UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI

FACULTÉ DES SCIENCES - TÉTOUAN

Licence Fondamentale Sciences de la Matière Physique

Semestre 3 - M20 : Analyse Numérique et Algorithmique

TRAVAUX DIRIGÉS

Rédigé par : **Bouchaib FERRAHI**

Département de Mathématiques

2022-2023

Les documents relatifs à ce cours sont disponibles sur : www.ferrahi.ma

Faculté des Sciences de Tétouan, BP. 2121 M'Hannech II, 93030 Tétouan Maroc.

Table des matières

Sommaire **3**

Avant-propos **4**

1 TRAVAUX DIRIGÉS - EXERCICES 5

2 TRAVAUX DIRIGÉS - SOLUTIONS 15

Avant-propos

Ce polycopié, de travaux dirigés proposés durant l'année universitaire 2022-2023, est destiné aux étudiants du semestre trois de la Licence Fondamentale Sciences de la Matière Physique, est conforme au nouveau programme appliqué depuis 2014. En particulier, les deux cous de Mathématiques visent le développement de l'esprit d'analyse et de synthèse et la valorisation de l'approche scientifique dans le traitement des problèmes théoriques et expérimentaux.

Le contenu proposé, pour ce cours d'analyse numérique et algorithmique, consiste en un recueil de méthodes de résolution numérique de plusieurs problèmes Mathématiques allant des equations non linéaires, à l'interpolation polynomiale, au calcul des intégrales et finalement calcul différentiel et certaines équations différentielles. Les méthodes numériques sont très utiles dans les sciences appliquées et dans la traitement des problèmes expérimentaux, ce cours vise à munir les étudiants d'outils indispensables pour leur cursus dans la filière Licence es sciences Physique et éventuellement dans les cycles supérieurs.

Ce polycopié est adapté à la filière sus-mentionnée et se limitera à des exercices d'application des notions, définitions, propriétés et résultants présentés dans le cours.

Ce travail ne constitue pas une référence complète, le lecteur intéressé peut consulter d'autres références qui traitent ce même contenu d'une manière plus profonde et rigoureuse.

BOUCHAIB FERRAHI

Chapitre 1

TRAVAUX DIRIGÉS - EXERCICES

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

SÉRIE N^0 1 2022 - 2023

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 - 2$.

a) Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $\overline{x}$ sur l'intervalle $[1, 2]$. Quelle est la valeur exacte de $\overline{x}$?

b) Écrire les algorithmes permettant le calcul d'une valeur approchée, de $\overline{x}$ avec une précision $|f(x_k)| \leq 10^{-3}$, en utilisant les méthodes : Dichotomie, Lagrange et Newton.

c) Pour chaque méthode, calculer les quatre premières valeurs de la suite récurrente. Comparer et expliquer.

Exercice 2 :

Soit $f : [1; 2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante telle que $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$.

1. Sachant que $f(1.6555) = 0$, déterminer la suite des premiers quatre itérés de la méthode de la dichotomie dans l'intervalle $[1; 2]$ pour l'approximation du zéro de f. On pourra utiliser le tableau ci-dessous :

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	1		2			
1						
$\vdots$						

Exercice 3 : 1. Donner la suite définissant la méthode de Newton pour la recherche d'un zéro d'une fonction f. Justifier l'expression de la suite ;

2. Écrire l'algorithme pour une convergence à ε près en précisant le test d'arrêt utilisé ;
3. Déterminer l'ordre de convergence minimale de cette suite ;
4. Applications :
   a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ sur $[-1; 0, 4]$ et $x_0 = -0, 3$, puis $x_0 = 0, 3$ avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

   b. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ sur $[0, 45; 1, 2]$ et $x_0 = 0, 5$, $x_0 = 0, 54$ et $x = 0, 555$ avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. On s'interesse à l'étude des racines de l'équation $f(x) = 0$. (Les valeurs approchées sont à présenter par défaut avec trois chiffres après la virgule).

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$.

b) Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$.

c) On souhaite maintenant utiliser la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n. Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix. x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2.

d) On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\overline{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ et calculer, en suite, les valeurs suivantes $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$.

e) Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\overline{x}_3$ comme valeur approchée de r ?

Exercice 5 : A titre de rappel, la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[a; b]$ définie la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} x_0 & \text{bien choisie} \\ x_{n+1} == g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} & \end{cases}$$

On suppose que cette suite admet une limite sur $[a; b]$ notée ℓ. Montrer que si f est 3 fois derivable sur $[a; b]$ et que $f'(\ell) \neq 0$ alors la méthode de Newton est d'ordre 2 au moins.

Exercice 6 :

On considère l'équation (E) donnée par : $(E) \qquad x^3 + 10x = 20 - 2x^2$.

a) Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser.

b) Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$.

c) Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0, x_1 et x_2) de la solution de (E). En déduire une estimation de l'erreur commise en considérant x_3.

d) On considère le schéma itératif suivant : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2+2x_n+10} & n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] & \end{cases}$

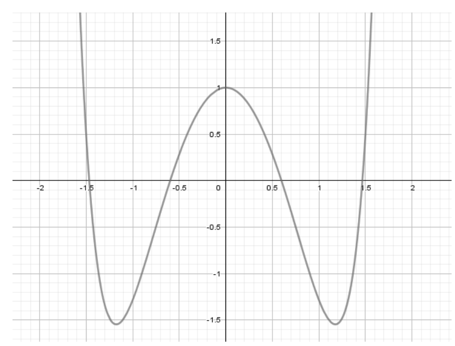
e) Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E).

f) Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x\in[1,2]} |\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}| \leq \frac{40}{132}$).

g) Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3.

Exercice 7 : Soit (E) l'équation suivante : $(E) \qquad e^{x^2} - 4x^2 = 0$

1. Utiliser la représentation graphique, ci-jointe, de la fonction $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$ pour localiser les quatres racines de (E) dans quatre intervalles d'amplitude 1 chacun et qui contient une seule racine;
2. Montrer qu'il y a une seule racine $\overline{x}$ de (E) dans $[0; 1]$;
3. Transformer l'équation (E) en problèmes de recherche de points fixes, sous les formes suivantes :
   $(PF1)$: $g_1(x) = x$ tel que g_1 est une fonction définie par une racine carrée et la fonction exceptionnelle,
   $(PF2)$: $g_2(x) = x$ tel que g_2 est une fonction définie par la fonction exponentielle et un polynôme de degré 2,
   $(PF3)$: $g_3(x) = x$ tel que g_3 une autre fonction à déterminer;
4. Écrire les schémas numériques pour calculer $\overline{x}$ en utilisant $(PF1)$ puis $(PF2)$. Exécuter les calculs des quatres premières itérations de chacun des deux schémas;
5. Étudier la convergence des deux schémas relatifs à $(PF1)$ et à $(PF2)$. Évaluer l'erreur commise lorsque le schéma converge;
6. Écrire la méthode de Newton pour déterminer la racine $\overline{x}$ de (E). Quel est son ordre? Quel est le meilleur choix parmi les deux méthodes? Justifier la réponse.



Exercice 8 : Une modification de la méthode de Newton.

Dans la méthode de Newton, ayant à disposition les points $x_0 ; \cdots, x_n$; on construit x_{n+1} en prenant l'intersection de la tangente au graphe de f en x_n avec l'axe des abscisses. Dans la méthode de Newton modifiée, ayant construit $x_0 ;$ $\cdots, x_n$; on construit x_{n+1} en prenant l'intersection avec l'axe des abscisses avec la droite passant par x_n et parallèle à la tangente au graphe de f en x_0 :

a) On suppose que la fonction f est strictement croissante et strictement convexe sur $[a; b]$ avec une racine dans $]a; b[$. On prend $x_0 = b$: Faites un dessin faisant apparaître les quatre premières valeurs données par la méthode de Newton modifiée. Comparer avec le schéma correspondant pour la méthode de Newton ordinaire ;

b) Donner l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n ;

c) Selon vous quels sont les avantages pratiques de cette modification ? Ses inconvénients ?

Exercice 9 :

a) Écrire les nombres suivants dans les bases 2, 8, 10 et 16 : $(7F)_{16}$ - $(11000001)_2$ - $(1000001)_2$ - $(13)_{10}$ - $(755)_8$ - $(1100000011011110)_2$

b) Écrire $(90)_{10}$ et $(97)_{10}$ en base 2. Effectuer, en opération binaire, la somme et le produit des deux nombres puis procéder à la vérification des résultats obtenus.

Équipe pédagogique du module : MM. Ferrahi et Hjiaj

Des ressources pédagogiques supplémentaires sont disponibles sur Moodle et sur le site : www.ferrahi.ma

---

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE —

SÉRIE N^0 2 2022 - 2023

Exercice 1. - Construire le polynôme d'interpolation P_2 basé sur le système de trois points : $(0,2)$, $(1,1)$ et $(2,2)$, en utilisant successivement les trois méthodes (directe, Lagrange, Newton).

- Déterminer le polynôme d'interpolation P_3 basé sur le système de points : $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$.

Exercice 2. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous

x	0	2	3	5	$f(x)$	-1	2	9	87

Exercice 3. Les données suivantes concernent l'espérance de vie des habitants de deux régions :

année	1975	1980	1985	1990	E. Ouest	72.8	74.2	75.2	76.4	E. Est	70.2	70.2	70.3	73.2

Utiliser le polynôme d'interpolation de degré 3 pour estimer l'espérance de vie en 1977, 1983 et 1988.

Exercice 4. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ par rapport aux points 0; $\frac{3}{4}$; 1. Représenter sur un même graphique ce polynôme et la fonction interpolée f.

- Comparer, à l'aide d'une calculatrice, $f(\frac{1}{2})$ et $P_2(\frac{1}{2})$.
- Rappeler la formule de l'erreur et donner une majoration de $|E(x)| = |f(x) - P_2(x)|$.
- Évaluer l'erreur commise en considérant les points support : 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et 1.

Exercice 5. On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[2, 2.4]$, dont on connaît les valeurs suivantes :

$$f(2) = 5.2\ ,\ f(2.1) = 6.4,\ f(2.2) = 5.8\ ,\ f(2.3) = 6.1 \text{ et } f(2.4) = 6$$

1) Établir le tableau des différences finies de f ;
2) En déduire le polynôme d'interpolation de Newton de f d'ordre 4, associé aux points $x_0 = 2$, $x_1 = 2.1$, $x_2 = 2.2$, $x_3 = 2.3$ et $x_4 = 2.4$. Peut-on donner, à partir du tableau précédent, les polynômes d'interpolation par rapport aux points x_0, x_1, x_2 et x_3 ? et par rapport aux points x_1, x_2, x_3 et x_4 ? Expliquer la réponse.
3) Donner une valeur approchée de $f(2.25)$ et donner une majoration de $|f(x) - P_4(x)|$ si f est de classe $\mathcal{C}^5$.

Exercice 6. Pour calculer le zéro d'une fonction $f(x)$ inversible sur un intervalle $[a, b]$ on peut utiliser l'interpolation : après avoir évalué f sur une discrétisation x_i de $[a, b]$, on interpole l'ensemble $(y_i = f(x_i), x_i)_{i=0}^{m}$ et on obtient un polynôme $p(y)$ tel que : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = p(0)$.

1) Utiliser cette méthode pour évaluer l'unique racine r de la fonction $f(x) = \exp(x) - 2$ dans l'intervalle $[0, 1]$ avec trois points d'interpolation ;
2) Comparer ensuite le résultat obtenu avec l'approximation du zéro de f obtenue par la méthode de Newton en 3 itérations à partir de $x_0 = 0$.

Exercice 7. La division Euclidienne d'un polynôme V par un polynôme W non nul consiste à écrire (d'une manière unique) V sous la forme $V = Wq + r$ où q et r sont deux polynômes, le second vérifiant $deg(r) < deg(W)$; q est le quotient de la division euclidienne de V et W et r le reste de cette division.

1) Montrer que si $W(x) = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_d)$ alors r est le polynôme d'interpolation de V aux points $(a_0,\ a_1, ..., a_d)$;
2) Utiliser une division euclidienne pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de $V(x) = x^5 - 3x^4 + x - 3$ aux points $-1,\ 0,\ 1,\ 2$. Vérifier le résultat obtenu.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2 - 3x^2$:

1) Calculer le polynôme P_0 qui interpole f au point d'abscisse $x_0 = 0$;
2) Calculer le polynôme P_1 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$;
3) Calculer le polynôme P_2 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$;
4) Calculer le polynôme P_n, $n > 3$ qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2, \cdots$, et $x_n = n$. Est-ce que le résultat est vrai pour une fonction f quelconque.

Exercice 9. (Interpolation et polynômes de Tchebychev)

1. Rappeler la définition des polynômes de Tchebychev sur $[-1, 1]$;
2. Donner la relation de recurrence entre ces polynômes et calculer T_4 ;
3. Calculer les racines de T_4 dans $[-1, 1]$ puis déduire les meilleurs noeuds d'interpolation sur l'intervalle $[0, 3]$.

Exercice 10. Soit f une fonction de classe C^3, définie sur $[0, 3]$ et à valeurs réelles.

1) Déterminer le polynôme d'interpolation d'ordre 2 de f, noté $P_2(.)$, qui prend les même valeurs que $f(.)$ en $x = 0, 1, 3$;
2) Déterminer la méthode de quadrature élémentaire obtenue en remplaçant l'intégrale de $f(.)$ sur $[0, 3]$ par celle de $P_2(.)$;
3) Montrer que l'ordre de la méthode est égal à 2.

Exercice 11. On se place sur l'intervalle $[-1, +1]$:

1) Calculer les polynômes de base de degré 3 associés aux points $\{-1, -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\}$;
2) En déduire le polynôme d'interpolation, P_3, de degré inférieur ou égal à 3 d'une fonction f définie sur $[-1, +1]$, associé aux points $\{-1, -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\}$;
3) Décrire la méthode de quadrature sur $[-1, +1]$ obtenue en remplaçant l'intégrale de f par celle de P_3. Quel est l'ordre de cette méthode ?

Exercice 12. Estimer $\int_0^{5/2} f(x)dx$ à partir des données suivantes :

x	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$	$f(x)$	$\frac{3}{2}$	2	2	$1,6364$	$1,2500$	$0,9565$

en utilisant : La méthode des rectangles à gauche composite, méthode des rectangles à droite composite et méthode des trapèzes composite.

Exercice 13 : Estimer, à l'aide des théorèmes du cours, le nombre de sous-intervalles n nécessaire pour obtenir une approximation de : $I = \int_0^1 \dfrac{4}{1 + x^2}dx$ avec une erreur moindre que 10^{-2}, en utilisant : La méthode du point milieu combinée, du méthode des trapèzes combinées et méthode de Simpson combinée. Commenter les résultats trouvés.

Exercice 14. Soit f une fonction $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0}^m$ de subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ définis par $x_i = a + ih$ avec $h = \dfrac{b-a}{m}$. Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature composite pour approcher l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$:

1) Écrire le polynôme $P(.)$ qui interpole f aux points 0 et 1 ;
2) En déduire une formule de quadrature basée sur l'approximation : $\int_0^1 f(x)dx \simeq \int_0^1 p(x)dx$ et étudier le degré de précision de cette formule de quadrature ;
3) A l'aide d'un changement de variable affine, déduire une formule de quadrature pour l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$;
4) En utilisant le résultat au point précédent, proposer une formule de quadrature composite pour le calcul approché de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Quelle méthode de quadrature reconnaît-on ?

Exercice 15. On souhaite calculer une valeur approchée de $ln(2)$ à partir de la relation $ln(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$. Nous considérerons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$:

1) Montrer que pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et pour tout $t \in [0, 1]$ on a :
$$f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b) \quad (E)$$
2) On suppose $0 < a < b < +\infty$ et soit $x \in [a, b]$. Montrer que $\frac{b - x}{b - a} \in [0, 1]$;
3) Soit $P_1(x)$ le polynôme d'interpolation pour f aux points a et b Montrer en prenant $t = \frac{b - x}{b - a}$ dans (E) que $f(x) \leq P_1(x)$;
4) Trouver une approximation de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ en appliquant la méthode des trapèzes combinée avec 2 sous-intervalles. Faire un schéma illustrant le calcul;
5) Expliquer pourquoi quel que soit le nombre de sous-intervalles, le nombre trouvé par la méthode des trapèzes combinée fournira toujours une approximation par excès (c'est-à-dire supérieure à la valeur exacte $ln(2)$);
6) On approche maintenant $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ en utilisant la méthode Simpson combinée. Combien de sous-intervalles faut-il utiliser pour commettre une erreur inférieure ou égale à 10^{-10} ?

Équipe pédagogique : MM. Ferrahi et Hjiaj———Ressources pédagogiques disponibles sur Moodle et sur le site : www.ferrahi.ma

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE —

SÉRIE N^03 2022 - 2023

Exercice 1 : Soit (PC) le problème de Cauchy donné par :

$$(PC)\begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

1. On suppose que (PC) admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte) ;
2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Cranck-Nicolson :
   En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ;
3. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r (en fonction de h). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$;
4. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n.

