
$k'e^{-2t} - 2ke^{-2t} = 1 - 2ke^{-2t} \Rightarrow k' = \frac{1}{e^{-2t}} \Rightarrow k' = e^{2t} \Rightarrow k = \frac{e^{2t}}{2} \Rightarrow y_p = \frac{1}{2}$
La solution générale est donnée par :
$y = ke^{-2t} + \frac{1}{2}$ et $y(0) = k + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$
Finalement, la solution du problème est donnée par :

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et $y_n$ une approximation de $y(t_n)$.
   a. Évaluer $\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt$ en utilisant **la méthode du point milieu** ;

$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt = (t_{n+2} - t_n)y(\frac{t_{n+2} + t_n}{2}) = 2hy(t_{n+1})$$

   b. **Intégrer** l'équation différentielle, du problème, entre $t_n$ et $t_{n+2}$ et déduire, en utilisant le résultat de la question (2.a.), une relation entre $y_{n+2}$, $y_{n+1}$ et $y_n$ (et en fonction de $h$) ;

$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} y'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+2}} (1 - 2y(t))dt = \int_{t_n}^{t_{n+2}} dt - 2\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt$$
$$y(t_{n+2}) - y(t_n) = 2h - 4hy(t_{n+1})$$

   Donc :

$$y_{n+2} = -4hy_{n+1} + y_n + 2h$$

   c. Proposer une expression permettant de calculer $y_1$ et formuler le schéma obtenu (pour une résolution numérique de $(P)$).
   On utilise la méthode d'Euler progressive :

$$y_1 = y_0 + hf(t, y_0) = y_0 + h(1 - 2y_0) = 1 + h(1 - 2) = 1 - h$$

   Donc le schéma est donné par :

$$\begin{cases} y_{n+2} = -4hy_{n+1} + y_n + 2h \\ y_1 = 1 - h \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

**Exercice 7 :** Considérons le problème de Cauchy suivant dont on suppose qu'il existe une et une seule solution : Trouver $y : [t_0, T] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$
Le principe des méthodes numériques pour approcher la fonction $y$ est de subdiviser l'intervalle $[t_0; T]$ en $N$ intervalles de longueur $h = \frac{T-t0}{N}$. Pour chaque nœud $t_n = t_0 + nh$ ; $(1 \le n \le N)$ on cherche la valeur inconnue $u_n$ qui approche $y(t_n)$ à partir de $u_0 = y_0$. L'ensemble des valeurs $\{u_0; u_1; \cdots u_N\}$ représente la solution numérique.
Dans cette exercice on va construire des schémas numériques basés sur l'intégration approchée de l'EDO $y'(t) = f(t; y(t))$ entre $t_n$ et $t_{n+1}$ à partir de la relation :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

Les schémas d'ADAM approchent l'intégrale précédente par l'intégrale d'un polynôme interpolant $f$ en des points donnés.

a. Écrire le schéma explicite obtenu en choisissant comme points à interpoler le point $\{t_n\}$. Quel schéma reconnaît-on ?

b. Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_n; t_{n+1}\}$. Quel schéma reconnaît-on ?

c. Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_{n-1}; t_n; t_{n+1}\}$ en proposant une adéquate initialisation de la suite. (Attention : on intègre $f$ sur l'intervalle $[t_n; t_{n+1}]$ mais on interpole $f$ en $t_{n-1}$, $t_n$ et $t_{n+1}$).

**Solution**

1) Le polynôme d'interpolation de la fonction $f(., y(.))$ sur la base d'un seul point $t_n$ est le polynôme de degré zéro donné par $P_0(x) = f(t_n, y(t_n))$. Donc :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_0(t)dt = y(t_n) + f(t_n, y(t_n)) \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt = y(t_n) + f(t_n, y(t_n))(t_{n+1} - t_n)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))$$

Avec l'approximation $y(t_j) \simeq y_j$, nous obtenons :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

qui est le schéma d'Euler explicite.

2) Le polynôme d'interpolation de la fonction $f(., y(.))$ sur la base de deux points $t_n$ et $t_{n+1}$ est le polynôme de degré un donné par

$$P_1(x) = \frac{t - t_{n+1}}{t_n - t_{n+1}} f(t_n, y(t_n)) + \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

$$P_1(x) = -\frac{1}{h} f(t_n, y(t_n))(t - t_{n+1}) + \frac{1}{h} f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))(t - t_n)$$

Donc :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_1(t)dt$$

$$= y(t_n) - \frac{1}{h} f(t_n, y(t_n)) \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n+1})dt + \frac{1}{h} f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)dt$$

On a :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n+1})dt = \left[\frac{x^2}{2} - t_{n+1}t\right]_{t_n}^{t_{n+1}} = \frac{t_{n+1}^2 - t_n^2}{2} - t_{n+1}^2 + t_{n+1}t_n = -\frac{1}{2}(t_{n+1}^2 + t_n^2 - 2t_{n+1}t_n) = -\frac{h^2}{2}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)dt = \left[\frac{x^2}{2} - t_n t\right]_{t_n}^{t_{n+1}} = \frac{t_{n+1}^2 - t_n^2}{2} - t_n t_{n+1} + t_n^2 = \frac{1}{2}(t_{n+1}^2 + t_n^2 - 2t_n t_{n+1}) = \frac{h^2}{2}$$

On en déduit que :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)) + \frac{h}{2} f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) = \frac{h}{2}(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})))$$

Remarquons que nous pouvons appliquer directement la méthode du trapèze qui es définie comme étant la méthode basée sur l'interpolation entre les deux bornes de l'intégrale, et on aura :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t)dt = \frac{t_{n+1} - t_n}{2}(g(t_n) + g(t_{n+1})) = \frac{h}{2}(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})))$$

Et nous retrouvons le même résultat.

Le polynôme d'interpolation de la fonction $f(., y(.))$ sur la base des points $t_{n-1}$, $t_n$ et $t_{n+1}$ est le polynôme de degré deux donné par :

$P_2(t) =$

$$\frac{(t - t_n)(t - t_{n+1})}{(t_{n-1} - t_n)(t_{n-1} - t_{n+1})} f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + \frac{(t - t_{n-1})(t - t_{n+1})}{(t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n+1})} f(t_n, y(t_n))$$

$$+\frac{(t-t_{n-1})(t-t_n)}{(t_{n+1}-t_{n-1})(t_{n+1}-t_n)}f(t_{n+1},y(t_{n+1}))$$

$$=\frac{f(t_{n-1},y(t_{n-1}))}{2h^2}(t-t_n)(t-t_{n+1})-\frac{f(t_n,y(t_n))}{h^2}(t-t_{n-1})(t-t_{n+1})+\frac{f(t_{n+1},y(t_{n+1}))}{2h^2}(t-t_{n-1})(t-t_n)$$

En intégrant l'équation différentielle est en remplaçant $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y(t))dt$ par $\int_{t_n}^{t_{n+1}} P_2(t)dt$ nous obtenons :

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+\int_{t_n}^{t_{n+1}} P_2(t)dt$$

$y(t_{n+1})=y(t_n)+$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(\frac{f(t_{n-1},y(t_{n-1}))}{2h^2}(t-t_n)(t-t_{n+1})-\frac{f(t_n,y(t_n))}{h^2}(t-t_{n-1})(t-t_{n+1})+\frac{f(t_{n+1},y(t_{n+1}))}{2h^2}(t-t_{n-1})(t-t_n)\right)dt$$

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+\frac{f(t_{n-1},y(t_{n-1}))}{2h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(t-t_n)(t-t_{n+1})dt-\frac{f(t_n,y(t_n))}{h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(t-t_{n-1})(t-t_{n+1})dt+$$
$$\frac{f(t_{n+1},y(t_{n+1}))}{2h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(t-t_{n-1})(t-t_n)dt$$

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+A_nf(t_{n-1},y(t_{n-1}))+B_nf(t_n,y(t_n))+C_nf(t_{n+1},y(t_{n+1}))$$