Exercice 2 : Considérons le problème de Cauchy : trouver $y : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > t_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une unique solution y. Le principe des méthodes numériques est de subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en m intervalles de longueur $h = \dfrac{T - t_0}{m} = t_{i+1} - t_i$. Pour chaque noeud $t_i = t_0 + ih$, $(1 < i < m)$ on cherche la valeur inconnue y_i qui approche $y(t_i)$. Rappelons que l'ensemble des valeurs $\{y_0, y_1, ..., y_m\}$ représente la solution numérique du problème.

Dans cette exercice on va construire des nouveaux schémas numériques basés sur l'intégration de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_i et t_{i+2} :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt.$$

1. En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique explicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i. Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;
2. En utilisant la formule de quadrature de Simpson pour approcher le membre de droite, écrire un schéma numérique implicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i ; Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;
3. Proposer une modification du schéma a la question précédente pour qu'il devient explicite.

Exercice 3 : On considère le problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 10]$, définie par :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), \quad t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy ;
2. Soit h le pas temporel. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire (EDO) ;
3. En déduire une formulation du type : $y_{i+1} = g(h, i)$ avec $g(h, i)$ une fonction à préciser (autrement dit, l'itérée en t_i ne dépend que de h et i et ne dépend pas de y_i) ;
4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour déterminer les solutions obtenues en utilisant la méthode explicite d'Euler avec $h = 2.5$, puis avec $h = 0.5$.

Exercice 4 : Une deuxième approche pour la résolution numérique des équations différentielles consiste à utiliser le calcul numérique de la dérivée et de l'utiliser pour approcher $y'(t_i)$. Soit f une fonction supposée derivable sur un intervalle $[a, b]$ et $(_i)_{i=0,...,n}$ une subdivision de $[a, b]$ en n sous intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$, une valeur approché de $f'(x_i)$ peut être donnée par l'une des trois formules :

$$D_1 : \qquad f'_d(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad i = 0, ..., n-1$$

$$D_2 : \qquad f'_g(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \qquad i = 1, ..., n$$

1) Une fonction f est donnée par les valeurs suivantes :

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	2	4	8	16	32

   a. Calculer, de deux manières différentes, une valeur approchée de $f'(3)$,
   b. Sachant que f est définie par $f(x) = 2^x$, calculer $f'(3)$ et comparer la valeur exacte et les valeurs approchées.

2) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \quad t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit $(t_i)_{i=0,...,n}$ une subdivision de $[0, T]$ avec $t_i = 0 + i(\frac{T-0}{n})$, une solution approchée $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$ du problème (P) peut être obtenue est utilisant la dérivation numérique de la manière suivante :

   a. Écrire l'équation différentielle pour $t = t_i$ puis utiliser D_1 pour reformuler l'équation différentielle en une relation entre $y(t_{i+1})$ et $y(t_i)$;
   b. En utilisant l'approximation $y_i \simeq y(t_i)$, formuler la méthode de résolution ainsi obtenue (dite méthode d'Euler explicite) ;
   c. Formuler la méthode d'Euler implicite obtenue en utilisant la définition D_2 au lieu de D_1 ;

3) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) \quad t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a. Montrer que le problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.
b. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.
c. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.1$.

Équipe pédagogique : MM. Ferrahi et Hjiaj————Ressources pédagogiques disponibles sur Moodle et sur le site : www.ferrahi.ma

Chapitre 2

TRAVAUX DIRIGÉS - SOLUTIONS

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

SÉRIE N^0 1 2022 - 2023

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 - 2$.

- Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $\overline{x}$ sur l'intervalle $[1, 2]$. Quelle est la valeur exacte de $\overline{x}$?

- Écrire les algorithmes permettant le calcul d'une valeur approchée, de $\overline{x}$ avec une précision $|f(x_k)| \leq 10^{-3}$, en utilisant les méthodes : Dichotomie, Lagrange et Newton.

- Pour chaque méthode, calculer les quatre premières valeurs de la suite récurrente. Comparer et expliquer.

Rappels :

La méthode de la Dichotomie :

Recherche de la racine $\overline{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ ($\overline{x}$ est la seule racine dans $[a, b]$) avec une précision ε.

Initialisation : $a_0 = a$, $b_0 = b$

Tant que $|b_k - a_k| > \varepsilon$ (test d'arrêt) $\rightarrow$ faire $\downarrow$ (une boucle de calcul à refaire tant que la condition est vérifiée) :

Calculer $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ et :

Si $f(a_k)f(x_k) < 0$ Alors $a_{k+1} := a_k$ et $b_{k+1} := x_k$

Sinon $a_k := x_k$ et $b_{k+1} := b_k$

Si $|b_n - a_n| \leq \varepsilon \rightarrow$ Fin.

Conclusion : $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ est une valeur approchée de $\overline{x}$ avec une précision ε.

Méthode de Lagrange (utilisant la droite qui passe par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ au lieu du centre de l'intervalle $[a_k, b_k]$) :

Recherche de la racine $\overline{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ ($\overline{x}$ est la seule racine dans $[a, b]$) avec une précision ε.

La méthode est une généralisation de la méthode de dichotomie : la valeur de x_k est déterminée comme intersection de la droite qui passe par les deux points $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ et l'axe des abscisses.

La méthode est à différencier avec les autres méthodes utilisant une sécante notamment la variante de la méthode de Newton qui consiste à remplacer $f'(x_{k+1})$ par $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k+1}}$ ou, autrement dit, on remplace la tangente par la sécante.

Initialisation : $a_0 = a$, $b_0 = b$

Tant que $|b_k - a_k| > \varepsilon$ (test d'arrêt) $\rightarrow$ faire $\downarrow$ (une boucle de calcul à refaire tant que la condition est vérifiée) :

Calculer $x_k = a_k - \frac{b_k-a_k}{f(b_k)-f(a-k)}f(a_k) = \frac{a_k f(b_k)-b_k f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}$ et :

Si $f(a_k)f(x_k) < 0$ Alors $a_{k+1} := a_k$ et $b_{k+1} := x_k$

Sinon $a_k := x_k$ et $b_{k+1} := b_k$

Si $|b_n - a_n| \leq \varepsilon \rightarrow$ Fin.
Conclusion : $x_n = a_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} f(a_n) = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$ est une valeur approchée de $\overline{x}$ avec une précision ε.
Les tests d'arrêt peuvent être différents d'une méthode à l'autre et suivant la précision cherchée, généralement, nous pouvons distinguer trois type de conditions d'arrêt :

1) Majoration de l'erreur absolue par une quantité qui ne dépends pas de la racine recherchée $\overline{x}$ ni de x_k, par exemple, dans les méthodes de Dichotomie et de la Lagrange on a :

$$|x_k - \overline{x}| \leq |b_k - a_k|$$

Il st suffisant de choisir $|b_k - a_k| \leq \varepsilon$ pour obtenir la précision recherchée
2) Test basé sur le résidu : $|f(x_k)| \leq \varepsilon$
3) Test basé sur l'incrément : $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$
Suivant la situation et les conditions initiales, chaque test peut être considéré comme satisfaisant ou trop restrictif.

Méthode de Newton : Cette méthode définit une suite récurrente $(x)_k$ qui converge (sous des conditions) vers la solution de l'équation.

Pour déterminer x_{k+1}, la méthode consiste à remplacer localement la courbe de la fonction par la tangente qui passe pas x_k et d'équation : $T_k : y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$

La valeur x_{k+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite T_k avec l'axe des abscisses (l'intersection n'existe que si $f'(x_k) \neq 0$), on a :

$$0 = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = x_{k+1} f'(x_k) - x_k f'(x_k) + f(x_k) \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

car $f'(x_k) \neq 0$.

L'algorithme pour une convergence à ε près ; x_0 donnée, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
Tant que $|x_{k+1} - x_k| > \varepsilon$ (ou tant que $|f(x_k)| > \varepsilon$) $\downarrow$ Faire (une boucle de calcul) :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Le dernier terme de la suite est une approximation de $\overline{x}$ à ε près.
Conditions suffisantes de convergence de la suite x_n vers la racine $\overline{x}$:

1) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$
2) $f(a)f(b) < 0$
3) $f'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$ (c'est à dire strictement positive ou strictement négative sur l'intervalle ouvert)
4) $f''(x) \neq 0$ sur $]a, b[$ (c'est à dire strictement positive ou strictement négative sur l'intervalle ouvert)
5) $f(x_0)f''(x) > 0$ sur $[a, b]$ ($f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ sur l'intervalle)

REMARQUE :
1) Si $f(x_0)f''(x) < 0$ on calcule x_1 et si $f(x_1)f''(x) > 0$ et $x_1 \in [a, b]$ nous avons aussi la convergence.

——————————-

On veut calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ dans l'intervalle $[1; 2]$.
Localisation de la racine : On a : $f(1) = -1$ et $f(2) = 2$ donc : $f(1)f(2) < 0$ et on déduit, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que $f(x) = 0$ admet **au moins une solution**. En plus, nous avons $f'(x) = 2x > 0$ sur $[1, 2[$ donc la fonction est strictement croissante et elle admet **une solution unique** dans $[1, 2]$ cette solution (positive) est donnée par : $x = \sqrt{2}$.
Algorithmes :
Dichotomie :
$a_0 = 1$, $b = 2$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$
Tant que $|f(x_k)| > 10^{-3}$ faire :
Si $f(a_k)f(x_k) > 0$ alors $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ sinon $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$
$x_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$

Lagrange :
$a_0 = 1$, $b = 2$ et $x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$
Tant que $|f(x_k)| > 10^{-4}$ faire :
Si $f(a_k)f(x_k) > 0$ alors $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ sinon $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$
$x_{k+1} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$

Newton
Lorsque les conditions de convergence sont vérifiées :
$x_0 = 2$ (ou toute valeur te que $f(x_0)$ positive comme $f''(x)$).
Tant que $|f(x)| > 10^{-3}$ faire :
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de dichotomie dans l'intervalle $[1; 2]$.

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	$f(x_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	1	1.5	2	-	0.25	+	+
1	1	1.25	1.5	-	-0.4375	-	+
2	1.25	1.375	1.5	-	-0.1093	-	+
3	1.375	1.4375	1.5	-	0.0664	+	+
4	1.375	1.40625	1.4375				

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de Lagrange dans l'intervalle $[1; 2]$.
(Les résultats sont présentés avec plusieurs chiffres après la virgule pour permettre les comparaisons, nous pouvons présenter les valeurs tronquées à un certain nombre de chiffres après la virgule).

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	1	1.333333333	2	-1	-0,222222222222222	2
1	1.333333333	1.4	2	-0,222222222222222	-0,0400000000000003	2
2	1.4	1.411764706	2	-0,0400000000000003	-0,00692041522491316	2
3	1.411764706	1.413793103	2	-0,00692041522491316	-0,00118906064209301	2
4	1.413793103	1,41414141414141	2	-0,00118906064209301	-0,000204060810122142	2

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de Newton dans l'intervalle $[1;2]$.

$$x_0 = 2 \quad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$$

k	x_k
0	2
1	1,5
2	1,41666666666667
3	1,41421568627451
4	1,41421356237469

(Les résultats sont présentés avec plusieurs chiffres après la virgule pour permettre les comparaisons, nous pouvons présenter les valeurs tronquées à un certain nombre de chiffres après la virgule).

Les valeurs obtenues avec les trois méthodes sont, respectivement : 1.41375, 1,41414141414141 et 1,41421356237469

Nous pouvons évaluer, avec une calculatrice, l'erreur en calculant $|x_4 - \sqrt{2}|$

$|1.41375 - \sqrt{2}| = 0.0004$

$|1,41414141414141 - \sqrt{2}| = 0.0007$

$|1,41421356237469 - \sqrt{2}| = 0.0000000004$

On en déduit que la meilleure précision est donnée par la méthode de Newton. Cette remarque est toute à fait normale car la méthode de Newton est d'ordre 2 alors que les autres sont des méthodes d'ordre 1.

Exercice 2 :

Soit $f : [1;2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante telle que $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$.

Les conditions de l'application du théorème des valeurs intermédiaires sont vérifiées, nous pouvons en déduire qu'il existe une seule racine ($\overline{x} = 1.6555$) dans l'intervalle $[1;2]$.

1. Méthode de la dichotomie dans l'intervalle $[1;2]$

   On applique successivement les étapes de la méthode de Dichotomie en remarquons que $f(x) < 0$ sur $[1, 1.6555[$ et $f(x) > 0$ sur $]1.6555, 2]$.

   $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $x_0 = 1.5$, $f(x_0) < 0$, $f(a_0)f(x_0) > 0$, donc $a_1 = x_0 = 1,5$ et $b_1 = b_0 = 2$ et ainsi de suite :

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	1	1,5	2	-	-	+
1	1,5	1,75	2	-	+	+
2	1,5	1,625	1,75	-	-	+
3	1,625	1,6875	1,75	-	+	+
4	1,625	1,65625	1,6875	-	+	+

2. Combien d'itérations faut-il effectuer pour approcher le zéro de f à 2^{-10} près ? à 2^{-5} près ?

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-10} \Rightarrow -n\ln(2) \leq -10\ln(10) \Rightarrow n \geq 10\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 33,2 \Rightarrow n = 34$$

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-5} \Rightarrow -n\ln(2) \leq -5\ln(10) \Rightarrow n \geq 5\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 16,6 \Rightarrow n = 17$$

Exercice 3 : 1. Donner la suite définissant la méthode de Newton pour la recherche d'un zéro de fonction. Justifier l'expression de la suite : On a :

$$\begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} & \end{cases}$$

Pour déterminer x_{k+1}, la méthode consiste à remplacer localement la courbe de la fonction par la tangente qui passe pas x_k et d'équation : $T_k : y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$

La valeur x_{k+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite T_k avec l'axe des abscisses (l'intersection n'existe que si $f'(x_k) \neq 0$), on a :

$$0 = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = x_{k+1}f'(x_k) - x_k f'(x_k) + f(x_k) \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

car $f'(x_k) \neq 0$.

2. Écrire l'algorithme pour une convergence à 10^{-6} près ; x_0 donnée, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
Tant que $|x_{k+1} - x_k| > 10^{-6}$ (ou tant que $|f(x_k)| > 10^{-6}$) $\downarrow$ Faire (une boucle de calcul) :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Le dernier terme de la suite est une approximation de $\overline{x}$ à 10^{-6} près.
Conditions suffisantes de convergence de la suite x_n vers la racine $\overline{x}$:

1) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$
2) $f(a)f(b) < 0$
3) $f'(x) \neq 0$ sur $[a, b]$
4) $f''(x) \neq 0$ sur $[a, b]$
5) $f(x_0)f''(x) > 0$ sur $[a, b]$ ($f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ sur l'intervalle)

REMARQUES :
1) Si $f(x_0)f''(x) < 0$ on calcule x_1 et si $f(x_1)f''(x) > 0$ et $x_1 \in [a, b]$ nous avons aussi la convergence.

2. Déterminer l'ordre de convergence minimale de cette suite : Si la racine $\overline{x}$ est telle que $f'(\overline{x}) \neq 0$ et si la suite $x_n \to \overline{x}$ est la convergence est au moins quadratique ($p = 2$). En effet :

$$x_{n+1} - \overline{x} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \overline{x}$$

Ou encore (en rappelant que $f(\overline{x}) = 0$) :

$$(1) \qquad x_{n+1} - \overline{x} = \frac{(x_n - \overline{x})f'(x_n) - f(x_n) + f(\overline{x})}{f'(x_n)}$$

D'autre part, par application de la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 2, il existe ξ_n comprise entre x_n et $\overline{x}$ tel que :

$$f(\overline{x}) = f(x_n) + (\overline{x} - x_n)f'(x_n) + \frac{(\overline{x} - x_n)^2 f''(\xi_n)}{2} \Rightarrow f(\overline{x}) - f(x_n) = (\overline{x} - x_n)f'(x_n) + \frac{(\overline{x} - x_n)^2 f''(\xi_n)}{2}$$

En replaçant dans (1), on obtient :

$$x_{n+1} - \overline{x} = \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \frac{(\overline{x} - x_n)^2}{2} \Rightarrow e_{n+1} = \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2$$

On en déduit (on peut supposer que $f'(\overline{x}) > 0$) :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|f''(\overline{x})|}{2|f'(\overline{x})|} > 0 \qquad \text{finie}$$

En effet, on a :
$x_n \to \overline{x}$
ξ_n est comprise entre x_n et $\overline{x} \Rightarrow \xi_n \to \overline{x}$
f' et f'' sont continues (f de classe $\mathcal{C}^2$) alors : $f''(\xi_n) \to f''(\overline{x})$ et $f'(x_n) \to f'(\overline{x})$.