Avec :

$$A_n=\frac{1}{2h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(t-t_n)(t-t_{n+1})dt$$

$$B_n=-\frac{1}{h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(t-t_{n-1})(t-t_{n+1})dt$$

$$C_n=\frac{1}{2h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}(t-t_{n-1})(t-t_n)dt$$

Les coefficients $A_n$, $B_n$ et $C_n$ sont à calculer en fonction de $t_n$, $t_{n+1}$, $n$ et $h$ (et non pas $t_{n-1}$. Par exemple, nous avons :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}((t-t_n)(t-t_{n+1}))dt=\int_{t_n}^{t_{n+1}}(t^2-(t_n+t_{n+1})t+t_nt_{n+1})dt=\left[\frac{t^3}{3}+(t_n+t_{n+1})\frac{t^2}{2}+t_nt_{n+1}t\right]_{t_n}^{t_{n+1}}$$

$$=\frac{t_{n+1}^3}{3}+(t_n+t_{n+1})\frac{t_{n+1}^2}{2}+t_nt_{n+1}t_{n+1}-(\frac{t_n^3}{3}+(t_n+t_{n+1})\frac{t_n^2}{2}+t_nt_{n+1}t_n)$$

$$=\frac{t_{n+1}^3-t_n^3}{3}+(t_n+t_{n+1})\frac{t_{n+1}^2-t_n^2}{2}+t_nt_{n+1}(t_{n+1}-t_n)$$

$$=\frac{(t_{n+1}-t_n)(t_{n+1}^2+t_{n+1}t_n+t_n^2)}{3}+(t_n+t_{n+1})\frac{(t_{n+1}-t_n)(t_{n+1}+t_n)}{2}+t_nt_{n+1}(t_{n+1}-t_n)$$

$$=\frac{h}{3}(t_{n+1}^2+t_{n+1}t_n+t_n^2)+\frac{h}{2}(t_n+t_{n+1})^2+ht_nt_{n+1}$$

$$=\frac{h}{6}(2t_{n+1}^2+2t_{n+1}t_n+2t_n^2+3t_{n+1}^2+6t_{n+1}t_n+3t_n^2+6t_nt_{n+1})$$

$$=\frac{h}{6}(5t_{n+1}^2+14t_nt_{n+1}+5t_n)$$

$$=\frac{h}{6}(5t_{n+1}^2-10t_nt_{n+1}+5t_n+24t_nt_{n+1})$$

$$=\frac{h}{6}(5(t_{n+1}-t_n)^2+24t_nt_{n+1})$$

$$=\frac{h}{6}(5h^2+24t_nt_{n+1})$$

Donc :

$$A_n = \frac{1}{2h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t-t_n)(t-t_{n+1})dt = \frac{1}{2h^2}\frac{h}{6}(5h^2+24t_nt_{n+1}) = \frac{1}{12}(5h^2+24t_nt_{n+1})$$

$B_n$ et $C_n$ sont à calculer de la même manière. Finalement, avec l'approximation $y(t_i) = y_i$ nous avons le schéma suivant :

$$y_{n+1} = y_n + A_n f(t_{n-1}, y_{n-1}) + B_n f(t_n, y_n) + C_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Remarquons que ce schéma est implicite et à deux niveaux ($y_{n+1}$ en fonction de $y_n$ et $y_{n-1}$).
Les deux premiers termes : $y_0$ et $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$ (calculer avec la progression d'Euler.
Le schéma peut être transformé en un schéma explicite en remplacant, dans le second membre, $y_{n+1}$ par $y_n + hf(t_n, y_n)$ (en utilisant la progression d'Euler). Finalement le schéma s'écrit :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + A_n f(t_{n-1}, y_{n-1}) + B_n f(t_n, y_n) + C_n f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)) & n \geq 1 \\ y_0 & \text{donnée} \\ y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) \end{cases}$$

**Exercice 8 :** Soit $\beta > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -\beta y(t) & \text{Pour } t > 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où $y_0$ est une valeur donnée. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et $u_n$ une approximation de $y(t_n)$ :

a. Écrire le schéma du trapèze (appelé aussi de Crank Nicolson) permettant de calculer $u_{n+1}$ à partir de $u_n$. Sous quelle condition sur $h$ le schéma du trapèze est-il A-stable ? Autrement dit, pour quelles valeurs de h la relation $lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ a-t-elle lieu ?
b. A partir du schéma du trapèze, et en utilisant une prédiction progressive de votre choix déduire le schéma de Heun. Sous quelle condition sur $h$ le schéma de Heun est-il A-stable ?

**Solution**

1) En intégrant l'équation différentielle et en utilisant la méthode du trapèze pour calculer l'intégrale du second membre nous obtenons :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = -\beta\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt = -\beta\frac{h}{2}(y(t_{n+1}) + y(t_n)))$$

En utilisant l'approximation $y(t_i) = u_i$ nous obtenons :

$$u_{n+1} - u_n = -\beta\frac{h}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

$$(1 + \frac{\beta h}{2})u_{n+1} = (1 - \frac{\beta h}{2})u_n$$

$$u_{n+1} = \frac{1 - \frac{\beta h}{2}}{1 + \frac{\beta h}{2}} = \frac{2-\beta h}{2+\beta h}u_n$$

Donc, la suite $(u_n)_n$ est géométrique et on a :

$$u_{n+1} = (\frac{2-\beta h}{2+\beta h})^{n+1}u_0 = (\frac{2-\beta h}{2+\beta h})^{n+1}y_0$$

On sait que $\beta$ et $h$ sont strictement positifs, et on a :

$$|2-\beta h| < |2| + |-\beta h| = 2 + \beta h = |2+\beta h| \Longrightarrow \frac{2-\beta h}{2+\beta h} < 1$$

Donc, la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

2) L'application de la méthode du trapèze au problème de Cauchy donne un schéma implicite ($u_{n+1}$ figure aussi dans le second membre). Pour surmonter cette difficulté et obtenir un schéma explicite, la méthode de Heun consiste à remplacer $u_{n+1}$, dans le second membre, par une progression d'Euler. Nous obtenons, dans le cas général, successivement :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt = \frac{h}{2}((f(t_n), y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})))$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2}((f(t_n), y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))))$$

Soit, avec l'approximation $y(t_i) = u_i$ :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}((f(t_n), u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n)))$$

et comme $f(t, y) = -\beta y$, on déduit :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(-\beta u_n - \beta(u_n + h(-\beta u_n))) = u_n + \frac{h}{2}(-\beta u_n - \beta u_n + h\beta^2 u_n)$$

$$u_{n+1} = (1 - h\beta + \frac{(h\beta)^2}{2})u_n$$

et :

$$u_{n+1} = (1 - h\beta + \frac{(h\beta)^2}{2})^{n+1}u_0 = (1 - h\beta + \frac{(h\beta)^2}{2})^{n+1}y_0$$

La suite $(u_n)_n$ converge vers 0 Si et seulement si $|1 - h\beta + \frac{(h\beta)^2}{2}| < 1$ posons $x = h\beta > 0$ et étudions la fonction $g(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$ pour $x > 0$. La fonction est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$ avec $g(0) = 1$, $g(1) = \frac{1}{2}$ et $g(2) = 1$ et donc $|g(x)| < 1$ si et seulement si $x \in ]0, 2[$. On en déduit que la suite converge vers 0 si et seulement si $0 < h\beta < 2$ soit $0 < h < \frac{2}{\beta}$.

5

**Exercice 9 :** Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

1. Montrer que le schéma d'Euler explicite à pas de temps constant pour résoudre le problème précédent est consistant et stable.
2. Calculer la différentielle première et seconde de $f$.
3. En déduire l'ordre de convergence du schéma de Euler.

Solution :

1. Avec les notation de la définition, pour le schéma d'Euler explicite on a $\Phi(t, x, h) = f(t, x)$. Donc Euler explicite est consistant. Puisque $f$ est lipschitzienne alors on a :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

et donc

$$|\Phi(t, x, h) - \Phi(t, y, h)| \leq L|x - y|$$

ainsi le schéma est stable

Conclusion : le schéma d'Euler est stable et consistant donc c'est un schéma convergeant .

2. On a $x'(t) = f(t, x(t))$, donc la différentielle de $f$ est donnée en $(t, x)$ par :

$$\begin{aligned} Df(t,x) &= \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t}\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + x'(t)\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + f(t,x)\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \end{aligned}$$

De même la différentielle seconde de $f$ est donnée en $(t, x)$ par :

$$\begin{aligned} D^2 f &= D[Df] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}Df + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}Df \\ &= \frac{\partial}{\partial t}Df + f\frac{\partial}{\partial x}Df \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x}\right) + f\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + f\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} + f\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{aligned}$$

3. On a

$$\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, x, 0) = 0 \neq \frac{1}{2}Df(t, x)$$

donc le schéma d'Euler explicite est d'ordre 1.

**Exercice 10 :** Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, on considère les deux problèmes :

$$\mathcal{P}\begin{cases} x'(t) = t\sin(x), & t \in [0, T], \\ x(0) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

et

$$\mathcal{S}\begin{cases} x'(t) = t^2 + x + 1, & t \in [1, T], \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

1. Donner le schéma d'Euler explicite en prenant un pas de temps constant.
2. Calculer les 2 premières itérations en prenant comme pas de temps $h = 0.1$.
3. Est-ce que ce schéma converge vers chacune des solutions de ces problèmes ?

**Solution :**

1. Le schéma d'Euler :

- Pour $\mathcal{P}$ on a $f(t_n, x_n) = t_n \sin(x_n)$ donc :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = x_n + hf(t_n, x_n) = x_n + \text{ h.t } n \cdot \sin(x_n) \\ x_0 & = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Pour $\mathcal{S}$ on a $f(t_n, x_n) = t_n^2 + x_n + 1$ donc :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = x_n + h \cdot (t_n^2 + x_n + 1) \\ x_0 & = 1 \end{cases}$$

2. Les 2 premières itérations $x_1$ et $x_2$ - Pour $\mathcal{P}$ on a $h=0.1, t_0=0$ et $t_1=t_0+h=0.1$. On trouve :

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{\pi}{2} \\
x_1 &= \frac{\pi}{2}+h\times t_0\times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\simeq 1.57 \\
x_2 &= \frac{\pi}{2}+0.1\times t_1\times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+0.1\times 0.1\times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+0.01\simeq 1.58
\end{aligned}$$

- Pour $\mathcal{S}$ on a $h=0.1, t_0=1$ et $t_1=t_0+h=1.1$. On trouve :

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= 1+0.1\left(t_0^2+1+1\right)=1+0.1\left(1^2+2\right)=1.3 \\
x_2 &= 1.3+0.1\left(t_1^2+1.3+1\right)=1.3+0.1\left((1.1)^2+2.3\right)=1.651
\end{aligned}$$

3. Convergence : Le schéma d'Euler progressif est consistant avec n'importe quel problème de Cauchy, car $\Phi(t,x,h)=f(t,x)$. Pour la stabilité il faut que la fonction $f$ soit lipschitzienne :
$-$ Pour $\mathcal{P}$ : on a :

$$\begin{aligned}
|f(t,x)-f(t,y)| &= |t\sin(x)-t\sin(y)| \\
&= |t||\sin(x)-\sin(y)| \\
&= t|\cos(c)||x-y|
\end{aligned}$$

avec $c$ une valeur comprise entre $x$ et $y$ d'après le théorème des accroissements finis : Pour $f(x)=\sin(x)$, il existe $c$ entre $x$ et $y$ tel que :

$$f'(c)=\cos(c)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{\sin(x)-\sin(y)}{x-y}$$

Donc $\forall t\in[0,T]$

$$|f(t,x)-f(t,y)|\leq t|\cos(c)||x-y|\leq T|x-y| \quad \forall x,y$$

Conclusion : $f$ est lipschitzienne de constante $T$ donc le problème est stable. Le schéma d'Euler utilisé est stable et consistant donc c'est un schéma convergeant. - Pour $\mathcal{S}$

$$|f(t,x)-f(t,y)|=\left|t^2+x+1-t^2-y-1\right|=|x-y|$$

Conclusion : $f$ est lipschitzienne de constante 1 donc le problème est stable. Le schéma d'Euler utilisé est stable et consistant donc c'est un schéma convergeant.

**Exercice 11 :** Soit $t_0\in\mathbb{R}_+$, $T\in\mathbb{R}_+^*$, $x_0\in\mathbb{R}$, et soit $f:[t_0,t_0+T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L\in\mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t)), \quad t\in I=[t_0,t_0+T] \\ x(t_0)=x_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

On utilise une partition de $I$ avec un pas de temps constant. Étudier l'ordre de convergence du schéma :

1. Du point milieu explicite.
2. d'Heun explicite.

**Solution :**

(1) Pour le schéma du point milieu on a :

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+hf\left(t_n+\frac{h}{2},x_n+\frac{h}{2}f\left(t_n,x_n\right)\right), \text{ Pour } n=0,\ldots,N-1 \\ x\left(t_0\right)=x_0 \end{cases}$$

donc

$$\Phi(t,x,h)=f\left(t+\frac{h}{2},x+\frac{h}{2}f(t,x)\right)$$

- Stabilité : On a : $f$ lipschitzienne donc

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\Phi(t,x,h)-\Phi(t,y,h)| &= \left|f\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right)-f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)\right| \\
&\leq L\left|x+\frac{h}{2}f(t,x)-y-\frac{h}{2}f(t,y)\right| \\
&\leq L|x-y|+L\frac{h}{2}|f(t,x)-f(t,y)| \\
&\leq L|x-y|+\frac{h}{2}L^2|x-y| \\
&\leq \left(L+\frac{h}{2}L^2\right)|x-y| \\
&\leq K|x-y|
\end{aligned}$$

Avec $K=L+\frac{h}{2}L^2$ Donc $\Phi$ est lipschitzienne ce qui implique que le schéma est stable.
Consistance :
On a $\Phi(t,x,0)=f(t,x) \Longrightarrow$ Schéma consistant.
Conclusion : Le schéma est stable et consistant donc il converge. Et :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial h}(t,x,h)=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right)+\frac{1}{2}f(t,x)\frac{\partial f}{\partial x}\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right)$$

Donc

$$\frac{\partial\Phi}{\partial h}(t,x,0)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)+f(t,x)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right]$$

On peut facilement vérifier que :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial h^2}(x,t,0) \neq \frac{1}{2}D^2 f(t,x)$$

ainsi le schéma est consistant d'ordre 2. (2) Pour le schéma de Heun on a :

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}\left[f\left(t_n,x_n\right)+f\left(t_n+h,x_n+hf\left(t_n,x_n\right)\right)\right], \text{ Pour } n=0,\ldots,N-1 \\ x\left(t_0\right)=x_0 \end{cases}$$

et

$$\Phi(t,x,h)=\frac{1}{2}(f(t,x)+f(t+h,x+hf(t,x)))$$

- Stabilité : On a : $f$ lipschitzienne donc

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

Done

$$|\Phi(t,x,h)-\Phi(t,y,h)|=|\frac{1}{2}(f(t,x)+f(t+h,x+hf(t,x)))-\frac{1}{2}(f(t,y)+f(t+h,y+hf(t,y)))|$$

$$\leq \frac{L}{2}\cdots$$

On vérifie facilement que $\Phi$ est lipschitzienne ce qui implique que le schéma est stable.
- Consistance :
On a

$$\Phi(t,x,0)=\frac{1}{2}(f(t,x)+f(t,x))=f(t,x).$$

$$\Phi(t,x,0)=f(t,x) \Longrightarrow \text{ Schéma consistant.}$$

Pour l'ordre de consistance, utilisons les tableaux de Butcher :

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(t_n, x_n\right) \\ k_2 &= f\left(t_n + h, x_n + hk_1\right) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right) \end{aligned}$$

Qu'on peut écrire :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Donc $s = 2, \quad b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ et $c_1 = 0, \quad c_2 = a_{21} = 1$ ainsi :

$$- \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i.$$

$$- \sum_{i=1}^{s} b_i = b_1 + b_2 = 1.$$

$$- \sum_{i=1}^{s} b_i c_i = b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{1}{2}.$$

Conclusion le schéma est consistant d'ordre 2.