4. Application :1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ sur $[-0,5; 0,7]$ et $x_0 = 0,4$ puis $x_0 = 0,5$

f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$. D'autre part, on a : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, étudiant le signe de $f'(x)$:

$$\Delta = 36 - 24 = 12 \qquad a = \frac{6 - \sqrt{12}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0,42 \qquad b = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 1,58$$

Donc :

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & x \in]-\infty, a[\cup]b; +\infty[; \\ f'(x) < 0, & x \in]a; b[. \end{cases}$$

et on a : $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$ Étude de signe de $f''(x)$:

$$\begin{cases} f''(x) > 0, & x > 1; \\ f''(x) < 0, & x < 1. \end{cases}$$

Etude sur l'intervalle $[-1; 0,4]$:
Localisation de la racine : f continue et strictement croissante sur $[-1; 0,4]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans cet intervalle.
Utilisation de la méthode de Newton :
Pour $x_0 = -0,3$ on a $f(-0,3) \simeq -0,8970 < 0$, $f''(x) < 0$ et $f'(x) > 0$ sur l'intervalle et comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, on déduit que les conditions suffisantes de convergence sont vérifiées et la suite (x_n) définie par la méthode de Newton converge vers la solution $\overline{x}$ et permet le calcul d'une valeur approchée de la solution en utilisant soit le test basé sur le résidu soit le test basé sur l'incrément. Le schéma numérique peut être écrite :

$$\begin{cases} x_0 & \text{valeur initiale bien choisie} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k^2 + 2x_k}{3x_k^2 - 6x_k + 2} = \frac{2x_k^3 - 3x_k^2}{3x_k^2 - 6x_k + 2} & \end{cases}$$

Un exemple des calculs est donné dans le tableau suivant :

k	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}	|f(x_k)|	|x_{n+1}-x_n|
0	-0,3	-0,8970	4,0700	-0,0796	0,8970	
1	-0,0796	-0,1787	2,4967	-0,0080	0,1787	0,2204
2	-0,0080	-0,0162	2,0483	-0,0001	0,0162	0,0716
3	-0,0001	-0,0002	2,0006	0,0000	0,0002	0,0079
4	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	0,0001
5	0,0000	0,0000	2	0	0,0000	0,0000

Pour $x_0 = 0,3$ on a $f(0,3) \simeq 0,3570 > 0$ de signe contraire à celui de $f''(x)$ sur l'intervalle, on en déduit que trois conditions suffisantes de convergence sont vérifiées mais la quatrième n'est pas vérifiée ($f(x_0)f''(x) > 0$ sur l'intervalle). Dans ce cas, nous pouvons calculer x_1 et si sa valeur vérifiée la condition on la considère comme valeur initiale pour obtenir la convergence !
On a :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \simeq -0,4596 \qquad \text{et } f(x_1) \simeq -1,6498 < 0$$

On déduit que le schéma de Newton converge dans ce cas aussi. Les calculs des premières itérations sont dans le tableau suivant :

k	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}	|f(x_k)|	|x_{n+1}-x_n|
0	0,3	0,3570	0,4700	-0,4596	0,3570	
1	-0,4596	-1,6498	5,3911	-0,1535	1,6498	0,7596
2	-0,1535	-0,3814	2,9920	-0,0261	0,3814	0,3060
3	-0,0261	-0,0542	2,1584	-0,0010	0,0542	0,1275
4	-0,0010	-0,0019	2,0058	0,0000	0,0019	0,0251
5	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	0,0010

Etude sur l'intervalle $[0,45; 1,2]$:

L'application de la méthode de Newton avec les trois valeurs initiales donne la situation suivante :

Malgré que les valeurs prises par x_0 sont très proches (0,5 puis 0,54 et 0,555), on constate que les suites définies par la méthode de Newton semblent converger vers des valeurs différentes (2 puis 0 et 1). Cet exemple montre l'instabilité de la méthode de Newton dans certains cas et la nécessité de vérifier les conditions de convergence avant de pouvoir l'utiliser. Ici, les conditions ne sont pas vérifiées car f'' change de signe dans l'intervalle

k	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}	|f(x_k)|	|x_{n+1}-x_n|
0	0,5	0,3750	-0,2500	2,0000	0,3750	
1	2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000	1,5000
2	2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
3	2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
4	2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
5	2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000

k	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}	|f(x_k)|	|x_{n+1}-x_n|
0	0,54	0,3627	-0,3652	1,5331	0,3627	
1	1,5331	-0,3816	-0,1476	-1,0530	0,3816	0,9931
2	-1,0530	-6,6004	11,6448	-0,4862	6,6004	2,5861
3	-0,4862	-1,7966	5,6266	-0,1669	1,7966	0,5668
4	-0,1669	-0,4221	3,0851	-0,0301	0,4221	0,3193
5	-0,0301	-0,0630	2,1834	-0,0013	0,0630	0,1368
6	-0,0013	-0,0025	2,0076	0,0000	0,0025	0,0288
7	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	0,0013
8	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	0,0000

k	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}	|f(x_k)|	|x_{n+1}-x_n|
0	0,555	0,3569	-0,4059	1,4342	0,35688	
1	1,4342	-0,3523	-0,4345	0,6232	0,35233	0,8792
2	0,6232	0,3233	-0,5742	1,1863	0,32327	0,8109
3	1,1863	-0,1798	-0,8959	0,9856	0,17981	0,5630
4	0,9856	0,0144	-0,9994	1,0000	0,01443	0,2007
5	1,0000	0,0000	-1,0000	1,0000	0,00001	0,0144
6	1,0000	0,0000	-1,0000	1,0000	0,00000	0,0000

et admet un point d'inflection au point d'abscisse 1. Notons que nous pouvons résoudre directement l'équation $f(x) = 0$ et elle admet trois racines 0, 1 et 2. En effet :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = 2$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. On s'interesse à l'étude des racines de l'équation $f(x) = 0$. (Les valeurs approchées sont à présenter par défaut avec trois chiffres après la virgule).

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$.

- Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$.

- On souhaite maintenant utiliser la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n. Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix. x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2.

- On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\overline{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ et calculer, en suite, les valeurs suivantes $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$.

- Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\overline{x}_3$ comme valeur approchée de r ?

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$;

f est un polynôme continu, $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$ alors $f(0).f(1) < 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine dans $[0, 1]$.

D'autre part, $f'(x) = 4x(x^2 + 1) > 0$ sur $]0, 1[$ donc f est strictement croissante et l'équation admet une et une seule solution $r \in [0, 1]$.

Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$;
$r \in [0, 1]$ $x_0 = \frac{0+1}{2} = 0,5$ et $f(x_0) = f(0,5) = -0,44$ on a $f(0).f(0,5) > 0$ donc $r \in]0,5; 1[$
$r \in]0,5; 1[$ $x_1 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$, $f(0,75) = 0.44$ on a $f(0,5).f(0,75) < 0$ donc $r \in]0,5; 0,75[$.

On souhaite maintenant affiner l'approximation en utilisant la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n. Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix ;
On a $f(x) = 4x(x^2 + 1) > 0$ sur $]0.5, 0.75[$, $f''(x) = 12x^2 + 4 > 0$ sur $]0.5, 0.75[$ et $f(0,5) = -0,44 < 0$ alors que $f(0,75) = 0.44 > 0$ pour que la méthode converge il faut choisir x_0 tel que $f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ donc : $x_0 = 0,75$.
x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2 ;

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^4 + 2x_k^2 - 1}{4x_k^3 + 4x_k} = \frac{4x_k^4 + 4x_k^2 - (x_k^4 + 2x_k^2 - 1)}{4x_k^3 + 4x_k} = \frac{3x_k^4 + 2x_k^2 + 1}{4x_k^3 + 4x_k}$$

$$x_1 = \frac{3x_0^4 + 2x_0^2 + 1}{4x_0^3 + 4x_0} \simeq 0,655$$

$$x_2 = \frac{3x_1^4 + 2x_1^2 + 1}{4x_1^3 + 4x_1} \simeq 0,643$$

On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\overline{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ et calculer, en suite, les deux valeurs suivantes $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$;
D'après la question 2) on a : $r \in]0.5, 0.75[$ on peut choisir $\overline{x}_0 = 0,5$ et $\overline{x}_1 = 0,75$ nous avons $f(0.5) \simeq -0.437$ et $f(0.75) \simeq 0.441$.

On a :

$$\overline{x}_{k+1} = \overline{x}_k - \frac{\overline{x}_k - \overline{x}_{k-1}}{f(\overline{x}_k) - f(\overline{x}_{k-1})} f(\overline{x}_k) = \frac{\overline{x}_{k-1} f(\overline{x}_k) - \overline{x}_k f(\overline{x}_{k-1})}{f(\overline{x}_k) - f(\overline{x}_{k-1})}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{\overline{x}_0 f(\overline{x}_1) - \overline{x}_1 f(\overline{x}_0)}{f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)} \simeq 0,624 \quad \text{et} \quad f(\overline{x}_2) \simeq -0.069$$

$$\overline{x}_3 = \frac{\overline{x}_1 f(\overline{x}_2) - \overline{x}_2 f(\overline{x}_1)}{f(\overline{x}_2) - f(\overline{x}_1)} \simeq 0,641$$

Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\overline{x}_3$ comme valeur approchée de r ?
On a :

$$|\overline{x}_3 - \overline{x}_2| \simeq |0,641 - 0,624| = 0,017$$

Donc la précision est à 10^{-2} près.

Exercice 5 :

A titre de rappel, la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[a; b]$ définie la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} x_0 & \text{bien choisie} \\ x_{n+1} == g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

On suppose que cette suite admet une limite sur $[a;b]$ notée ℓ. Montrer que si f est 3 fois derivable sur $[a;b]$ et que $f'(\ell) \neq 0$ alors la méthode de Newton est d'ordre 2 au moins.

Si la racine l est telle que $f'(l) \neq 0$ et si la suite $x_n \to l$ est la convergence est au moins quadratique ($p = 2$). En effet :

$$x_{n+1} - l = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - l$$

Ou encore (en rappelant que $f(l) = 0$) :

$$(1) \qquad x_{n+1} - l = \frac{(x_n - l)f'(x_n) - f(x_n) + f(l)}{f'(x_n)}$$

D'autre part, par application de la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 2, il existe ξ_n compris entre x_n et l tel que :

$$f(l) = f(x_n) + (l - x_n)f'(x_n) + \frac{(l - x_n)^2 f''(\xi_n)}{2}$$
$$\Rightarrow f(l) - f(x_n) = (l - x_n)f'(x_n) + \frac{(l - x_n)^2 f''(\xi_n)}{2}$$

En replaçant dans (1), on obtient :

$$x_{n+1} - l = \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \frac{(l - x_n)^2}{2} \Rightarrow e_{n+1} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} e_n^2$$

On en déduit (on peut supposer que $f'(\overline{x}) > 0$) :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|f''(l)|}{2|f'(l)|} > 0 \qquad \text{finie}$$

En effet, on a :

$x_n \to l$
ξ_n est comprise entre x_n et $l \Rightarrow \xi_n \to l$

f' et f'' sont continues (f de classe $\mathcal{C}^2$) alors : $f''(\xi_n) \to f''(l)$ et $f'(x_n) \to f'(l)$.
Donc, la méthode de Newton est d'ordre 2 (quadratique) au moins.

Exercice 6 :

On considère l'équation (E) donnée par : $(E) \qquad x^3 + 10x = 20 - 2x^2$.
- Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser.
- Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1,2]$.
- Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0, x_1 et x_2) de la solution de (E). En déduire une estimation de l'erreur commise en considérant x_3.
- On considère le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2 + 2x_n + 10} & n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$

- Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E).

- Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x\in[1,2]} |\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}| \leq \frac{40}{132}$).

- Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3.

Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser ;
On a :

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + 10x = 20 - 2x^2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ avec } f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$;
Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires, f est continue sur $\mathbb{R}$ (Polynôme) et on a :

$$f(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 + 10 \times 1 - 20 = -7 \text{ et } f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 + 10 \times 2 - 20 = 16$$

Donc, l'équation $f(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$. D'autre part :

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 > 0 \text{ car } \Delta = 16 - 120 = -104 < 0$$

On en déduit que f est croissante sur l'intervalle $[1, 2]$ et par conséquent, l'équation $f(x)$ admet au seule solution $\overline{x}$ dans cet intervalle.

Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0, x_1 et x_2) de la solution de (E). En déduire l'erreur commise en considérant x_3 (comme solution approchée) ;
$f(x)$ admet au seule solution dans l'intervalle $[1, 2]$:
On a :

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1,5 \text{ et } f(1,5) = 2,875 \text{ avec } f(1) \times f(1,5) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1; 1,5]$$

et :

$$x_1 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25 \text{ et } f(1,25) = -2,422 \text{ avec } f(1,25) \times f(1,5) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1,25; 1,5]$$

ensuite :

$$x_2 = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375 \text{ et } f(1,375) = 0,130 \text{ avec } f(1,25) \times f(1,375) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1,25; 1,375]$$

La valeur exacte $\overline{x}$ et valeur approchée x_3 sont dans l'intervalle $[1,25; 1,375]$ donc

$$|\overline{x} - x_3| \leq 1,375 - 1,25 = 0,125$$

On peut aussi utiliser la formule du cours $|x_n - \overline{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow |\overline{x} - x_3| \leq \frac{2-1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$

On considère le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2+2x_n+10} & n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$

Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E) ;

La méthode s'écrit :

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \text{ avec } g(x) = \frac{20}{x^2+2x+10} & n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$

Il s'agit d'une méthode de point fixe de fonction g et on a (remarquons que $x^2 + 2x + 10 > 0$) :

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{20}{x^2 + 2x + 10} = x \Leftrightarrow 20 = x^3 + 2x^2 + 10x \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (E)$$

Autre méthode :

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 10) = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{x^2 + 2x + 10} = g(x)$$

b. Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x\in[1,2]} |\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}| \leq \frac{40}{132}$) ;

On a :

$$g(x) = \frac{20}{x^2 + 2x + 10} \Rightarrow g'(x) = -20\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 10)^2} = \frac{-40(x + 1)}{(x^2 + 2x + 10)^2} < 0 \text{ pour } x \in [1, 2]$$

g est décroissante et on a :

$$g(1) = \frac{20}{13} = 1,538 \text{ et } g(2) = \frac{20}{18} = 1,111$$

On en déduit que

$$g([1, 2]) \subset [1, 2]$$

D'autre part, d'après le théorème de Accroissements finis (la fonction g est continue derivable), on a :

$$\text{pour tous } x, y \in [1, 2], \text{ il existe } c \in]1, 2[\text{ tel que } |g(x) - g(y)| = |g'(c)||x - y| \leq \sup_{x\in[1,2]} |g'(x)||x - y| \leq \frac{40}{132}|x - y|$$

On en déduit que g est contractante.

On conclusion, g vérifie les conditions de convergence et par conséquent la méthode de point fixe converge vers la solution de (E).

Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3 ;

On a :

$$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = g(1) = \frac{20}{13} = 1,538$$

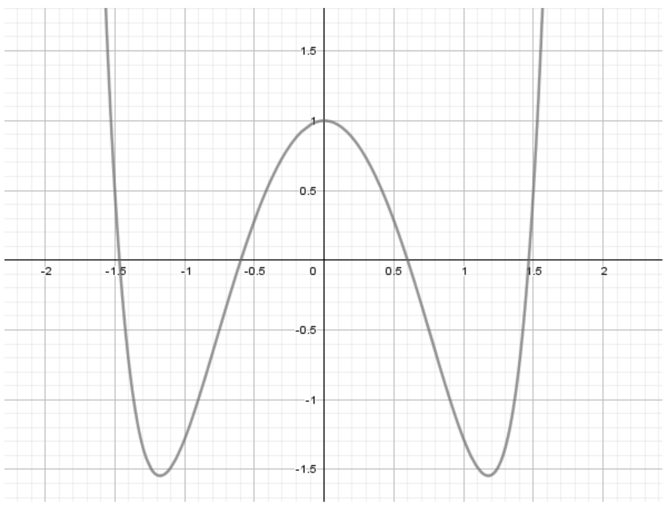
$$x_1 = \frac{20}{13} = 1,538 \Rightarrow x_2 = g(x_1) = \frac{20}{(\frac{20}{13})^2 + 2\frac{20}{13} + 10} = \frac{338}{261} = 1,295 \text{ ou } x_2 = g(1,538) = 1,295$$

$$x_2 = \frac{338}{261} = 1,295 \Rightarrow x_3 = g(\frac{338}{261}) = \frac{20}{(\frac{338}{261})^2 + 2\frac{338}{261} + 10} = \frac{136242}{97189} \text{ ou } x_3 = g(1,295) = 1,401$$

Exercice 7 :

Soit (E) l'équation suivante : (E) $\qquad e^{x^2} - 4x^2 = 0$

1. Utiliser la représentation graphique, ci-jointe, de la fonction $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$ pour localiser les quatres racines de (E) dans quatre intervalles d'amplitude 1 chacun et qui contient une seule racine ;



La lecture graphique permet de localiser les racines (changement de la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses) dans les intervalles : $[-2,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ et $[1,2]$.

2. Montrer qu'il y a une seule racine $\overline{x}$ de (E) dans $[0;1]$; On a :
$f(0) = 1$ et $f(1) = e - 4 < 0$ donc $f(0)f(1) < 0$
f est continue (fonction exponentielle et polynôme sont continues) f est strictement croissante : $f'(x) = 2xe^{x^2} - 8x = 2x(e^{x^2} - 4) < 0$ car $0 < x < 1$ et la fonction exponentielle est croissante impliquent : $0 < x^2 < 1 \Rightarrow 1 < e^{x^2} < e < 4$.
On en déduit, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $[0;1]$

3. Transformer l'équation (E) en problèmes de recherche de points fixes, sous les formes suivantes :
$(PF1)$: $g_1(x) = x$ tel que g_1 est une fonction définie par une racine carrée et la fonction exceptionnelle,
$f(x) = 0 \Rightarrow e^{x^2} - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{e^{x^2}}{4} \Rightarrow x = \mp\frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2}$ et comme la racine recherchée est positive, nous choisissons :
$$x = \frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2} = g_1(x)$$
$(PF2)$: $g_2(x) = x$ tel que g_2 est une fonction définie par la fonction exponentielle et un polynôme de degré 2,
$f(x) = 0 \Rightarrow f(x) + x = x \Rightarrow e^{x^2} - 4x^2 + x = x \Rightarrow g_2(x) = e^{x^2} - 4x^2 + x = x$ $(PF3)$: $g_3(x) = x$ tel que g_3 une autre fonction à déterminer ;
$f(x) = 0 \Rightarrow e^{x^2} - 4x^2 = 0 \Rightarrow e^{x^2} = 4x^2 \Rightarrow x^2 = \ln(4x^2) \Rightarrow x = g_3(x) = \sqrt{\ln(4x^2)}$ pour $x > \frac{1}{2}$.

4. Écrire les schémas numériques pour calculer $\overline{x}$ en utilisant $(PF1)$ puis $(PF2)$. Exécuter les calculs des quatres

premières itérations de chacun des deux schémas ;

$$(PF1) \begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_{k+1} = g_1(x_k) = \frac{\sqrt{e^{x_k^2}}}{2} & \end{cases}$$

k	x_k	g(x_k)	|g(x_k)-x_k|	|x_{k+1}-x_k|
0	0,5	0,56657	0,06657	
1	0,56657	0,58705	0,02048	0,06657
2	0,58705	0,59403	0,00697	0,02048
3	0,59403	0,59648	0,00245	0,00697
4	0,59648	0,59735	0,00087	0,00245

$$(PF2) \begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_{k+1} = g_2(x_k) = e^{x_k^2} - 4x_k^2 + x_k & \end{cases}$$

k	x_k	g(x_k)	|g(x_k)-x_k|	|x_{k+1}-x_k|
0	0,5	0,78403	0,28403	
1	0,78403	0,17434	0,60969	0,28403
2	0,17434	1,08362	0,90929	0,60969
3	1,08362	-0,37765	1,46128	0,90929
4	-0,37765	0,20515	0,58281	1,46128

5. Étudier la convergence des deux schémas relatifs à $(PF1)$ et à $(PF2)$. Évaluer l'erreur commise lorsque le schéma converge ;

   Conditions suffisantes de convergence d'un schéma point fixe de fonction g définie sur $[a, b]$:
   - g est contractante ;
   - $g([a, b]) \subset [a, b]$

   On a $g_1(x) = \frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2}$ et

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^{x^2} \leq e \Rightarrow \frac{1}{2} \leq g_1(x) \leq \frac{\sqrt{e}}{2} \simeq 0,82$$

   Donc :

$$g_1([0, 1]) \subset [0, 1]$$

   Noter qu'il faut montrer que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$ et il ne suffit pas de montrer que $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$.

D'autre part : $g_1'(x) = \frac{xe^{x^2}}{2\sqrt{e^{x^2}}} = \frac{x\sqrt{e^{x^2}}}{2}$ et

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^{x^2} \leq e \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2} \leq \frac{\sqrt{e}}{2} \Rightarrow 0 \leq g_1'(x) \leq \frac{\sqrt{e}}{2} \simeq 0,82$$

On en déduit que :

$$|g_1'(c)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |g_1'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$$

En utilisant le théorème des accroissements finies pour x et y dans $[0,1]$, il existe $c \in]0,1[$ telle que :

$$|g_1(x) - g_a(y)| = |g_1'(c)||x-y| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}|x-y|$$

et g_1 est $\frac{\sqrt{e}}{2}-$ contractante.

On déduit que la méthode de point fixe converge vers la solution $\overline{x}$ de l'équation telle que $g_1(\overline{x}) = \overline{x}$

Concernant le méthode point fixe avec $g_2(x) = e^{x^2} - 4x^2 + x$ on a $g_2(0,3) \simeq 1,03 > 1$ (ou $g_2(1) = e - 3 < 0$) donc $g_2([0,1])$ n'est pas incluse dans $[0,1]$, les conditions suffisantes de convergence ne sont pas vérifiées et ne pouvons rien déduire dans ce cas.

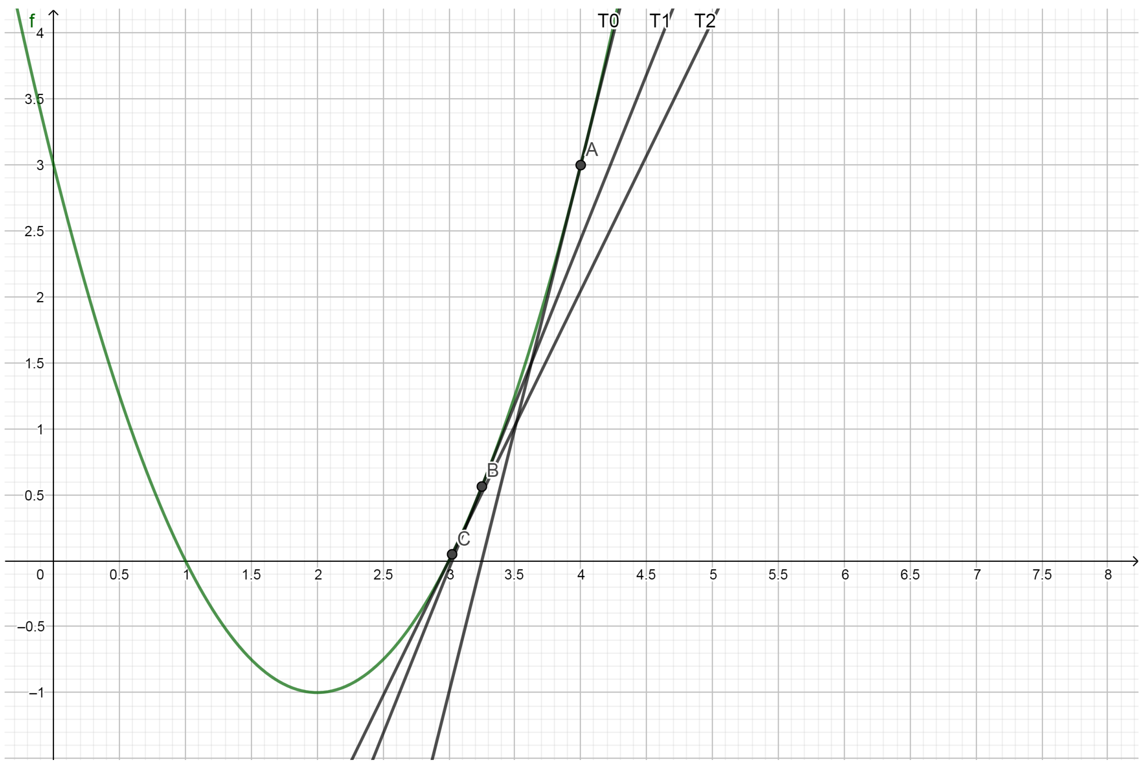
6. Écrire la méthode de Newton pour déterminer la racine $\overline{x}$ de (E). Quel est son ordre ? Quel est le meilleur choix parmi les deux méthodes ? Justifier la réponse.
Utilisant la méthode de Newton pour trouver une solution approchée de l'equation $f(x) = e^{x^2} - 4x^2 = 0$ dans l'intervalle $[0,1]$ (une seule racine telle que localiser dans une question précédente). La méthode de Newton définie une suite $(x_n)_n$ telle que :

$$\begin{cases} x_0 & \text{bien choisie} \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k^2} - 4x_k^2}{2x_k e^{x_k^2} - 8x_k} = x_k - \frac{e^{x_k^2} - 4x_k^2}{2x_k(e^{x_k^2} - 4)} & \end{cases}$$

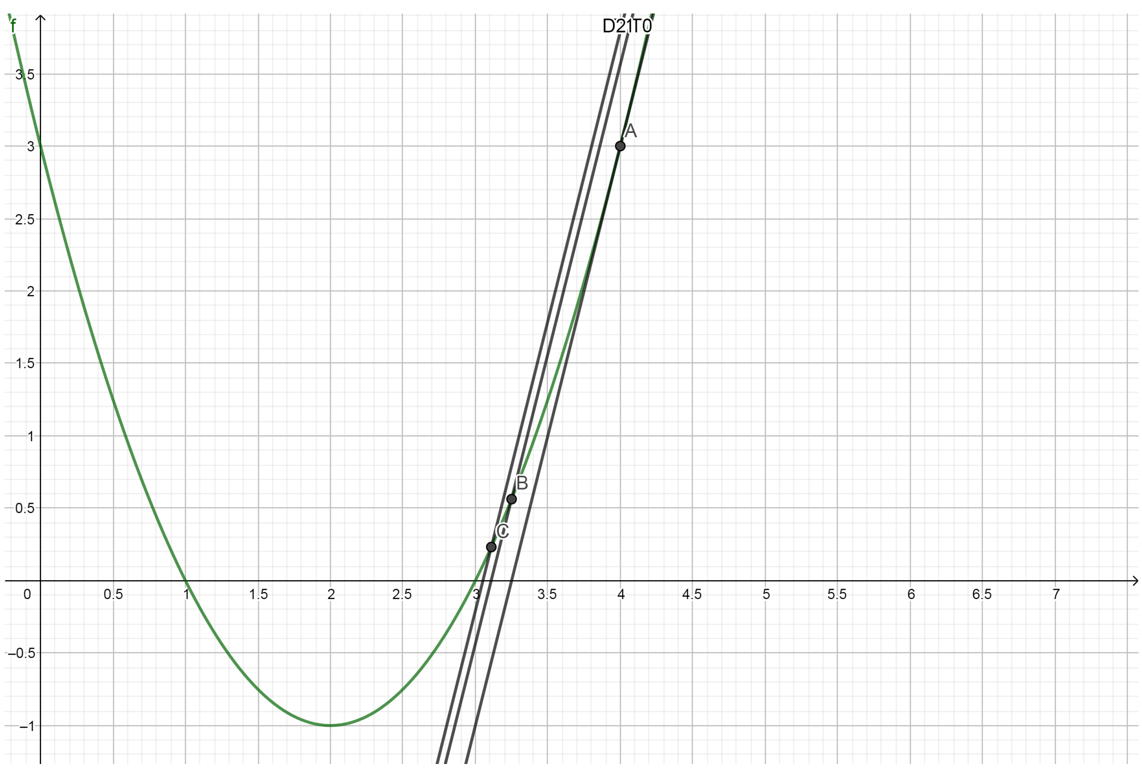
On a $f'(x) = 2x(e^{x^2} - 4) < 0$ sur $]0,1]$ donc la méthode de Newton est d'ordre deux tandis que la méthode de point fixe est d'ordre un. La méthode de Newton, lorsqu'elle vérifiée les conditions de convergence, est le meilleur choix pour cet exemple.

Exercice 8 :

Exemple de la construction de la méthode de Newton classique : T_0, T_1 et T_2 sont respectivement les tangentes à la courbe de f aux points x_0, x_1 et x_2.



Présentation de premiers termes avec la méthode de Newton modifiée : en utilisant la tangente $T0$ puis les droites $D1$ et $D2$ parallèles à la première tangente $T0$ (au lieu des tangentes $T1$ et $T2$) aux points x_0, x_1 et x_2.



x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite parallèle à $T0$ et qui passe par le point $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des abscisses (OX). On a :

$D_n : y = f'(x_0)x + p$ et $(x_n, f(x_n)) \in D_n$ donc : $p = f(x_n) - f'(x_0)x_n$ et on en déduit :

$$D_n : y = f'(x_0)x + f(x_n) - f'(x_0)x_n$$

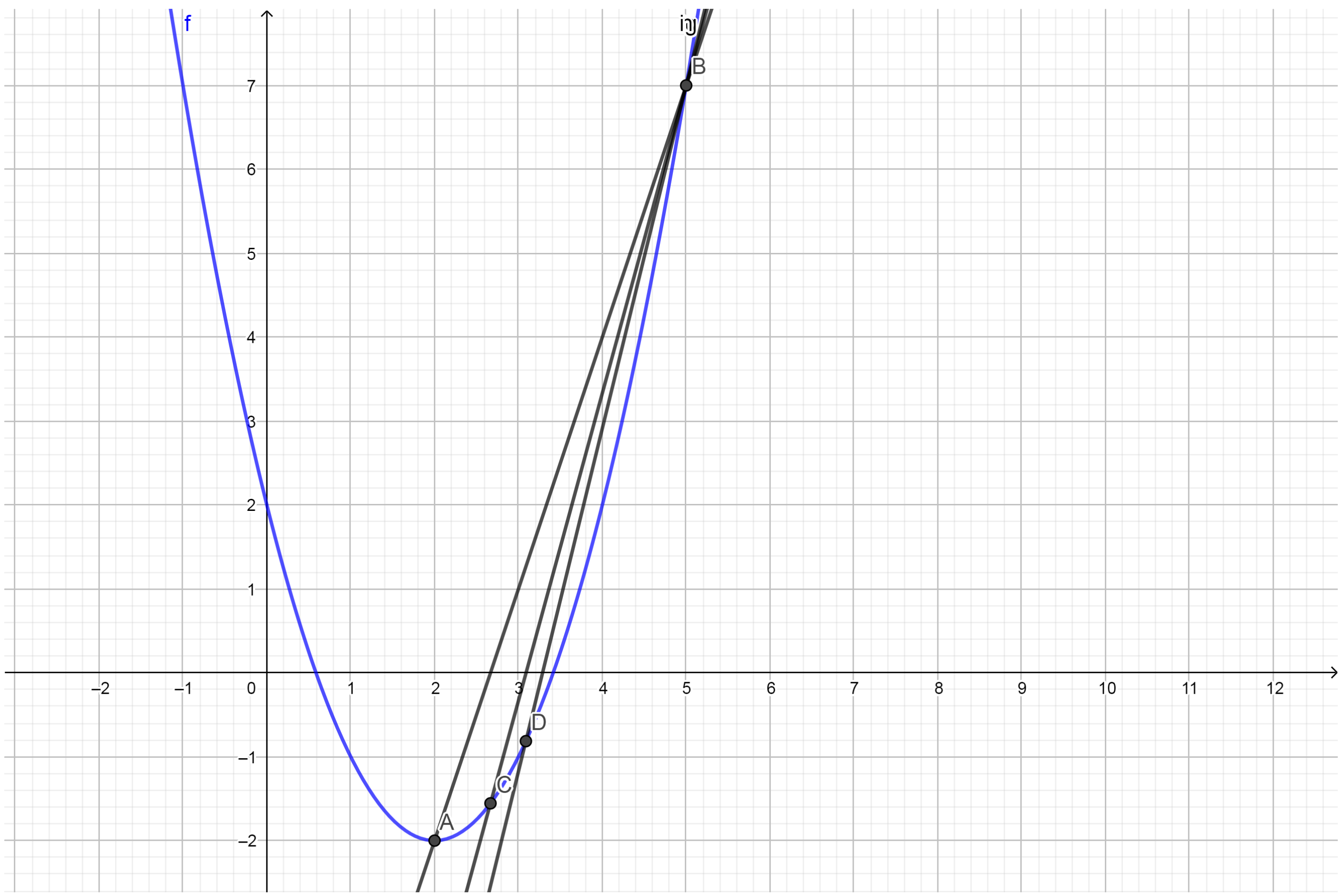
Par conséquent :

$$(x_{n+1}, 0) \in D_n \Longrightarrow f'(x_0)x_{n+1} = -f(x_n) + f'(x_0)x_n$$

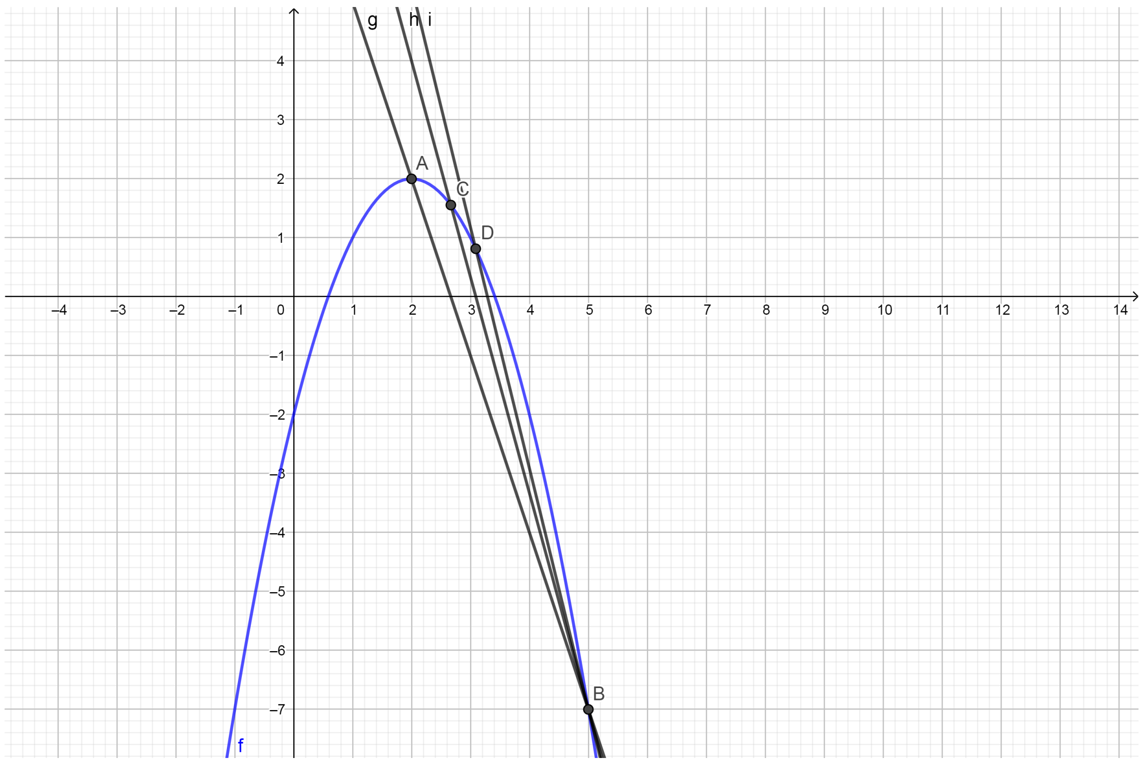
Soit :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Exemple de construction d'une fonction croissante convexe sur l'intervalle $[2, 5]$:



Exemple de construction d'une fonction décroissante concave sur l'intervalle $[2, 5]$:



Equation de la droite D_k qui passe par $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ a pour équation :

$$D_n : y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k+1}}(x - f(x_k))$$

et par conséquent :

$$0 = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k+1}}(x_{k+1} - f(x_k))$$

Soit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

Remarquons que cette méthode est une variante de la méthode de Newton, la dérivée $f'(x_k)$ est remplacée par le taux de variation : $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k+1}}$

L'algorithme de cette méthode s'écrit :

x_0 donnée

Tant que $|f(x_k)| > \varepsilon$ faire :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

Concernant la 2ème variante, il faut d'abord déterminer k' puis utiliser la même méthode en remplaçant x_k par $x_{k'}$

L'algorithme s'écrit (avec test sur la précision) :

x_0 donnée

Tant que $|f(x_k)| > \varepsilon$ faire :

$i = 1$
Tant que $f(x_k)f(x_{k-i}) > 0$ faire $i = i + 1$
$k' = k - i$ (cette boucle détermine k' en commençant par $k - 1$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k'}}{f(x_k) - f(x_{k'})} f(x_k)$$

Exercice 9 :

- Écrire les nombres suivants dans les bases 2, 8, 10 et 16 : $(7F)_{16}$ - $(11000001)_2$ - $(1000001)_2$ - $(13)_{10}$ - $(755)_8$ - $(1100000011011110)_2$ - Écrire $(90)_{10}$ et $(97)_{10}$ en base 2. Effectuer, en opération binaire, la somme et le produit des deux nombres puis procéder à la vérification des résultats obtenus. -

base 2	base 8	base 10	base 16
1111111	177	127	7F
11000001	301	193	C1
1000001	101	65	41
1101	15	13	0D
111101101	755	493	13D
1100000011011110	140336	49374	C0DE

$$90 = 2 \times 45 + 0 \qquad 97 = 2 \times 48 + 1$$
$$45 = 2 \times 22 + 1 \qquad 48 = 2 \times 24 + 0$$
$$22 = 2 \times 11 + 0 \qquad 24 = 2 \times 12 + 0$$
$$11 = 2 \times 5 + 1 \qquad 12 = 2 \times 6 + 0$$
$$5 = 2 \times 2 + 1 \qquad 6 = 2 \times 3 + 0$$
$$2 = 2 \times 1 + 0 \qquad 3 = 2 \times 1 + 1$$
$$1 = 2 \times 0 + 1 \qquad 1 = 2 \times 0 + 1$$

Donc :

$$90 = \overline{1011010}^2 \qquad \text{et} \qquad 97 = \overline{1100001}^2$$

On a :

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ + & & & & & & & \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ = & & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Vérification : $90 + 97 = 187$

$$187 = 93 \times 2 + 1$$
$$93 = 46 \times 2 + 1$$
$$46 = 23 \times 2 + 0$$
$$23 = 11 \times 2 + 1$$

$$11 = 5 \times 2 + 1$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

$$1 = 0 \times 2 + 1$$

Donc : $90 + 97 = 187 = \overline{10111011}^2$ qui est exactement l'écriture trouvée auparavant. Nous pouvons aussi, vérifier en calculant la valeur de l'écriture binaire trouver auparavant.

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

SÉRIE N^0 2 2022 - 2023

Exercice 1 :

- Construire le polynôme d'interpolation P_2 basé sur le système de trois points : $(0,2)$, $(1,1)$ et $(2,2)$, en utilisant successivement les trois méthodes (directe, Lagrange, Newton).

Méthode directe : $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ et donc :

$$\begin{cases} P_2(0) = 2 \\ P_2(1) = 1 \\ P_2(2) = 2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 2, \\ a+b+c = 1 \\ 4a+2b+c = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 2, \\ a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Soit :

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c = x^2 - 2x + 2$$

Les polynômes de base de Lagrange sont donnés par :

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(2-1)} = 2x - x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

et :

$$P_2(x) = 2L_0(x) + L_1(x) + 2L_2(x) = 2\frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) + 2x - x^2 + 2\frac{1}{2}(x^2 - x) = x^2 - 2x + 2$$

Méthode de Newton : Calculons d'abord les différences divisées :

0	2			
1	1	$\frac{1-2}{1-0} = -1$		
2	2	$\frac{2-1}{2-1} = 1$	$\frac{1-(-1)}{2-0} = 1$	

et :

$$P_2(x) = 2 \times 1 + (-1) \times (x-0) + 1 \times (x-0)(x-1) = 2 - x + x^2 - x + 1 = x^2 - 2x + 2$$

- Déterminer le polynôme d'interpolation P_3 basé sur le système de points : $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$.

Le meilleur choix et d'appliquer la méthode de Newton, en complétant le tableau précédent avec le point (3.3). Méthode de Newton : Calculons d'abord les différences divisées :

0	2			
1	1	$\frac{1-2}{1-0} = -1$		
2	2	$\frac{2-1}{2-1} = 1$	$\frac{1-(-1)}{2-0} = 1$	
3	3	$\frac{3-2}{3-2} = 1$	$\frac{1-1}{3-1} = 0$	$\frac{0-1}{3-0} = \frac{-1}{3}$

$$P_3(x) = 2 - (x - x_0) + 1(x - x_0)(x - x_1) - \frac{1}{3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = 2 - x + x(x - 1) - \frac{1}{3}x(x - 1)(x - 2)$$

$$P_3(x) = \frac{-1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{-8}{3}x + 2$$

Méthode directe : Le polynôme P_3 s'écrit :

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

On a :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow d = 2 \\ f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1 \\ f(2) = 2 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 2 \\ f(3) = 3 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a + b + c = -1 \\ 8a + 4b + 2c = 0 \\ 27a + 9b + 3c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 & \\ a + b + c = -1 & \\ 6a + 2b = 2 & \text{E3-2E2} \\ 24a + 6b = 4 & \text{E3-3E2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d = 2 \\ a + b + c = -1 \\ 6a + 2b = 2 \\ 24a + 6b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 & \\ a + b + c = -1 & \\ 6a + 2b = 2 & \\ 6a = -2 & \text{E4-3E3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = \frac{-8}{3} \\ b = 2 \\ a = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

Donc :

$$P_3(x) = \frac{-1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{-8}{3}x + 2$$

Méthode de Lagrange : Calculons d'abord les polynômes caractéristiques de Lagrange :

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{(0 - 1)(0 - 2)(0 - 3)} = \frac{-1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 3)}{(1 - 0)(1 - 2)(1 - 3)} = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 3)}{(2 - 0)(2 - 1)(2 - 3)} = \frac{-1}{2}(x^3 - 4x^2 + 3x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(3 - 0)(3 - 1)(3 - 2)} = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

D'où :

$$P_3(x) = 2L_0(x) + 1L_1(x) + 2L_2(x) + 3L_3(x)$$

$$P_3(x) = \frac{-1}{3}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) + \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x) - (x^3 - 4x^2 + 3x) + \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 2x) = \frac{-1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{-8}{3}x + 2$$

Exercice 2 :

Déterminons es polynômes caractéristiques de Lagrange et formulons le polynôme d'interpolation $P_3(x)$:

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} = \frac{(x^2-5x+6)(x-5)}{-30} = \frac{-1}{30}\left(x^3-10x^2+31x-30\right)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} = \frac{x(x^2-8x+15)}{6} = \frac{1}{6}\left(x^3-8x^2+15x\right)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} = \frac{x(x^2-7x+10)}{-6} = \frac{-1}{6}\left(x^3-7x^2+10x\right)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)} = \frac{x(x^2-5x+6)}{30} = \frac{1}{30}\left(x^3-5x^2+6x\right)$$

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{i=3} f(x_i)L_i(x)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{30}\left(x^3-10x^2+31x-30\right) + \frac{2}{6}\left(x^3-8x^2+15x\right) + \frac{-9}{6}\left(x^3-7x^2+10x\right) + \frac{87}{30}\left(x^3-5x^2+6x\right)$$

$$P_3(x) = \frac{53}{30}x^3 - 7x^2 + \frac{253}{30}x - 1$$

Exercice 3 :

Il faut déterminer les polynôme d'interpolation $P_3(x)$ et $P_3'(x)$ par rapport au deux régions puis calculer les valeurs approchées en utilisant l'interpolation.

Pour éviter les calculs compliqués, cous pouvons utiliser une échelle (ou translation des valeurs) et utiliser les points : 0, 5, 10 et 15. On a ;

$$L_0(x) = \frac{(x-5)(x-10)(x-15)}{(0-5)(0-10)(0-15)} = \frac{(x-5)(x^2-25x+150)}{-750} = \frac{-1}{750}(x^3-30x^2+275x-750)$$

$$L_1(x) = \frac{x(x-10)(x-15)}{5(5-10)(5-15)} = \frac{x(x^2-25x+150)}{250} = \frac{1}{250}(x^3-25x^2+150x)$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-5)(x-15)}{10(10-5)(10-15)} = \frac{x(x^2-20x+75)}{-250} = \frac{-1}{250}(x^3-20x^2+75x)$$

$$L_3(x) = \frac{x(x-5)(x-10)}{15(15-5)(15-10)} = \frac{x(x^2-15x+50)}{750} = \frac{1}{750}(x^3-15x^2+50x)$$

Les polynômes d'interpolation sont donnés successivement pour les deux régions par :

$$P_3(x) = \frac{-72.8}{750}(x^3-30x^2+275x-750) + \frac{74.2}{250}(x^3-25x^2+150x)$$
$$+\frac{-75.2}{250}(x^3-20x^2+75x) + \frac{76.4}{750}(x^3-15x^2+50x)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{750}\left\{x^3(-72.8+222.6-225.6+76.4) + x^2(2184-5565+4512-1146)\right.$$
$$\left.+x(-20020+33390-16920+3820)+54600\right\}$$

$$P_3(x) = \frac{x^3}{1250} - \frac{x^2}{50} + \frac{9x}{25} + \frac{364}{5}$$

$$P_3(x) = 0.0008x^3 - 0.02x^2 + 0.36x + 72.8$$
$$P_3'(x) = \frac{-70.2}{750}(x^3 - 30x^2 + 275x - 750) + \frac{70.2}{250}(x^3 - 25x^2 + 150x)$$
$$+\frac{-70.3}{250}(x^3 - 20x^2 + 75x) + \frac{73.2}{750}(x^3 - 15x^2 + 50x)$$
$$P_3'(x) = \frac{1}{750}\left\{x^3(-70.2 + 210.6 - 210.9 + 73.2) + x^2(2106 - 5265 + 4218 - 1098)\right.$$
$$\left.+x(-19305 + 31590 - 15817.5 + 3660) + 52650\right\}$$
$$P_3'(x) = \frac{9x^3}{2500} - \frac{13x^2}{250} + \frac{17x}{100} + \frac{351}{5}$$
$$P_3'(x) = 0.0036x^3 - 0.052x^2 + 0.17x + 70.2$$

Estimation des espérances de vie :
Europe ouest :

$$1977 \mapsto P_3(2) \simeq 73,4464$$
$$1983 \mapsto P_3(8) \simeq 74,8096$$
$$1988 \mapsto P_3(13) \simeq 75,8576$$

Estimation des espérances de vie :
Europe Est :

$$1977 \mapsto P_3(2) \simeq 70,3608$$
$$1983 \mapsto P_3(8) \simeq 70,0752$$
$$1988 \mapsto P_3(13) \simeq 71,5312$$

Exercice 4 :

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ par rapport aux points 0; $\frac{3}{4}$; 1.
Polynômes caractéristiques de Lagrange par rapport aux points 0; $\frac{3}{4}$ et 1 :

$$L_0(x) = \frac{(x - \frac{3}{4})(x-1)}{(0 - \frac{3}{4})(0-1)} = \frac{4}{3}\left(x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{3}{4}\right)$$

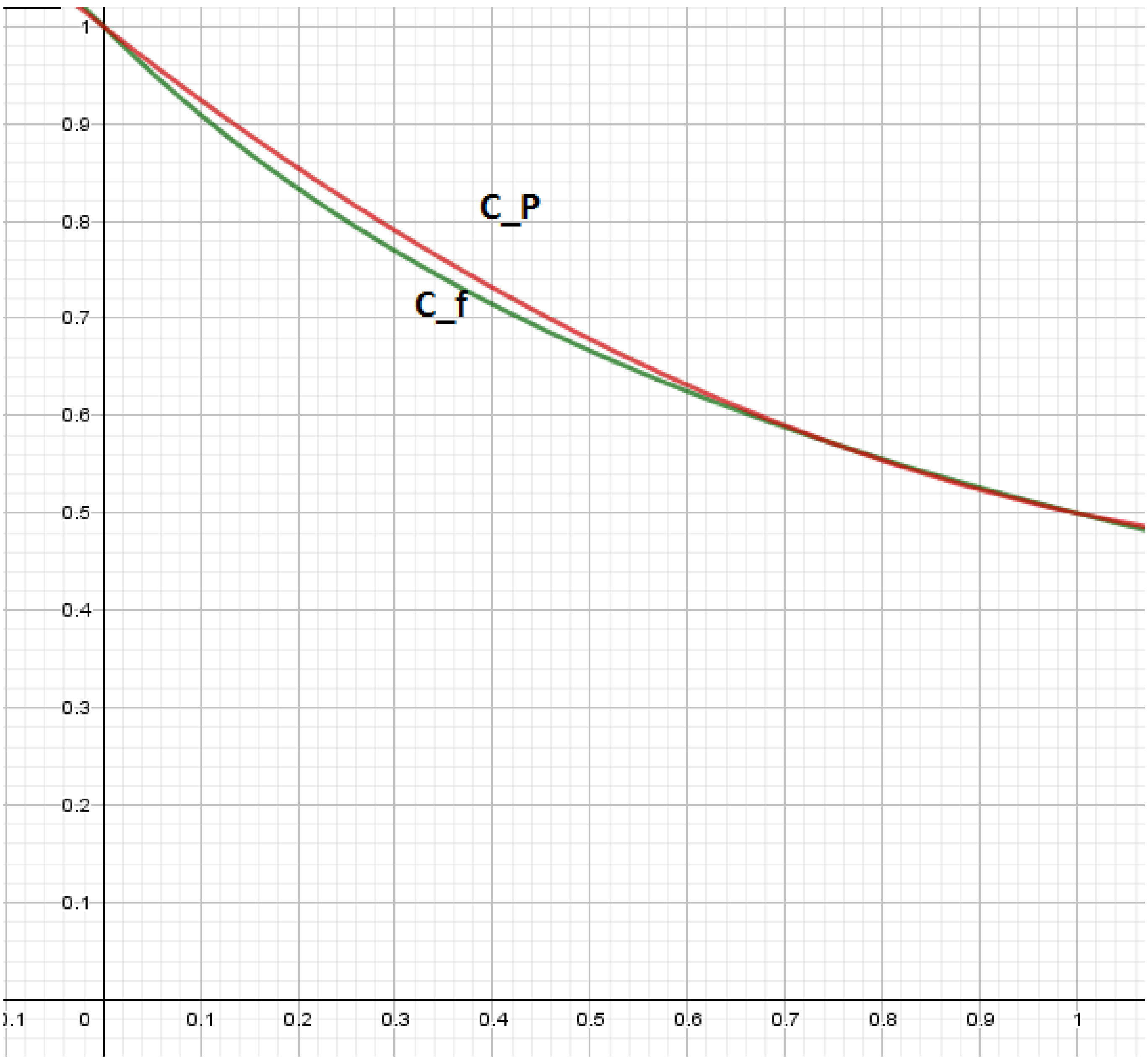
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(\frac{3}{4} - 0)(\frac{3}{4} - 1)} = \frac{-16}{3}\left(x^2 - x\right)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x - \frac{3}{4})}{(1-0)(1 - \frac{3}{4})} = 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)$$