**Exercice 12 :** Construire un schéma de RK explicite d'ordre 3.

**Solution :**

Le tableau de Butcher pour $s = 3$ est :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

Pour que les méthodes d'intégrations à chaque ligne soient d'ordre au moins 1 on impose :

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i \text{ et } \sum_{i=1}^{s} b_i = 1.$$

Donc :

$$a_{21} = c_2, \quad a_{31} + a_{32} = c_3.$$

et

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

La deuxième condition de consistance $\sum_{i=1}^{s} b_i c_i = \frac{1}{2}$, donne ( avec $c_1 = 0$) :

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}$$

La troisième condition $\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$ donne :

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}$$

Et la quatrième condition $\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$ donne

$$b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}$$

$i$ ne prend que la valeur 3 (car $i = 1$ est impossible on n' a pas $a_{1j}.i = 2$ corresponds à $a_{21}$ et $c_1$ qui est nul). Finalement on doit résoudre le système :

$$\begin{aligned} a_{21} &= c_2 \\ a_{31} + a_{32} &= c_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\ b_2c_2 + b_3c_3 &= \frac{1}{2} \\ b_2c_2^2 + b_3c_3^2 &= \frac{1}{3} \\ b_3a_{32}c_2 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Le système admet plusieurs solutions.
Quelques solutions possible :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ 0 & -1 & 1 & \\ \hline & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

**Exercice 13 :** Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

1. Est ce que le schéma d'Euler explicite est A-Stable ?
2. On prend dans le TSL : $L = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ et $T = 10$. Calculer la solution exacte du problème précédent.
3. Étudier la A-Stabilité du schéma.
4. Tracer le graphe des solutions approchées et exacte pour : $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{3}{2}$ et $h = \frac{5}{2}$.

**Solution :**

(1) Le schéma d'Euler explicite est :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \quad n = 0 \ldots . N - 1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Pour le test linéaire standard (TLS) on prend $f(t, x) = -Lx$, avec $L$ la constante de Lipschitz, on trouve :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - hLx_n = (1 - Lh)x_n \quad n = 0 \ldots, N - 1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$x_n$ est donc une suite géométrique de raison $1 - Lh$ son terme général est :

$$x_n = (1 - Lh)^n x_0$$

Done

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Longrightarrow |1 - Lh| < 1 \Longrightarrow -1 < 1 - Lh < 1 \Longrightarrow -2 < -Lh < 0$$

Comme $L$ et $h$ sont positifs alors $h$ doit vérifier :

$$h < \frac{2}{L}$$

Conclusion :
Euler progressif n'est pas A-Stable.
Il faut prendre $h$ très petit si le problème est très raide. Sinon $(1-Lh)^n \to \infty$.
On obtient alors des fortes oscillations.
(2) Pour $L=1, x(0)=1$ et $T=10$. Le problème à résoudre s'écrit donc :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t)=-x(t) \quad t \in [0,10] \\ x(0)=1 \end{array}\right.$$

Il s'agit d'une EDO à variables séparables. En tenant compte des conditions aux limites on trouve la solution

$$x(t)=\exp^{-t}$$

(3) Le schéma d'Euler (5) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}=(1-h)x_n \quad n=0\ldots\ldots, N-1 \\ x_0=1 \end{array}\right.$$

On obtient la suite

$$x_n=(1-h)^n$$

La solution exacte

$$x\left(t_n\right)=\exp^{-t_n}=\exp^{-nh} \operatorname{car} t_n=t_0+nh=nh.$$

(4) De la formule $x_n=(1-h)^n$ on déduit que
- Si $0<h<1$ alors la solution numérique est stable et convergente.
- Si $1<h<2$ alors la solution numérique oscille mais converge.
- Si $h>2$ alors la solution numérique oscille et diverge.

(5) Application numérique
- si $h=\frac{1}{2}$ alors $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et la solution exacte $x\left(t_n\right)=\exp^{-n/2} \longrightarrow 0$. On a $\lim_{n\to+\infty} x_n=0$ donc le schéma est A-Stable.
- si $h=\frac{3}{2}$ alors $x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et $x\left(t_n\right)=\exp^{-3n/2}$, numériquement on verra que le schéma converge lentement avec des oscillations.
- si $h=\frac{5}{2}$ alors $x_n=\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ et $x\left(t_n\right)=\exp^{-5n/2}$. Le Schéma diverge.

**Exercice 1 :** Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1. Retrouver le schéma d'Euler implicite en utilisant une approximation de la dérivée.
2. Est ce que le schéma d'Euler implicite à pas constant est A-stable ?

**Solution :**
(1) pour $n \geq 1$ on approche

$$x'(t_n) = f(t_n, x(t_n))$$

par

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = f(t_n, x_n)$$

c'est à dire

$$x_n = x_{n-1} + hf(t_n, x_n)$$

Qu'on peut écrire :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1} + x_{n+1})$$

Pour tout $n \geq 0$ et $x_0$ donné.
(2) Appliqué au (TLS) on trouve :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - hLx_{n+1} \quad n \in \mathbb{N} \\ x_0 \quad \text{donné} \end{cases}$$

Done pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1 + hL)x_{n+1} = x_n \Longrightarrow x_{n+1} = \frac{1}{1 + hL} x_n$$

ce qui implique

$$x_n = \left(\frac{1}{1 + hL}\right)^n x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or $\forall h \geq 0$ et $L > 0$ on $\frac{1}{1+hL} < 1$ donc $x_n \to 0$.
Euler implicite est donc A-Stable.

**Exercice 2 :** Soit $L > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème (TLS) :

$$\begin{cases} x'(t) = -Lx(t), \quad \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 \quad \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x_n$ une approximation de $x(t_n)$.

1. Écrire le schéma du trapèze (Crank-Nicolson) permettant de calculer $x_{n+1}$ à partir de $x_n$.
2. Étudier la A-Stabilité du schéma.
3. À partir du schéma du trapèze, en déduire le schéma de Heun, est-il A-Stable ?

**Solution :**
(1) Si nous intégrons l'EDO $x'(t)=f(t,x(t))$ entre $t_n$ et $t_{n+1}$ nous obtenons

$$x\left(t_{n+1}\right)-x\left(t_n\right)=\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,x(t))dt$$

On utilise la formule du trapèze :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y(t))dt \approx \frac{h}{2}\left(f\left(t_n, x\left(t_n\right)\right)+f\left(t_{n+1}, x_{n+1}\right)\right).$$

Soit $x_n$ l'approximation de $x\left(t_n\right)$. On obtient le schéma du trapèze ou de Crank-Nicolson

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}\left(f\left(t_n, x_n\right)+f\left(t_{n+1}, x_{n+1}\right), \quad \text{pour } n=0,1,2,\ldots\right. \\ x_0=x\left(t_0\right) \end{array}\right.$$

Il s'agit d'un schéma implicite car il ne permet pas d'écrire directement $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$ lorsque la fonction $f$ n'est pas triviale.
(2) En appliquant le schéma du trapèze au problème (TLS) on obtient la suite définie par récurrence suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}\left(-Lx_n-Lx_{n+1}\right) \\ x_0=x\left(t_0\right) \end{array}\right.$$

Donc

$$x_{n+1}\left(1+\frac{h}{2}L\right)=x_n\left(1-\frac{h}{2}L\right) \Longrightarrow x_{n+1}=\frac{1-\frac{h}{2}L}{1+\frac{h}{2}L}x_n=\frac{2-hL}{2+hL}x_n$$

On trouve finalement

$$x_n=\left(\frac{2-Lh}{2+Lh}\right)^n x_0$$

Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} x_n=0$ si et seulement si $\left|\frac{2-Lh}{2+Lh}\right|<1$.
Notons $x$ le produit $ah>0$ et $q$ la fonction $q(x)=\frac{2-x}{2+x}=1-2\frac{x}{2+x}$.
Nous avons $0<\frac{x}{2+x}<1$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, donc $|q(x)|<1$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} x_n=0$ pour tout $h>0$, et le schéma est A-Stable.