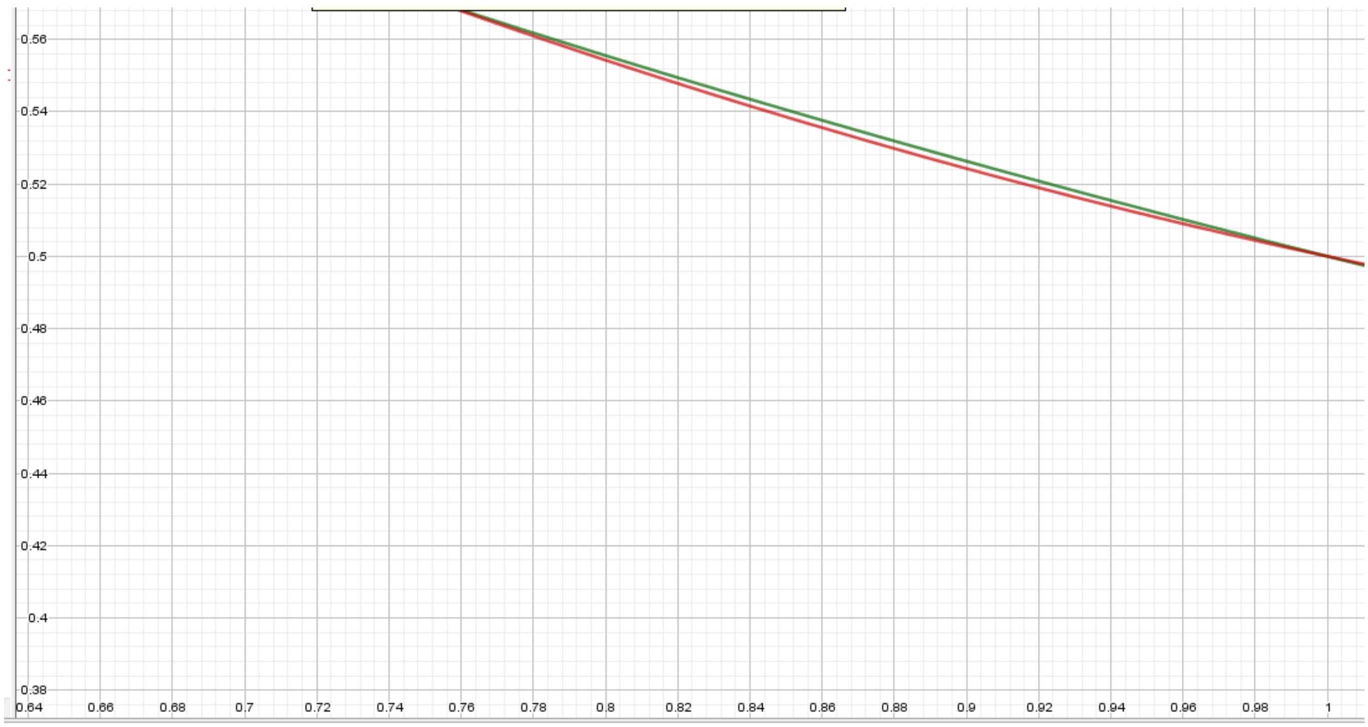
Donc le polynômes d'interpolation par rapport aux points $(0,1)$, $(\frac{3}{4}, \frac{4}{7})$ et $(1, \frac{1}{2})$ est donné par :
$P_2(x) = L_0(x) + \frac{4}{7}L_1(x) + \frac{1}{2}L_2(x) = \frac{2}{7}x^2 - \frac{11}{14}x + 1$

Représenter sur un même graphique le polynôme et la fonction interpolée ;

Les deux courbes passent pas les trois points $(0,1)$, $(\frac{3}{4}, \frac{4}{7})$ et $(1, \frac{1}{2})$ mais elles ne sont pas confondues, il faut ajouter d'autres points (par exemple, 0.1, 0.2, 0.3,...) pour pouvoir ajuster la représentation. Il faut bien choisir l'échelle sur l'axe des ordonnées pour pouvoir distinguer les deux courbes ? elles ont trois points en commun mais leurs différence est réduite (égale à l'erreur !).



Agrandissement de la représentation dans la partie $[0.8, 1]$



Comparer, à l'aide d'une calculatrice, $f(\frac{1}{2})$ et $P_2(\frac{1}{2})$;

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} \sim 0,666667 \text{ et } P_2(\frac{1}{2}) = \frac{19}{28} \sim 0,678571$$

La différence entre les deux valeurs est d'ordre $0,01$ on peut dire qu'elles sont égales à 10^{-2} près ;

Rappeler la formule de l'erreur et donner une majoration de $|E(x)| = |f(x) - P_2(x)|$;
Formule générale : Il existe ξ entre compris entre le plus petit et le plus grand points d'interpolation (si les points sont ordonnés du plus petit au plus grand, en peut écrire $\xi \in [x_0, x_n]$) tel que :

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| = |(x - x_0)(x - x_1)....(x - x_n)| \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$$

Concernant f et P_2, il existe $\xi \in [0, 1]$ tel que :

$$|E_2(x)| = |f(x) - P_2(x)| = |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{(3)!} = |x(x - \frac{3}{4})(x - 1)| \frac{|f^{(3)(\xi)}|}{6}$$

On a :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} > 0$$

On en déduit que $f^{(3)}$ est croissante et pour $x \in [0, 1]$ on a $f^{(3)}(0) \leq f^{(3)}(x) \leq f^{(3)}(1)$ soit $-6 \leq f^{(3)}(x) \leq \frac{-6}{16}$
Finalement,

$$|f^{(3)}(\xi)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = 6$$

et,

$$|E_2(x)| \leq |x(x-\frac{3}{4})(x-1)|$$

A titre d'exemple, $|E_2(\frac{1}{2})| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{16} \sim 0,0625$ qui est une majoration de la valeur exacte donnée par $|E_2(\frac{1}{2})| = |f(\frac{1}{2}) - P_2(\frac{1}{2})| \sim 0,01$.

4) Évaluer l'erreur commise en considérant les points support : 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et 1. D'après la formule du cours, il existe $\xi \in [0,1]$ tel que :

$$|E_4(x)| = |f(x) - P_4(x)| = |x(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})(x-1)|\frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!}$$

On a :

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \qquad f^{(5)}(x) = \frac{-120}{(1+x)^6}$$

et avec un calcul d'encadrement, nous avons successivement :

$$0 \leq x \leq 1 \quad 1 \leq 1+x \leq 2 \quad 1 \leq (1+x)^6 \leq 2^6 \quad \frac{1}{64} \leq \frac{1}{(1+x)^6} \leq 1 \quad -120 \leq f^{(5)}(x) \leq \frac{-120}{64}$$

et

$$|f^{(5)}(\xi)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f^{(5)}(x)| = 120$$

Finalement,

$$|E_4(x)| = |f(x) - P_4(x)| \leq |x(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})(x-1)|$$

Exercice 5 :

1) Établir le tableau des différences finies de f ;

x_i	$f(x_i)$	DD_1	DD_2	DD_3	DD_4
2	$5,2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2,1$	$6,4$	$\frac{6,4-5,2}{2,1-2} = 12$	$-$	$-$	$-$
$2,2$	$5,8$	$\frac{5,8-6,4}{2,2-2,1} = -6$	$\frac{-6-12}{2,2-2} = -90$	$-$	$-$
$2,3$	$6,1$	$\frac{6,1-5,8}{2,3-2,2} = 3$	$\frac{3-(-6)}{2,3-2,1} = 45$	$\frac{45+90}{2,3-2} = 450$	$-$
$2,4$	6	$\frac{6-6,1}{2,4-2,3} = -1$	$\frac{-1-3}{2,4-2,2} = -20$	$\frac{-20-45}{2,4-2,1} = \frac{-650}{3}$	$\frac{\frac{-650}{3}-450}{2,4-2} = \frac{-5000}{3}$

2) En déduire le polynôme d'interpolation de Newton de f d'ordre 4, associé aux points $x_0 = 2$, $x_1 = 2.1$, $x_2 = 2.2$, $x_3 = 2.3$ et $x_4 = 2.4$.

Le polynôme d'interpolation est donné par la méthode de Newton :

$$P_4(x) = 5,2+12(x-2)-90(x-2)(x-2,1)+450(x-2)(x-2,1)(x-2,2)-\frac{5000}{3}(x-2)(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)$$

$$P_4(x) = 5,2 + 12(x-2) - 90(x^2 - 4,1x + 4,2) + 450(x^3 - 6,3x^2 + 13,22x - 9,24)$$
$$-\frac{5000}{3}(x^4 - 8,6x^3 + 27,71x^2 - 39,646x + 21,252)$$

$$P_4(x) = -\frac{5000}{3}x^4 + x^3(\frac{43000}{3} + 450) + x^2(-\frac{138550}{3} - 2835 - 90) + x(\frac{198230}{3} + 5949 + 369 + 12)$$
$$+(-\frac{106260}{3} - 4158 - 378 - 24 + 5,2)$$

$$P_4(x) = -\frac{5000x^4}{3} + \frac{44350x^3}{3} - \frac{147325x^2}{3} + \frac{217220x}{3} - \frac{199874}{5}$$

Ou en valeurs approchées des coefficients :

$$P_4(x) = -1666.67x^4 + 14783.3x^3 - 49108.3x^2 + 72406.7x - 39974.8$$

Peut-on donner, à partir du tableau précédent, les polynômes d'interpolation par rapport aux points x_0, x_1, x_2 et x_3 ?

Oui, il suffit de d'utiliser le tableau pour les différences divisées des 4 points au lieu de 5 points (en supprimant x_4, toute la ligne est à supprimer) :

x_i	$f(x_i)$	DD_1	DD_2	DD_3	DD_4
2	$5,2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2,1$	$6,4$	$\frac{6,4-5,2}{2,1-2} = 12$	$-$	$-$	$-$
$2,2$	$5,8$	$\frac{5,8-6,4}{2,2-2,1} = -6$	$\frac{-6-12}{2,2-2} = -90$	$-$	$-$
$2,3$	$6,1$	$\frac{6,1-5,8}{2,3-2,2} = 3$	$\frac{3-(-6)}{2,3-2,1} = 45$	$\frac{45+90}{2,3-2} = 450$	$-$
$\cancel{2,4}$	$\cancel{6}$	$\cancel{\frac{6-6,1}{2,4-2,3} = -1}$	$\cancel{\frac{-1-3}{2,4-2,2} = -20}$	$\cancel{\frac{-20-45}{2,4-2,1} = \frac{-650}{3}}$	$\cancel{\frac{\frac{-650}{3}-450}{2,4-2} = \frac{-5000}{3}}$

Donc :

$$P_3(x) = 5,2 + 12(x-2) - 90(x-2)(x-2,1) + 450(x-2)(x-2,1)(x-2,2)$$

$$P_3(x) = 450x^3 - 2925x^2 + 6330x - \frac{22774}{5}$$

Par rapport aux points x_1, x_2, x_3 et x_4 ? Expliquer la réponse.

La réponse est aussi oui mais avec une méthode différente : en effet, lorsqu'on supprime x_0, il en suffit pas de supprimer la 1ère ligne mais toutes les différences divisées qui utilisent x_0 (la première valeur de chaque colonnes ! !) :

x_i	$f(x_i)$	DD_1	DD_2	DD_3	DD_4
$\cancel{2}$	$\cancel{5,2}$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2,1$	$6,4$	$\cancel{\frac{6,4-5,2}{2,1-2} = 12}$	$-$	$-$	$-$
$2,2$	$5,8$	$\frac{5,8-6,4}{2,2-2,1} = -6$	$\cancel{\frac{-6-12}{2,2-2} = -90}$	$-$	$-$
$2,3$	$6,1$	$\frac{6,1-5,8}{2,3-2,2} = 3$	$\frac{3-(-6)}{2,3-2,1} = 45$	$\cancel{\frac{45+90}{2,3-2} = 450}$	$-$
$2,4$	6	$\frac{6-6,1}{2,4-2,3} = -1$	$\frac{-1-3}{2,4-2,2} = -20$	$\frac{-20-45}{2,4-2,1} = \frac{-650}{3}$	$\cancel{\frac{\frac{-650}{3}-450}{2,4-2} = \frac{-5000}{3}}$

Donc :

$$P_3'(x) = 6,4 - 6(x-2,1) + 45(x-2,1)(2,2) - \frac{650}{3}(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)$$

$$P_3'(x) = -\frac{650x^3}{3} + 1475x^2 - \frac{10030x}{3} + \frac{12646}{5}$$

Remarque : La même méthode est à utiliser si nous supprimons plusieurs points du début ou de la fin du tableau, par contre, nous ne pouvons pas utiliser le même tableau pour déduire les différences divisées lorsque nous supprimons un point du milieu du tableau. Par exemple, pour x_0, x_1, x_3 et x_4 il faut refaire les calculs dès le début ! !

3) Donner une valeur approchée de $f(2.25)$ et donner une majoration de l'erreur $|f(x) - P_4(x)|$ si f est de classe $\mathcal{C}^5$.
On a : $f(2.25) \sim P_4(2, 25)$

et, il existe ξ tel que :

$$|f(x) - P_4(x)| = |(x-2)(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)(x-2,4)|\frac{|f^{(5)(\xi)}|}{5!}$$

$$|f(x) - P_4(x)| \leq \frac{M}{5!}|(x-2)(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)(x-2,4)|$$

avec : $M = \sup_{x\in[2;2,4]} |f^{(5)}(x)|$

Remarque : Nous pouvons aussi donner une approximation de $f(2.25)$ en utilisant $P_3(.)$ et $P_3'(.)$.

Exercice 6 :

Pour calculer le zéro d'une fonction $f(x)$ inversible sur un intervalle $[a, b]$ on peut utiliser l'interpolation : après avoir évalué f sur une discrétisation x_i de $[a, b]$, on interpole l'ensemble $(y_i = f(x_i), x_i)_{i=0}^m$ et on obtient un polynôme $p(y)$ tel que : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = p(0)$.

1) Utiliser cette méthode pour évaluer l'unique racine r de la fonction $f(x) = \exp(x) - 2$ dans l'intervalle $[0, 1]$ avec trois points d'interpolation;
Localisation de la racine : Soit $f(x) = e^x - 2$, f est une fonction continue croissante (car $f'(x) = e^x > 0$) et $f(0)f(1) = (-1)(e-2) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\bar{x} \in [0, 1]$
f est inversible (admet une fonction réciproque) car f est une bijection (continue + croissante) de $[0, 1]$ vers $[-1, e-2]$.
Discrétisation de l'intervalle en trois points ($n = 2$) et $x_i = 0 + i(\frac{1-0}{2}) = \frac{i}{2}$ donc $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.
Le tableau des valeurs de $f(x_i)$:

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
$y_i = f(x_i)$	-1	$e^{\frac{1}{2}} - 2$	$e - 2$

Le tableau inversé (les valeurs $(y_i, f^{-1}(y_i) = x_i)$) :

y_i	-1	$e^{\frac{1}{2}} - 2$	$e - 2$
$x_i = f^{-1}(y_i)$	0	$\frac{1}{2}$	1

Le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ sur la base des points y_i et les valeurs $x_i = f^{-1}(y_i)$ est une approximation de $f^{-1}(x)$ (nous pouvons le calculer par n'importe quelle méthode d'interpolation). Par exemple, le tableau des différences divisées est donnée par :

y_i	x_i	DD_1	DD_2
-1	0	$-$	$-$
$e^{\frac{1}{2}} - 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-0}{e^{\frac{1}{2}}-2+1} = \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}}-1)} \simeq 0,345$	$-$
$e - 2$	1	$\frac{1-\frac{1}{2}}{e-2-(e^{\frac{1}{2}}-2)} = \frac{1}{2(e-e^{\frac{1}{2}})}$	$\frac{\frac{\frac{1}{2}}{e-e^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}-1}}{e-2+1} = \frac{1}{2(e-1)}(\frac{1}{e-e^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}-1}) = \frac{1}{2(e-1)}\frac{2e^{\frac{1}{2}}-1-e}{e^{\frac{3}{2}}-2e+e^{\frac{1}{2}}}$ $= \frac{1}{2(e-1)}\frac{-(e+1-2e^{\frac{1}{2}})}{e^{\frac{1}{2}}(e-2e^{\frac{1}{2}}+1)} = \frac{-1}{2e^{\frac{1}{2}}(e-1)} \simeq -0,176$

Donc le polynôme d'interpolation sur la base des (y_i) est donné par :

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}} - 1)}(x - y_0) - \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}}(e-1)}(x - y_0)(x - y_1)$$

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}} - 1)}(x + 1) - \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}}(e-1)}(x + 1)(x - e^{\frac{1}{2}} + 2)$$

On a : $f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = f^{-1}(0) \sim P_2(0) = \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}}-1)} - \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}}(e-1)}(-e^{\frac{1}{2}} + 2) = \frac{e^{\frac{3}{2}}+e-4e^{\frac{1}{2}}+2}{2e^{\frac{1}{2}}(e^{\frac{1}{2}}-1)(e^1-1)}$
Soit : $\bar{x} \sim 0,708$

2) Comparer ensuite le résultat obtenu avec l'approximation du zéro de f obtenue par la méthode de Newton en 3 itérations à partir de $x_0 = 0$.
D'abord, vérifiant les conditions de convergence : f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ par contre $f(x_0) = f(0) = -2$ calculons x_1 : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_k)-2}{f'(x_k)} = 0 - \frac{1-2}{1} = 1$ et $f(x_1) = e - 2 > 0$ de même signe que $f''(x)$. On en déduit que la méthode de Newton converge vers $\overline{x}$ et une valeur approchée après trois itérations est donnée par x_3 avec :

$$x_2 = 1 - \frac{e-2}{e} \sim 0.736 \text{ et } x_3 = x_2 - \frac{e^{x_2} - 2}{e^{x_2}} \sim 0.694$$

Exercice 7 : La division euclidienne d'un polynôme V par un polynôme W non nul consiste à écrire (d'une manière unique) V sous la forme $V = Wq+r$ où q et r sont deux polynômes, le second vérifiant $deg(r) < deg(W)$; q est le quotient de la division euclidienne de V et W et r le reste de cette division.