(3) Pour éviter le calcul implicite de $x_{n+1}$ dans le schéma du trapèze, nous pouvons utiliser une prédiction d'Euler explicite et remplacer le $x_{n+1}$ dans le terme $f\left(t_{n+1}, x_{n+1}\right)$ par

$$x_{n+1}=x_n+hf\left(t_n, x_n\right).$$

On trouve ainsi le schéma de Heun :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}\left[f\left(t_n, x_n\right)+f\left(t_n+h, x_n+hf\left(t_n, x_n\right)\right)\right] \\ x(0)=x_0 \end{array}\right.$$

En appliquant le schéma de Heun au TLS, on obtient la suite suivante :

$$x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}\left[-Lx_n+f\left(t_n+h, x_n-hLx_n\right)\right]$$
$$x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}\left[-Lx_n-L\left(x_n-hLx_n\right)\right)\Big]$$
$$x_{n+1}=\left(1-Lh+\frac{(Lh)^2}{2}\right)x_n.$$

Done

$$x_n=\left(1-Lh+\frac{(Lh)^2}{2}\right)^n x_0$$

Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ si et seulement si

$$\left|1 - Lh + \frac{(Lh)^2}{2}\right| < 1.$$

Notons $x$ le produit $Lh(x>0)$ et $p(x)$ le polynôme $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Nous avons $|p(x)| < 1$ si et seulement si $x < 2$. En effet

$$\begin{aligned}
|p(x)| < 1 &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right| < 1 \\
&\Leftrightarrow \left|x^2 - 2x + 2\right| < 2 \left(\text{ comme } \Delta = -4 < 0 \text{ donc } x^2 - 2x + 2 > 0\right) \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 < 2 \\
&\Leftrightarrow x(x-2) < 0 (\text{ comme } x > 0) \\
&\Leftrightarrow x - 2 < 0
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ si et seulement si $h < \frac{2}{L}$.

**Exercice 3 :** L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{1+t^2}.$$

Sachant qu'à l'instant $t=0$ la concentration est $x(0)=5$ , déterminer la concentration à $t=2$ à l'aide de la méthode d'Euler implicite avec un pas $h=0.5$.

**Solution :**

On a $f(t,x) = -\frac{x(t)}{1+t^2}$ donc le schéma d'Euler implicite est donné par le système :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf\left(t_n, x_{n+1}\right) = x_n - h\frac{x_{n+1}}{1+t_n^2} & n = 0\ldots, N \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

On trouve (8)

$$x_{n+1}\left(1 + \frac{h}{1+t_n^2}\right) = x_n$$

Qu'on peut écrire :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + \frac{h}{1+t_n^2}}$$

A l'instant $t=0$ la concentration est $x_0 = 5$, et comme $h = 1/2$, alors $t_n = nh = n/2$ done pour $n \geq 1$ l'équation (9) donne :

$$x_{n+1} = \frac{4+(n+1)^2}{6+(n+1)^2} x_n$$

$t=2$ correspond à $n=4$, on obtient donc :

**Exercice 4 :** On considère le schéma :

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{2k_2}{3} + \frac{k_3}{6}\right)$$

avec : $k_1 = f(t_n, x_n)$, $k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_1}{2})$ et $k_3 = f(t_n + h, x_n - hk_1 + 2hk_2)$.

1. Dresser le tableau du Butcher de ce schéma. Est ce que ce schéma est consistant ?
2. Appliquer le schéma à un problème du type (TLS) et exprimer, dans ce cas, $x_n$.
3. Étudier, dans ce cas, la $\lim_{n\to+\infty} x_n$ et déduire.

Solution : On considère le schéma :

$$x_{n+1}=x_n+h\left(\frac{k_1}{6}+\frac{2k_2}{3}+\frac{k_3}{6}\right)$$

avec : $k_1=f(t_n,x_n), k_2=f\left(t_n+\frac{h}{2},x_n+h\frac{k_1}{2}\right)$ et $k_3=f(t_n+h,x_n-hk_1+2hk_2)$. 1. Dresser le tableau du Butcher de ce schéma. Est ce que ce schéma est consistant ?

$$\begin{aligned}
k_1&=f(t_n,x_n)\longrightarrow c_1=0\\
k_2&=f\left(t_n+\frac{h}{2},x_n+h\frac{k_1}{2}\right)\longrightarrow c_2=\frac{1}{2},a_{21}=\frac{1}{2}\\
k_3&=f(t_n+h,x_n-hk_1+2hk_2)\longrightarrow c_3=1,a_{31}=-1,a_{32}=2
\end{aligned}$$

Donc : On a :

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\
1 & -1 & 2 & 0\\
--- & -- & -- & --\\
| & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}\\
\sum_{i=1}^{i=3}b_i=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=1 & & &
\end{array}$$

Donc, la schéma est consistant 2. Appliquer le schéma à un problème du type (TLS) et exprimer, dans ce cas, $x_n$. TLS $\longrightarrow x'(t)=-Lx(t)\longrightarrow f(t,x)=-Lx$ donc :

$$k_1=f(t_n,x_n)=-Lx_n$$

$$k_2=f\left(t_n+\frac{h}{2},x_n+h\frac{k_1}{2}\right)=-L\left(x_n+h\frac{k_1}{2}\right)=-L\left(x_n-\frac{Lh}{2}x_n\right)=-L\left(1-\frac{Lh}{2}\right)x_n$$

$$k_3=f(t_n+h,x_n-hk_1+2hk_2)=-L(x_n-hk_1+2hk_2)=-L\left(x_n+Lhx_n-2Lh\left(1-\frac{Lh}{2}\right)x_n\right)$$

$$k_3=-L(1+Lh-Lh(2-Lh))x_n=-L\left(1-Lh+(Lh)^2\right)x_n$$

Done :

$$x_{n+1}=x_n+h\left(\frac{k_1}{6}+\frac{2k_2}{3}+\frac{k_3}{6}\right)=x_n+h\left(-\frac{L}{6}x_n-\frac{2L}{3}\left(1-\frac{Lh}{2}\right)x_n\right.$$

$$x_{n+1}=x_n-Lh\left(1+\frac{Lh}{2}+\frac{(Lh)^2}{6}\right)x_n$$

$$x_{n+1}=\left(1-Lh\left(1+\frac{Lh}{2}+\frac{(Lh)^2}{6}\right)\right)x_n$$

On pose : $Q(X)=1-X\left(1+\frac{X}{2}+\frac{X^2}{6}\right)$ done :

$$x_{n+1}=Q(Lh)x_n$$

On en déduit que :

$$x_n=[Q(Lh)]^nx_0$$

3. Étudier, dans ce cas, la $\lim_{n\to+\infty}x_n$ et déduire. La suite $(x_n)_n$ est une suite géométrique de raison $[Q(Lh)]$ et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\begin{cases}+\infty & \text{si } Q(Lh)>1\\ 1 & \text{si } Q(Lh)=1\\ 0 & \text{si } |Q(Lh)|<1\\ \text{ n'existe pas} & \text{si } Q(Lh)\leq -1\end{cases}$$

On en déduit que la zone de A-stabilité peut être décrite par :

$$\{X=Lh>0 \quad \text{tel que } |Q(Lh)|<1\}$$

**Exercice 5 :** Nous considérons l'équation différentielle $x'(t) = x(t)t$ dont nous calculons une solution numérique par la formule suivante :

$$x_{n+1} = x_n + h(t_n + \frac{h}{2})(x_n + \frac{ht_nx_n}{2})$$

1. Sachant que nous avons utilisé un schéma de Runge-Kutta explicite de tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

   Déterminer toutes les valeurs sur le tableau précédent. Est ce que ce schéma est consistant ?
2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, $x_n$ ;
3. Étudier, dans ce cas, la convergence de $(x_n)_n$ et déduire.

Schéma explicite, donc : $c_1 = a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ et $c_2 = a_{21}$ donc, la tableau de Butcher, dans ce cas, s'écrit : On a :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

On a

$$K_1 = f(t_n, x_n) = t_nx_n$$

$$K_2 = f(t_n + \alpha h, x_n + \alpha hK_1) = (t_n + \alpha h)(x_n + \alpha hK_1) = (t_n + \alpha h)(x_n + \alpha ht_nx_n)$$

Donc :

$$x_{n+1} = x_n + h(b_1K_1 + b_2K_2) = x_n + h(b_1t_nx_n + b_2(t_n + \alpha h)(x_n + \alpha ht_nx_n))$$

$$x_{n+1} = x_n + h\left(b_1t_nx_n + b_2t_nx_n + b_2\alpha h(t_n)^2 x_n + b_2\alpha hx_n + b_2\alpha^2h^2t_nx_n\right)$$

Or, le schéma est formulé par :

$$x_{n+1} = x_n + h\left(t_nx_n + \frac{h(t_n)^2 x_n}{2} + \frac{hx_n}{2} + \frac{h^2t_nx_n}{4}\right)$$

Par identification :

$$b_1 + b_2 = 1 \quad b_2\alpha = \frac{1}{2} \quad b_2\alpha^2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow b_2 = 1 \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad b_1 = 0$$

et, on a :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline | & 0 & 1 \end{array}$$

2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, $x_n$ ; Pour $f(t,x) = -Lx$ on a :

$$K_1 = f(t_n, x_n) = -Lx_n$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{K_1}{2}\right) = -L\left(x_n + h\frac{-Lx_n}{2}\right)$$

$$x_{n+1} = x_n + h\frac{1}{2}K_2 = x_n + h\left(-L\left(x_n + h\frac{-Lx_n}{2}\right)\right.$$

$$x_{n+1} = x_n - Lh\left(1 - \frac{Lh}{2}\right)x_n = \left(1 - Lh\left(1 - \frac{Lh}{2}\right)\right)x_n$$

Donc :

$$x_n = \left(1 - Lh\left(1 - \frac{Lh}{2}\right)\right)^n x_0$$

3 . Étudier, dans ce cas, la convergence de $(x_n)_n$ et déduire. En particulier, la suite géométrique de raison $\left(1 - Lh\left(1 - \frac{Lh}{2}\right)\right)$ converge vers zéro si et seulement si $X = Lh > 0$ vérifie :

$$\left|1 - X\left(1 - \frac{X}{2}\right)\right| < 1$$

qui représente une condition pour la A-stabilité.

**Exercice 6 :** Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que le schéma (implicite) de Runge-Kutta de tableau de Butcher suivant :

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

Soit d'ordre, au moins, égal à 2 pour la fonction $f(t,x) = x$ et l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$.

On vérifie successivement les conditions :

$$a_{11} + a_{12} = c_1 = \alpha$$
$$a_{21} + a_{22} = c_2 = 1$$

Donc le tableau est bien posé

$$b_1 + b_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Donc le schéma est consistant et comme la fonction $f(t,x) = x$ est lipschitzienne, par rapport à sa deuxième variable ($|f(t,x) - f(t,y)| = |x - y|$), on déduit que le schéma stable et par conséquent convergent d'ordre, au moins, égal à 1.

$$b_1c_1 + b_2c_2 = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$
$$b_1\left(a_{11} + a_{12}\right) + b_2\left(a_{21} + a_{22}\right) = \frac{2}{3}\left(0 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}(1 + 0) = \frac{1}{2}$$

Donc, le schéma est d'ordre au moins égal à deux. Remarquons que :

$$b_1c_1^2 + b_2c_2^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}(1)^2 = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{3}$$

Donc le schéma ne peut pas être d'ordre 3 .

**Exercice 7 :** Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = xt^2$ dont nous cherchons une solution numérique par le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

1. Exprimer $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$. Est ce que ce schéma est consistant ?
2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, $x_n$ ;
3. Étudier, dans ce cas, la convergence de $(x_n)_n$ et déduire.

1. Exprimer $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$. Est ce que ce schéma est consistant ? On a $f(t,x) = (t^2)\, x$ et :

$$K_1 = f(t_n, x_n) = (t_n)^2 x_n$$
$$K_2 = f\left(t_n + \frac{3h}{4}, x_n + \frac{3h}{4} K_1\right) = \left(t_n + \frac{3h}{4}\right)^2 \left(x_n + \frac{3h}{4}(t_n)^2 x_n\right)$$
$$x_{n+1} = x_n + h\,(0 \times K_1 + 1 \times K_2) = x_n + h\left(t_n + \frac{3h}{4}\right)^2 \left(x_n + \frac{3h}{4}(t_n)^2 x_n\right)$$

On a $b_1 + b_2 = 0 + 1 = 1$ donc le schéma est consistant. Remarquons que la fonction $f(t,x) = t^2 x$ est évidemment Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable et par conséquent, le schéma est convergent d'ordre au moins égal à 1. 2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, $x_n$ : On a $f(t,x) = -Lx$ et :

$$K_1 = f(t_n, x_n) = -Lx_n$$
$$K_2 = f\left(t_n + \frac{3h}{4}, x_n + \frac{3h}{4} K_1\right) = -L\left(x_n + \frac{3h}{4} K_1\right) = -L\left(x_n + \frac{3h}{4}(-Lx_n)\right) = -L\left(1 - \frac{3Lh}{4}\right) x_n$$
$$x_{n+1} = x_n + hb_2K_2 = x_n - Lh\left(1 - \frac{3Lh}{4}\right) x_n = \left(1 - Lh\left(1 - \frac{3Lh}{4}\right)\right) x_n$$
$$x_n = \left(\left(1 - Lh\left(1 - \frac{3Lh}{4}\right)\right)\right)^n x_0$$

3. Étudier, dans ce cas, la convergence de $(x_n)_n$ et déduire. La suite $(x_n)_n$ est géométrique de raison $\left(1 - Lh\left(1 - \frac{3Lh}{4}\right)\right)$, en particulier, elle converge vers 0 si et seulement, pour $X = Lh > 0$, on a :

$$\left|1 - X\left(1 - \frac{3X}{4}\right)\right| < 1$$

Qui constitue une condition assurant la A-stabilité.

**Exercice 8 :** Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = x^2 + t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schéma d'Euler explicite puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces deux schémas :

1. Exprimer $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$ ;
2. Sachant que $x_0 = 0$ et $h = 1$, calculer $x_1$.

**Solution :**

Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = x^2 + t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schéma d'Euler explicite puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces deux schémas :

1. Exprimer $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$ ;
   Méthode d'Euler :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) = x_n + h(x_n^2 + t_n)$$

Méthode Runge-Kutta : D'abord remarquons que Le tableau n'est pas complet ! La matrice $A = (a_{ij})$ doit être carré et par conséquent, il faut réintégrer la première ligne qui est, généralement, omise dans la représentation des méthodes explicites.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ --- & -- & -- & -- \\ & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour $f(t,x) = x^2 + t$, on a :

$$K_1 = f(t_n, x_n) = x_n^2 + t_n$$

$$K_2 = f(t_n + 0 \times h, x_n + ha_{21}K_1) = f(t_n, x_n) = x_n^2 + t_n$$

$$K_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1) = (x_n + \frac{h}{2}(x_n^2 + t_n))^2 + (t_n + \frac{h}{2})$$

$$x_{n+1} = x_n + h(\frac{K_1}{6} + \frac{2K_2}{6} + \frac{K_3}{6})$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(3x_n^2 + 3t_n + (x_n + \frac{h}{2}(x_n^2 + t_n))^2 + (t_n + \frac{h}{2}))$$

2. Sachant que $x_0 = 0$ et $h = 1$, calculer $x_1$.
   Euler explicite : $x_1 = x_0 + 1(x_0^2 + t_0) = 0$
   RK : $x_1 = x_0 + \frac{1}{6}(3x_0^2 + (x_0 + \frac{1}{2}(x_0^2))^2 + (\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$

**Exercice 9 :** Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = x.t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schémas d'Euler (explicite et implicite) puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ --- & -- & -- & -- \\ & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces trois schémas :

1. Exprimer $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$ ;
2. Sachant que $x_0 = 1$ et $h = 0.1$, calculer $x_1$.