1) Montrer que si $W(x) = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_d)$ alors r est le polynôme d'interpolation de V aux points $(a_0,\ a_1, ..., a_d)$;
Soit $P_d(x)$ le polynôme d'interpolation de $V(x)$ par rapport au points a_0, a_1,...,a_d alors, on a :

$$P_d(a_i) = V(a_i) = q(a_i)W(a_i) + r(a_i) \qquad i = 0, 1, ..., d$$

Or,

$$W(a_i) = (a_i - a_0)...(a_i - a_i)...(a_i - a_d) = 0 \qquad i = 0, 1, ..., d$$

On en déduit :

$$P_d(a_i) = r(a_i) \qquad i = 0, 1, ..., d \Rightarrow (P_d - r)(a_i) = 0 \qquad i = 0, 1, ..., d$$

Remarquons que le polynôme d'interpolation $P_d(x)$ est de degré au plus égal à d et le reste de la division euclidienne est strictement inférieur au degré de $V(x)$ (qui égal à $d + 1$).

Donc, le degré du polynôme $(P_d - r)(x)$ est de degré au plus égal à d et ayant $d + 1$ racines (a_0,...,a_d), on en déduit que ce polynôme est le polynôme identiquement nul : $(P_d - r)(x) = 0$ et $P_d(x) = r(x)$. (Un polynôme non identiquement nul de degré n ne peut pas avoir plus de n racines).

2) Utiliser une division euclidienne pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de $V(x) = x^5 - 3x^4 + x - 3$ aux points $-1,\ 0,\ 1,\ 2$. Vérifier le résultat obtenu.
Il suffit d'effectuer la division euclidienne de $V(x)$ par $W(x)$ avec

$$W(x) = (x + 1)(x - 0)(x - 1)(x - 2) = (x^3 - x)(x - 2) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

On a :

$$V(x) = (x-1)W(x) + (-x^3 - 3x^2 + 3x - 3)$$

Donc :

$$P_3(x) = -x^3 - 3x^2 + 3x - 3$$

Pour vérifier le résultat, il suffit qu comparer les images des points x_i utilisant $V(x)$ et $P_3(x)$:

$$P_3(0) = -3 = V(0), \quad P_3(1) = -4 = V(1), \quad P_3(-1) = -8 = V(-1), ...$$

Exercice 8 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2 - 3x^2$:

1) Calculer le polynôme P_0 qui interpole f au point d'abscisse $x_0 = 0$;
   Le polynôme P_0 est de degré zéro donc égal à une constante et il prend la même valeur que f au point $x_0 = 0$:

$$P_0(x) = P_0(x_0) = f(x_0) = f(0) = 2$$

2) Calculer le polynôme P_1 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$;
   Utilisant, par exemple, la méthode de Newton :

x_i	$f(x_i)$	$DD1$
0	2	$-$
1	-1	$\frac{-1-2}{1-0} = -3$

Donc :

$$P_1(x) = 2 - 3(x - x_0) = 2 - 3x$$

3) Calculer le polynôme P_2 qui interpôle f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$;
   Complétant le tableau précédent en ajoutant la ligne $x_2 = 2$:

x_i	$f(x_i)$	$DD1$	$DD2$
0	2	$-$	$-$
1	-1	$\frac{-1-2}{1-0} = -3$	$-$
2	-10	$\frac{-10+1}{2-1} = -9$	$\frac{-9+3}{2-0} = -3$

Donc :

$$P_2(x) = 2 - 3(x - x_0) - 3(x - x_0)(x - x_1) = 2 - 3x - 3x(x-1) = 2 - 3x^2 = f(x)$$

Le résultat précédent est tout à fait normal car f est un polynôme de degré 2 et on ne peut pas trouver une meilleur approximation de f par un autre polynôme de degré 2.

4) Calculer le polynôme P_n, $n \geq 3$ qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\cdots$, et $x_n = n$. Est-ce que le résultat est vrai pour une fonction f quelconque.
   Remarquons que nous ne pouvons pas faire des calculs (car le nombre de points n'est pas fini !), par contre, on a :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \Rightarrow (P_n - f)(x_i) = 0 \quad i = 0, 1, ..., n$$

$f(x)$ est un polynôme de degré 2 et $P_n(x)$ est un polynôme de degré $n \geq 3$ donc $(P_n - f)(x)$ est un polynôme de degré n ayant $n+1$ racines (x_0, x_1,...,x_n). On en déduit que :

$$(P_n - f)(x) = 0 \quad \text{et} \quad P_n(x) = f(x)$$

Exercice 9 :

1) Rappeler la définition des polynômes de Tchebychev sur $[-1,1]$; Les polynôme de Tchebychev sont définis comme les polynômes vérifiant l'égalité suivant :

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Avec un changement de variable, pour tout $x \in [-1,1]$, nous pouvons obtenir la définition suivante :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

2) Donner la relation de recurrence entre ces polynômes et calculer T_5 ; En utilisant les formule de transformation de $\cos$, nous pouvons obtenir la relation de recurrence suivante :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \text{Pour } n \geq 1. \end{cases}$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

3) Calculer les racines de T_4 dans $[-1,1]$ puis déduire les meilleurs noeuds d'interpolation, utilisant 4 points, sur l'intervalle $[0,3]$.
Nous pouvons utiliser la formule du cours donnant les n racines du polynômes T_n de Tchebychev :

$$x_k = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}) \qquad k = 0, ..., n-1$$

Donc, les racines de T_4 sont : $\cos(\frac{\pi}{8})$, $\cos(\frac{3\pi}{8})$, $x_3 = \cos(\frac{5\pi}{8})$ et $\cos(\frac{7\pi}{8})$ (A ordonner)
Deuxième méthode (calcul direct) :

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$$

La deuxième équation est une équations bicarrée, il suffit de poser $X = x^2$ pour obtenir $X_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $X_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$,
On en déduit que les racines de T_4 sont données par : $x_0 = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$, $x_1 = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ et $x_3 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$.
Pour obtenir la famille des meilleurs noeuds d'interpolation sur un intervalle $[a,b]$, il suffit de déterminer les images des $(x_i)_{i=0,\dots,4}$ par les transformation affine de $[-1,1] \to [a,b]$ donnée par :

$$x \in [-1,1] \mapsto \theta = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x \in [a,b]$$

Donc, les meilleurs noeuds dans $[0,3]$ sont :

$$\theta_i = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_i \qquad \text{avec } x_i,\ i = 0, ..., 3 \text{ sont les racines du polynôme} T_4 \text{ dans } [-1,1]$$

Exercice 10 :

Soit f une fonction de classe C^3, définie sur $[0,3]$ et à valeurs réelles.

1) Déterminer le polynôme d'interpolation d'ordre 2 de f, noté $P_2(.)$, qui prend les même valeurs que $f(.)$ en $x = 0, 1, 3$;

On a :

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} \frac{-1}{2}(x^2 - 3x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}(x^2 - x)$$

Donc :

$$P_2(x) = f(0)L_0(x) + f(1)L_1(x) + f(2)L_2(x)$$

2) Déterminer la méthode de quadrature élémentaire obtenue en remplaçant l'intégrale de $f(.)$ sur $[0,3]$ par celle de $P_2(.)$;

$$\int_0^3 f(x)dx \sim \int_0^3 P_2(x) = \int_0^3 (f(0)L_0(x) + f(1)L_1(x) + f(2)L_2(x))dx$$

$$= f(0)\int_0^3 L_0(x)dx + f(1)\int_0^3 L_1(x)dx + f(2)\int_0^3 L_2(x)dx$$

On a :

$$\int_0^3 L_0(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{3x}{2}\right]_0^3 = 0$$

$$\int_0^3 L_1(x)dx = \int_0^3 \frac{-1}{2}(x^2 - 3x) = -12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{4}$$

$$\int_0^3 L_2(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{6}(x^2 - x) = 16\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3}{4}$$

Donc, on obtient la quadrature suivante :

$$P_2(x) = f(0) \times 0 + f(1) \times \frac{9}{4} + f(2) \times \frac{3}{4} = 3(0 \times f(0) + \frac{3}{4} \times f(1) + \frac{1}{4} \times f(3)$$

avec $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \frac{3}{4}$ et $\omega_2 = \frac{1}{4}$

Remarque : cette quadrature est différente de celle obtenue avec la méthode de Simpson (Newton-cotes, $n = 2$) car la répartition des points dans l'intervalle n'est pas uniforme : $2 - 1 = 1 \neq 2 = 2 - 0$.

3) Montrer que l'ordre de la méthode est égal à 2.

Si f est un polynôme de degré 0, 1 ou 2 alors $P_2(x) = f(x)$ et la quadrature est exacte :

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 P_2(x)$$

Donc, l'ordre de cette méthode est au moins égale à 2. Il suffit maintenant de trouver un exemple d'un polynôme de degré 3 telle que la quadrature ne soit pas exacte : Si $f(x) = x^3$, on a :

$$\int_0^3 f(x)dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{4}$$

$$3(0 \times f(0) + \frac{3}{4} \times f(1) + \frac{1}{4} \times f(2)) = 3(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times 27) = \frac{90}{4} \neq \int_0^3 f(x)dx$$

Donc la méthode est d'ordre 2.

Exercice 11 : On se place sur l'intervalle $[-1, +1]$:

1) Calculer les polynômes de base de degré 3 associés aux points $\left\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$;

$$L_0(x) = \frac{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(-1+\frac{1}{3})(-1-\frac{1}{3})(-1-1)} = \frac{-1}{16}(9x^2-1)(x-1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{-1}{3}+1)(\frac{-1}{3}-\frac{1}{3})(\frac{-1}{3}-1)} = \frac{9}{16}(3x-1)(x^2-1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{1}{3}+1)(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-1)} = \frac{-9}{16}(x^2-1)(3x+1)$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})}{(1+1)(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})} = \frac{1}{16}(x+1)(9x^2-1)$$

2) En déduire le polynôme d'interpolation, P_3, de degré inférieur ou égal à 3 d'une fonction f définie sur $[-1, +1]$, associé aux points $\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$;

$$P_3(x) = f(-1)L_0(x) + f(-\frac{1}{3})L_1(x) + f(\frac{1}{3})L_2(x) + f(1)L_3(x)$$

3) Décrire la méthode de quadrature sur $[-1, +1]$ obtenue en remplaçant l'intégrale de f par celle de P_3. Quel est l'ordre de cette méthode ?

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq f(-1)\int_{-1}^1 L_0(x)dx + f(-\frac{1}{3})\int_{-1}^1 L_1(x)dx + f(\frac{1}{3})\int_{-1}^1 L_2(x)dx + f(1)\int_{-1}^1 L_3(x)dx$$

On a :

$$\int_{-1}^1 L_0(x)dx = \frac{-1}{16}\int_{-1}^1 (9x^2-1)(x-1)dx = \frac{1}{4}$$

$$\int_{-1}^1 L_1(x)dx = \frac{9}{16}\int_{-1}^1 (3x-1)(x^2-1)dx = \frac{3}{4}$$

$$\int_{-1}^1 L_2(x)dx = \frac{-9}{16}\int_{-1}^1 (x^2-1)(3x+1)dx = \frac{3}{4}$$

$$\int_{-1}^1 L_3(x)dx = \frac{1}{16}\int_{-1}^1 (x+1)(9x^2-1)dx = \frac{1}{4}$$

D'ou :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 2(\frac{1}{8}f(-1) + \frac{3}{8}f(\frac{-1}{3}) + \frac{3}{8}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{8}f(1))$$

Cette quadrature (méthode de Simpson $\frac{3}{8}$) est donnée sur un intervalle $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}(f(a) + f(a + \frac{b-a}{3}) + f(a + 2\frac{b-a}{3}) + f(a + 3\frac{b-a}{3}) + f(b))$$

Cette méthode est d'ordre au moins égal à 3 (si f est un polynôme de degré 3 alors $f(x) = P_3(x)$ et au plus égal à 4 (résultat général de la méthode de Newton-cotes).

Soit f est le polynôme de degré 4 tel que $f(x) = x^4$, on a :

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx = [\frac{x^5}{5}]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} = \frac{14}{35}$$

$$\widetilde{I}_2 = (\frac{1}{8}f(-1) + \frac{3}{8}f(\frac{-1}{3}) + \frac{3}{8}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{8}f(1)) = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{17} + \frac{1}{27} + 1) = \frac{14}{27} \neq I$$

Donc, la méthode est d'ordre 3.

Exercice 12 :

Estimer $\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx$ à partir des données suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	2	2	$1,6364$	$1,2500$	$0,9565$

en utilisant :

1. La méthode des rectangles à gauche composite ;

On a :

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} f(x)dx + \int_2^{\frac{5}{2}} f(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \int_0^{\frac{1}{2}} f(0)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(\frac{1}{2})dx + \int_1^{\frac{3}{2}} f(1)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} f(\frac{3}{2})dx + \int_2^{\frac{5}{2}} f(2)dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq f(0)\int_0^{\frac{1}{2}} dx + f(\frac{1}{2})\int_{\frac{1}{2}}^{1} dx + f(1)\int_1^{\frac{3}{2}} dx + f(\frac{3}{2})\int_{\frac{3}{2}}^{2} dx + f(2)\int_2^{\frac{5}{2}} dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{2}\left[f(0) + f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(\frac{3}{2}) + f(2)\right] \simeq \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + 2 + 2 + 1,6364 + 1,2500\right]$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq 4,1932$$

Utilisation de la formule du cours : $h = \frac{1}{2}$, $n = 5$, $a_i = 0 + ih = \frac{i}{2}$ avec $i = 0, ...5$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq h\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) = h\sum_{i=0}^{4} f(\frac{i}{2}) = \frac{1}{2}\left[f(0) + f(\frac{1}{2}) + ... + f(2)\right]$$

2. La méthode des rectangles à droite composite ;

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} f(x)dx + \int_2^{\frac{5}{2}} f(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \int_0^{\frac{1}{2}} f(\frac{1}{2})dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(1)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} f(\frac{3}{2})dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} f(2)dx + \int_2^{\frac{5}{2}} f(\frac{5}{2})dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq f(\frac{1}{2})\int_0^{\frac{1}{2}} dx + f(1)\int_{\frac{1}{2}}^{1} dx + f(\frac{3}{2})\int_1^{\frac{3}{2}} dx + f(2)\int_{\frac{3}{2}}^{2} dx + f(\frac{5}{2})\int_2^{\frac{5}{2}} dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(\frac{3}{2}) + f(2) + f(\frac{5}{2})\right] \simeq \frac{1}{2}\left[2 + 2 + 1,6364 + 1,2500 + 0.9565\right]$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq 3,92145$$

Utilisation de la formule du cours : $h = \frac{1}{2}$, $n = 5$, $a_i = 0 + ih = \frac{i}{2}$ avec $i = 0, ...5$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq h\sum_{i=1}^{n} f(a_i) = h\sum_{i=1}^{5} f(\frac{i}{2}) = \frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{2}) + ... + f(2) + f(\frac{5}{2})\right]$$