**Solution :** Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = x.t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schémas d'Euler (explicite et implicite) puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ --- & -- & -- & -- \\ & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces trois schémas :

1. Exprimer $x_{n+1}$ en fonction de $x_n$ ;
   Euler explicite :

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n) = x_n + t_n x_n$$

   Euler implicite :

$$x_{n+1} = x_n + f(t_{n+1}, x_{n+1}) = x_n + t_{n+1}x_{n+1} \Longrightarrow x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + t_{n+1}}$$

RK : On a : $f(t,x) = x.t$

$$K_1 = f(t_n, x_n) = x_n t_n$$

$$K_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{h}{2}K_1) = ((t_n + \frac{1}{2}h)(x_n + \frac{h}{2}x_n t_n)$$

$$K_3 = f(t_n + h, x_n + h(-K_1 + 2K_2)) = (t_n + h)(-t_n x_n + 2((t_n + \frac{1}{2}h)(x_n + \frac{h}{2}x_n t_n)))$$

$$x_{n+1} = x_n + h(\frac{K_1}{6} + \frac{2K_2}{6} + \frac{K_3}{6})$$

2. Sachant que $x_0 = 1$ et $h = 0.1$, calculer $x_1$.
   Il suffit de remplacer

**Exercice 10 :** Étude des méthodes RK avec $s = 2$ (cas général). Pour chaque cas : Formuler le schéma, donner un exemple et préciser si nous pouvons reconnaître un schéma classique ?

1. Schéma implicite RK à 2 étages.
2. Schéma semi-implicite RK à 2 étages.
3. Schéma explicite RK à 2 étages. Étudier la convergence et la A-stabilité de ces schémas explicites.

**Solution :**

Étude des méthodes RK avec $s = 2$ (cas général). Pour chaque cas : Formuler le schéma, donner un exemple et préciser si nous pouvons reconnaître un schéma classique ?

1. Schéma implicite RK à 2 étages.
   Le schéma se formule à travers son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Pour que ce tableau soit bien posé :

$$a_{11} + a_{12} = c_1 \quad a_{21} + a_{22} = c_2$$

et pour quel soit consistant

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & c_1 - a_{11} \\ c_2 & a_{21} & c_2 - a_{21} \\ \hline & 1 - b_2 & b_2 \end{array}$$

$$K_1 = f(t_n c_1 h, x_n + h(a_{11}K_1 + (c_1 - a_{11})K_2)$$

$$K_2 = f(t_n c_2 h, x_n + h(a_{21}K_1 + (c_2 - a_{21})K_2)$$

$$x_{n+1} = x_n + h((1 - b_2)K_1 + b_2 K_2)$$

Exemple tiré de la littérature (Méthode de Gauss) : ($\psi = \frac{\sqrt{3}}{6}$)

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \psi & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \psi \\ \frac{1}{2} + \psi & \frac{1}{4} + \psi & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

2. Schéma semi-implicite RK à 2 étages.
   Le schéma se formule à travers son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & 0 \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Pour que ce tableau soit bien posé :

$$a_{11} = c_1 \quad a_{21} + a_{22} = c_2$$

et pour quel soit consistant

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & 0 \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|cc} c_1 & c_1 & 0 \\ c_2 & a_{21} & c_2 - a_{21} \\ \hline & 1-b_2 & b_2 \end{array}$$

$$K_1 = f(t_n + c_1 h, x_n + h(a_{11}K_1)$$

$$K_2 = f(t_n + c_2 h, x_n + h(a_{21}K_1 + (c_2 - a_{21})K_2)$$

$$x_{n+1} = x_n + h((1-b_2)K_1 + b_2 K_2)$$

Exemple : $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ et $a_{21} = a_{22} = b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$K_1 = f(t_n, x_n)$$

$$K_2 = f(t_n + h, x_n + h(\frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2}))$$

$$x_{n+1} = x_n + h(\frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2})$$

En portant cette dernière équation dans l'avant dernière :

$$K_2 = f(t_n + h, x_{n+1}) = f(t_{n+1}, x_{n+1})$$

et Finalement :

$$x_{n+1} = x_n + h(\frac{f(t_n, x_n)}{2} + \frac{f(t_{n+1}, x_{n+1})}{2})$$

Il s'agit de la méthode du trapèze (Crank-Nicolson).

3. Schéma explicite RK à 2 étages. Étudier la convergence et la A-stabilité de ces schémas explicites. Le schéma se formule à travers son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Pour que ce tableau soit bien posé :

$$a_{21} = c_2$$

et pour quel soit consistant

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & 0 \\ \hline & 1-b_2 & b_2 \end{array}$$

$$K_1 = f(t_n, x_n)$$

$$K_2 = f(t_n + c_2 h, x_n + h(c_2 K_1)$$

$$x_{n+1} = x_n + h((1-b_2)K_1 + b_2 K_2)$$

Exemple : $c_2 = a_{21} = 1 \quad b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ --- & -- & -- \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Schéma de Heun.

Pour que le schéma soit d'ordre, au moins, 2 il faut $b_2 c_2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow c_2 = \frac{1}{2c_2}$

Pour que le Schéma soit d'ordre, au moins, 3 il faut $b_2 c_2^2 = \frac{1}{3}$ et $b_2 a_{21} c_1 = \frac{1}{6}$ ce qui est impossible car $c_1 = 0$.

On déduit :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\beta} & \frac{1}{2\beta} & 0 \\ --- & -- & -- \\ & 1-\beta & \beta \end{array}$$

**Exercice 1 :** On considère un réel $\lambda$ et l'équation différentielle donnée par :

$$x(0) = \overline{x}_0 \quad \text{et } x'(t) = -\lambda x(t), \; t > 0$$

Soit $T > 0$ et la discrétisation définie par : $m \in \mathbb{N}^*$, $\hbar = \frac{T}{m}$ et $t_k = k\hbar$ pour $k = 0, 1, \cdots, m$.

1. Déterminer la solution exacte de ce problème, $\overline{x}(t)$, $t > 0$ ;
   La solution est :
   $$x(t) = \overline{x}_0 e^{-\lambda t}$$
2. Appliquer le schéma d'Euler explicite et exprimer la solution numérique, $x_k$, en fonction de $k$ ;
   On a $f(t, x) = -\lambda x$ donc
   $$x_0 \text{ donnée et } \; x_{n+1} = x_n + \hbar f(t_n, x_n) = x_n - \lambda\hbar x_n = (1 - \lambda\hbar)x_n$$
3. Appliquer le schéma d'Euler explicite et exprimer $x_k$ en fonction de $k$ ;
   $$x_k = (1 - \lambda\hbar)^k x_0$$
4. Appliquer le schéma d'Euler implicite et exprimer $x_k$ en fonction de $k$ ;
   $$x_0 \text{ donnée et } \; x_{n+1} = x_n + \hbar f(t_{n+1}, x_{n+1}) = x_n - \lambda\hbar x_{n+1}$$
   $$(1 + \lambda\hbar)x_{n+1} = x_n$$
   $$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + \lambda\hbar}$$
   $$x_k = (\frac{1}{1 + \lambda\hbar})^k x_0$$
5. On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler implicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\hbar > 0$ ;
   $$\lambda > 0 \Longrightarrow 0 \leq \frac{1}{1 + \lambda\hbar} \leq 1 \Longrightarrow |x_k| \leq |x_0|$$
6. On suppose que $\lambda > 0$. Donner une condition sur $\hbar$ pour que la solution du schéma d'Euler explicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ ;
   $$|x_k| \leq |x_0| \Longrightarrow |1 + \lambda\hbar| \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq 1 + \lambda\hbar \leq 1 \Longrightarrow \hbar \leq \frac{2}{\lambda}$$
7. On suppose que $\lambda < 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler explicite $x_k$ reste du signe de $x_0$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\hbar > 0$ ;
   $$\lambda < 0 \Longrightarrow 1 - \lambda\hbar \geq 0 \Longrightarrow x_k \text{ et } x_0 \; \text{ sont de même signe}$$
   Remarquons que lorsque $\lambda > 0$ :
   $$x_k \text{ et } x_0 \; \text{ sont de même signe } \; \Longrightarrow 1 - \lambda\hbar \geq 0 \Longrightarrow \hbar \leq \frac{1}{\lambda}$$

8. On suppose que $\lambda < 0$. Donner une condition sur $\hbar$ pour que la solution du schéma d'Euler implicite $x_k$ soit du signe de $x_0$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ ;

$$x_k \text{ et } x_0 \text{ sont de même signe } \Longrightarrow \frac{1}{1+\lambda\hbar} \geq 0 \Longrightarrow 1+\lambda\hbar > 0 \Longrightarrow \hbar > \frac{-1}{\lambda}$$

Remarquons que lorsque $\lambda > 0$ :

$$1+\lambda\hbar > 0 \Longrightarrow x_k \text{ et } x_0 \text{ sont de même signe}$$

9. Soit $\overline{x}_k = \overline{x}(t_k)$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer que l'erreur de consistance du schéma d'Euler implicite :

$$r_k = \frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{\hbar} + \lambda \overline{x}_{k+1}$$

vérifie : $|r_k| \leq \frac{\overline{x}_0 \lambda^2}{2}\hbar$ pour tous $k = 0, \cdots, m-1$ ;
L'erreur de consistance est définie par :

$$\hbar r_k = x(t_{k+1}) - x(t_k) + \Phi(t_k, x(t_k), \hbar)$$

$$\hbar r_k = x(t_{k+1}) - x(t_k) + \lambda x(t_{k+1})$$

$$r_k = \frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{\hbar} + \lambda \overline{x}_{k+1}$$

$$r_k = \frac{1}{\hbar}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{x}'(t)dt + \frac{1}{\hbar}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \lambda \overline{x}_{k+1} dt$$

En utilisant l'équation différentielle pour exprimer la deuxième intégrale :

$$r_k = \frac{1}{\hbar}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{x}'(t)dt - \frac{1}{\hbar}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{x}'(t_{k+1}) dt$$

$$r_k = \frac{1}{\hbar}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\overline{x}'(t) - \overline{x}'(t_{k+1}))dt$$

D'après le théorème des accroissements finis on a pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$ :

$$|\overline{x}'(t) - \overline{x}'(t_{k+1})| \leq \left(\sup_{s\in[t,t_{k+1}]} |\overline{x}''(s)|\right)(t_{k+1} - t) \leq \left(\sup_{s\in[0,T]} |\overline{x}''(s)|\right)(t_{k+1} - t) = |\overline{x}_0|\lambda^2(t_{k+1} - t)$$

On en déduit :

$$|r_k| \leq |\overline{x}_0|\lambda^2 \frac{1}{\hbar}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t)dt = \frac{|\overline{x}_0|\lambda^2}{2}\hbar$$

10. On définit l'erreur $e_k = \overline{x}_k - x_k$, $k = 0, \cdots, m$ pour le schéma d'Euler implicite. Montrer qu'elle vérifie l'équation suivante, pour tous $k = 0, \cdots, m-1$ :

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{\hbar} + \lambda e_{k+1} = r_k$$

Définition du schéma numérique :

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) - \lambda\hbar x(t_{k+1}) \Longrightarrow \frac{x_{k+1} - x_k}{\hbar} = -\lambda x_{k+1} \qquad (1)$$

Définition de l'erreur de consistance :

$$\frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{\hbar} = -\lambda \overline{x}_{k+1} + r_k \qquad (2)$$

$$(2) - (1) \Longrightarrow \frac{e_{k+1} - e_k}{\hbar} + \lambda e_{k+1} = r_k \qquad k = 0, \cdots, m-1$$

11. On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que :

$$|e_k| \leq |e_0| + T\frac{\overline{x}_0 \lambda^2}{2}\hbar \text{ pour tous } k = 0, \cdots, m$$

En déduire que le schéma d'Euler implicite converge à l'ordre 1 pour $\lambda > 0$ ;
on a :

$$e_{k+1} = \frac{1}{1+\lambda\hbar}(e_k + \hbar r_k)$$

Comme $\lambda > 0$ on a $|\frac{1}{1+\lambda\hbar}| \leq 1$ et on déduit que :

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + \hbar|r_k| \leq |e_k| + \hbar\left(\frac{|\overline{x}_0|\lambda^2}{2}\hbar\right)$$

Par induction :

$$|e_k| \leq |e_0| + T\frac{|\overline{x}_0|\lambda^2}{2}\hbar$$

12 Reprendre l'estimation d'erreur de la question 11 pour le schéma d'Euler implicite avec $\lambda < 0$ ; Il faut remarquer que pour tout $\hbar \leq \frac{1}{2|\lambda|}$ (condition que l'on suppose vérifiée) on a :

$$|\frac{1}{1+\lambda\hbar}| \leq 1 + 2|\lambda|\hbar \leq e^{2|\lambda|\hbar}$$

On a comme précédemment :

$$|e_{k+1}| \leq |\frac{1}{1+\lambda\hbar}|\left(|e_k| + \hbar(\frac{|\overline{x}_0\lambda^2}{2}\hbar)\right) \leq e^{2|\lambda|\hbar}(|e_k| + \hbar(\frac{|\overline{x}_0\lambda^2}{2}\hbar)$$

Par induction :

$$|e_k| \leq e^{2|\lambda|t_k}\left(|e_0| + t_k e^1(\frac{|\overline{x}_0|\lambda^2}{2}\hbar)\right)$$

13. Reprendre les questions 9,10,11 pour le schéma d'Euler explicite avec $\lambda > 0$ puis avec $\lambda < 0$.
Les calculs sont à adapter pour le cas du schéma explicite, nous obtenons successivement :

$$r_k = \frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{\hbar}\lambda\overline{x}_k$$

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{\hbar} + \lambda e_k = r_k$$

$$|r_k| \leq \frac{|\overline{x}_0|\lambda^2}{2}\hbar$$

$\lambda > 0$, en supposant $\hbar \leq \frac{2}{|\lambda|}$ alors $|1 - \lambda\hbar| \leq 1$ et :

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + \hbar|r_k| \leq |e_k| + \hbar(\frac{|\overline{x}_0|\lambda^2}{2}\hbar)$$

$$|e_k| \leq |e_0| + T(\frac{|\overline{x}_0|\lambda^2}{2}\hbar)$$

$\lambda < 0$, on a : $1 + |\lambda|\hbar \leq e^{|\lambda|\hbar}$ et :

$$|e_{k+1}| \leq (1 + |\lambda|\hbar)|e_k| + \hbar(\frac{|\overline{x}_0\lambda^2}{2}\hbar) \leq e^{|\lambda|\hbar}|e_k| + \hbar(\frac{|\overline{x}_0\lambda^2}{2}\hbar)$$

$$|e_k| \leq e^{|\lambda|t_k}(|e_0| + t_k(\frac{|\overline{x}_0\lambda^2}{2}\hbar))$$

**Exercice 2 :** La formule de Taylor peut être utilisée pour définir un schéma numérique. En effet :

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + ..... + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(x) + E(x,h)$$

$E(x,h)$ est la troncature donnée par

$$E(x,h) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}y^{(m+1)}(\xi) \quad \text{pour un certain} \quad \xi \in [x, x+h]$$

La méthode consiste à prédire $y(x+h$ en fonction de $y(x)$ en calculant et en remplaçant les dérivées successives $y^{(m)}$ en fonction de $f(x,y(x))$. Dans ce cas l'erreur peut être approchée par :

$$E(x,h) = \frac{h^m}{(m+1)!}(y^{(m)}(x+h) - y^{(m)}(x))$$

Application :

$$\begin{cases} y'(x) + 4y(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En considérant $m = 4$, estimer $y(0.1)$ et l'erreur associée.