3. La méthode des trapèzes composite.

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} f(x)dx + \int_2^{\frac{5}{2}} f(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(0) + f(\frac{1}{2})}{2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(\frac{1}{2}) + f(1)}{2}dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{f(1) + f(\frac{3}{2})}{2}dx + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{f(\frac{3}{2}) + f(2)}{2}dx + \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{f(2) + f(\frac{5}{2})}{2}dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{f(0) + f(\frac{1}{2})}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx + \frac{f(\frac{1}{2}) + f(1)}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} dx + \frac{f(1) + f(\frac{3}{2})}{2}\int_1^{\frac{3}{2}} dx + \frac{f(\frac{3}{2}) + f(2)}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{2} dx + \frac{f(2) + f(\frac{5}{2})}{2}\int_2^{\frac{5}{2}} dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{2}\frac{f(0) + f(\frac{1}{2})}{2} + \frac{1}{2}\frac{f(\frac{1}{2}) + f(1)}{2} + \frac{1}{2}\frac{f(1) + f(\frac{3}{2})}{2} + \frac{1}{2}\frac{f(\frac{3}{2}) + f(2)}{2} + \frac{1}{2}\frac{f(2) + f(\frac{5}{2})}{2}$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{4}(f(0) + f(\frac{5}{2})) + \frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(\frac{3}{2}) + f(2)\right]$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{4}(\frac{3}{2} + 0.9565) + \frac{1}{2}(2 + 2 + 1.6364 + 1.25)$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq 4,057325$$

Utilisation de la formule du cours : $h = \frac{1}{2}$, $n = 5$, $a_i = 0 + ih = \frac{i}{2}$ avec $i = 0, ...5$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f(a_0) + f(a_n)) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) = \frac{1}{4}(f(0) + f(\frac{5}{2})) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} f(\frac{i}{2})$$
$$= \frac{1}{4}(f(0) + f(\frac{5}{2})) + \frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{2}) + ... + f(2)\right]$$

Exercice 13 :

Estimer, à l'aide des théorèmes du cours, le nombre de sous-intervalles n nécessaire pour obtenir une approximation de :

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

avec une erreur moindre que 10^{-2}, en utilisant :

1. La méthode du point milieu combinée ;

$$E_n = \frac{b-a}{24}(\frac{b-a}{n})^2 |f''(\eta)|$$

Donc :

$$E_n = \frac{1-0}{24}(\frac{1-0}{n})^2 |f''(\eta)| = \frac{1}{24}(\frac{1}{n^2})|f''(\eta)|$$

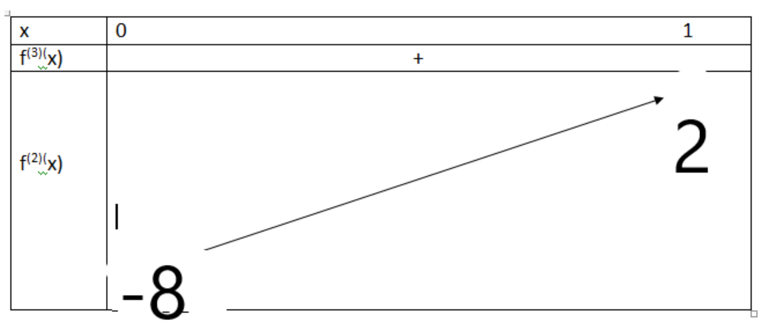
cherchons une majoration de $|f''(\eta)|$, on a :

$$f'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{24x^2-8}{(1+x^2)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = 96x\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \geq 0 \text{ sur } [0,1]$$

On en déduit : $|f''(\eta)| \leq 2$ et :



$$E_n = \frac{1}{24}(\frac{1}{n^2})|f''(\eta)| \leq 8\frac{1}{24}(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{3n^2}$$

Il suffit de prendre :

$$\frac{1}{3n^2} \leq 10^{-6} \Rightarrow 3n^2 \geq 10^6 \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{10^6}{3}} \Rightarrow n \geq 577.35$$

il suffit de considérer $n = 587$.

2. La méthode des trapèzes combinée ;

$$E_n = \frac{(b-a)^3}{12}(\frac{b-a}{n})^2 |f''(\eta)|$$

Donc :

$$E_n = \frac{(1-0)^3}{12}(\frac{1-0}{n})^2|f''(\eta)| = \frac{1}{12}(\frac{1}{n^2})|f''(\eta)|$$

On en déduit :

$$E_n = \frac{1}{12}(\frac{1}{n^2})|f''(\eta)| \leq 8\frac{1}{12}(\frac{1}{n^2}) = \frac{2}{3n^2}$$

Il suffit de prendre :

$$\frac{2}{3n^2} \leq 10^{-6} \Rightarrow n^2 \geq \frac{2}{3} \times 10^6 \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{2}{3} \times 10^6 n} \geq 816.49$$

il suffit de considérer $n = 817$.

3. La méthode de Simpson combinée ;

$$E_n = \frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{4n})^4|f^{(4)}(\eta)|$$

$$E_n = \frac{1-0}{180}(\frac{1-0}{4n})^4|f^{(4)}(\eta)| = \frac{1}{180}\frac{1}{256n^4}|f^{(4)}(\eta)| = \frac{1}{46080n^4}|f^{(4)}(\eta)|$$

Il suffit donc de trouver une majoration de $|f^{(4)}(\eta)|$ sur $[-1, 1]$.

On donne :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = 96$$

Donc :

$$E_n \leq \frac{96}{46080n^4} = \frac{1}{480n^4}$$

Il suffit de choisir n tel que :

$$\frac{1}{480n^4} \leq 10^{-6}$$

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{10^6}{480}} \Rightarrow n \geq 6.75$$

Il suffit de prendre $n = 7$.

Commenter les résultats trouvés.

La méthode de Simpson combinée donne la meilleure approximation en peu d'intervalles suivie de la méthode du rectangle au centre combinée puis la méthode des trapèzes.

Exercice 14 :

Soit f une fonction $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0}^m$ de subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ définis par $x_i = a + ih$ avec $h = \dfrac{b-a}{m}$. Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature composite pour approcher l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$:

1) Écrire le polynôme $P(.)$ qui interpole f aux points 0 et 1 ;

$$L_0(x) = \frac{x-1}{0-1} = 1-x \quad \text{et} \quad L_1(x) = \frac{x-0}{1-0} = x$$

Donc : $P_1(x) = f(0)(1-x) + f(1)(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$

2) En déduire une formule de quadrature basée sur l'approximation : $\int_0^1 f(x)dx \simeq \int_0^1 p(x)dx$ et étudier le degré de précision de cette formule de quadrature ;

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \int_0^1 P_1(x)dx = \int_0^1 ((f(1)-f(0))x + f(0))dx$$

$$= (f(1)-f(0))\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + f(0)\,[x]_0^1 = \frac{f(1)-f(0)}{2} + f(0) = \frac{f(1)+f(0)}{2}$$

3) A l'aide d'un changement de variable affine, déduire une formule de quadrature pour l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$;
On pose $X = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$ ($x = x_i + (x_{i+1}-x_i)X$) donc $dx = (x_{i+1}-x_i)dX$
D'autre part : $x = x_i \to X = 0$ et $x = x_{i+1} \to X = 1$ donc :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_0^1 f(x_i + (x_{i+1}-x_i)X)(x_{i+1}-x_i)dX$$

$$= (x_{i+1}-x_i)\int_0^1 f(x_i + (x_{i+1}-x_i)X)dX = (x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_i + (x_{i+1}-x_i)\times 0) + f(x_i + (x_{i+1}-x_i)\times 1)}{2}$$

$$= (x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

4) En utilisant le résultat au point précédent, proposer une formule de quadrature composite pour le calcul approché de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Quelle méthode de quadrature reconnaît-on ?
Commençant par répartir l'intervalle $[a,b]$ en n sous intervalles de même amplitude : $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, ..., n$ on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x^n} f(x)dx$$

En utilisant la question précédente pour chaque intégrale et en remarquons que $(x_{i+1}-x_i) = h = \frac{b-a}{n}$ on a :

$$\int_a^b f(x)dx = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + ... + h\frac{f(x_{i-1})+f(x_n)}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\frac{f(x_0)}{2} + hf(x_1) + ... + hf(x_{n-1}) + h\frac{f(x_n)}{2} = h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)\right)$$

On reconnaît donc la méthode des trapèzes qui est une méthode composite contrairement à la méthode du trapèze (un) qui est une méthode simple.

Exercice 15 : On souhaite calculer une valeur approchée de $ln(2)$ à partir de la relation $ln(2) = \int_1^2 \dfrac{dx}{x}$. Nous considérerons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

1) Montrer que pour tout $(a,b) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et pour tout $t \in [0,1]$ on a :
$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \quad (E)$$
On a :
$$f(ta + (1-t)b) - (tf(a) + (1-t)f(b)) = \frac{1}{ta + (1-t)b} - (\frac{t}{a} + \frac{1-t}{b})$$

$$f(ta+(1-t)b)-(tf(a)+(1-t)f(b)) = \frac{ab-(tb(ta+(1-t)b)+(1-t)(ta+(1-t)b))}{ab(ta+(1-t)b)}$$

$$f(ta+(1-t)b)-(tf(a)+(1-t)f(b)) = \frac{ab-(t^2ab+t(1-t)b^2+t(1-t)a^2+(1-t)^2ab)}{ab(ta+(1-t)b)}$$

$$f(ta+(1-t)b)-(tf(a)+(1-t)f(b)) = \frac{2t(1-t)ab-t(1-t)(a^2+b^2)}{ab(ta+(1-t)b)} = -\frac{t(1-t)(b-a)^2}{ab(ta+(1-t)b)} \leq 0$$

Donc (E) est vérifiée.

2) On suppose $0 < a < b < +\infty$ et soit $x \in [a,b]$. Montrer que $\frac{b-x}{b-a} \in [0,1]$;

On a $0 < a < b$ et $x \in [a,b]$ donc $b-x \geq 0$ et $b-a > 0$ soit $\frac{b-x}{b-a} \geq 0$. D'autre part :

$$x \geq a \Rightarrow -x \leq -a \Rightarrow 0 < b-x \leq b-a \Rightarrow \frac{b-x}{b-a} \leq 1$$

Donc :

$$\frac{b-x}{b-a} \in [0,1]$$

3) Soit $P_1(x)$ le polynôme d'interpolation pour f aux points a et b Montrer en prenant $t = \frac{b-x}{b-a}$ dans (E) que $f(x) \leq P_1(x)$;

On a :

$$L_0(x) = \frac{x-b}{a-b} \qquad L_1(x) = \frac{x-a}{b-a} \qquad P_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

On a :

$$t = \frac{b-x}{b-a} \Rightarrow 1-t = \frac{x-a}{b-a}$$

et :

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

$$f(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

$$f(\frac{ab-ax+bx-ba}{b-a}) \leq P_1(x) \Rightarrow f(x) \leq P_1(x)$$

4) Trouver une approximation de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ en appliquant la méthode des trapèzes combinée avec 2 sous-intervalles. Faire un schéma illustrant le calcul ;

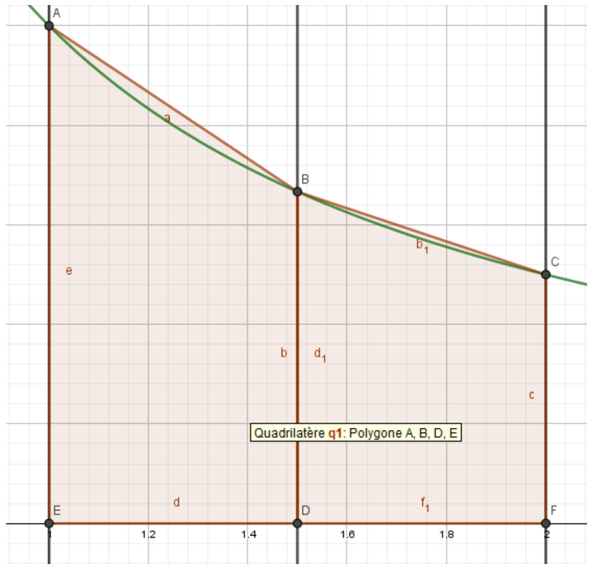
On a :

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x)dx \simeq (\frac{3}{2}-1)\frac{f(1)+f(\frac{3}{2})}{2} + (2-\frac{3}{2})\frac{f(\frac{3}{2})+f(2)}{2}$$

$$\int_1^2 f(x)dx \simeq \frac{1}{4}(1+\frac{2}{3}) + \frac{1}{4}(\frac{2}{3}+\frac{1}{2})$$

$$\int_1^2 f(x)dx \simeq \frac{1}{4}(1+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}) = \frac{17}{24}$$

Illustration graphique :



5) Expliquer pourquoi quel que soit le nombre de sous-intervalles, le nombre trouvé par la méthode des trapèzes combinée fournira toujours une approximation par excès (c'est-à-dire supérieure à la valeur exacte $ln(2)$) ;
La méthode composite consiste à subdiviser l'intervalle $[1, 2]$ en plusieurs sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ d'amplitude h et d'appliquer la méthode du trapèze (un) sur cet intervalle, or on a :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)d(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}f(x_i) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1}))dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq \frac{f(x_i)}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)dx + \frac{f(x_{i+1})}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq \frac{f(x_i)}{h}(x_{i+1}(x_{i+1}-x_i) - \frac{1}{2}(x_{i+1}^2 - x_i^2)) + \frac{f(x_{i+1})}{h}(\frac{1}{2}(x_{i+1}^2 - x_i^2) - x_i(x_{i+1}-x_i))$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq \frac{f(x_i)}{h}(x_{i+1}(h) - \frac{h}{2}(x_{i+1}+x_i)) + \frac{f(x_{i+1})}{h}(\frac{h}{2}(x_{i+1}+x_i) - x_i(h))$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq f(x_i)(x_{i+1} - \frac{1}{2}(x_{i+1}+x_i)) + f(x_{i+1})(\frac{1}{2}(x_{i+1}+x_i) - x_i)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq (x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq h\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

On en déduit que que l'aire du trapèze déterminée par les points x_i et x_{i+1} est supérieure à la valeur exacte de l'intégrale, le résultat s'obtient par la somme des valeurs sur tous les intervalles.

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\int_1^2 f(x)dx \leq h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + ... + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

$$\ln(2) = \int_1^2 f(x)dx \leq \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$$

6) On approche maintenant $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ en utilisant la méthode Simpson combinée. Combien de sous-intervalles faut-il utiliser pour commettre une erreur inférieure ou égale à 10^{-10} ?

On a :

$$E_n = \frac{2}{180}(\frac{2}{4n})^4|^{(4)}(\eta)|$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f^{(3)} = \frac{-6}{x^4} \quad f^{(4)} = \frac{24}{x^5}$$

Remarquons que :

$$|f^{(4)}(\eta)| \leq \sup_{x\in[1,2]} |f^{(4)}(x)| = 24$$

$$E_n \leq 24 \times \frac{1}{180}(\frac{1}{4n})^4$$

il suffit de prendre n tel que :

$$24 \times \frac{1}{180}(\frac{1}{4})^4 \frac{1}{n^4} \leq 10^{-10}$$

Soit :

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{24 \times 10^{10}}{180 \times 4^4}} \simeq 47,77$$

et :

$$n = 48$$

SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE —

SÉRIE $N^0 3$ 2022 - 2023

Exercice 1 : Soit (PC) le problème de Cauchy donné par :

$$(PC)\begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

1. On suppose que (PC) admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte) ;
   Par séparation des variables, nous avons :

   $$y' = -10y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -10y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -10dt \Rightarrow \ln(|y|) = -10t + c \Rightarrow |y| = e^c e^{-10t} \Rightarrow y = ke^{-10t}$$

   et comme $y(0) = y_0 = ke^0 = k$ alors, la solution du (PC) est :

   $$y(t) = y_0 e^{-10t}$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Cranck-Nicolson :
   En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ; En intégrant l'équation, nous avons :

   $$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = -10\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt \Rightarrow y(t_{n+1}) - y(t_n) = -10\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$$

   En appliquant la méthode du trapèze pour approcher l'intégrale su deuxième membre, nous obtenons :

   $$y(t_{n+1}) - y(t_n) = -10((t_{n+1} - t_n)\frac{y(t_{n+1}) + y(t_n)}{2}) = -10(h\frac{y(t_{n+1}) + y(t_n)}{2})) = -5h(y(t_{n+1}) + y(t_n))$$

   Finalement, en utilisant l'approximation $y(t_i) \simeq y_i$ on déduit :

   $$y_{n+1} - y_n = -5h(y_{n+1} + y_n) \Rightarrow (1 + 5h)y_{n+1} = (1 - 5h)y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1 - 5h}{1 + 5h}y_n$$

3. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r (en fonction de h). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$; On a :

   $$y_{n+1} = \frac{1 - 5h}{1 + 5h}y_n = ry_n$$

   si $h \neq \frac{1}{5}$ alors $r \neq 0$ et la suite $(y_n)_n$ est géométrique de raison $r = \frac{1-5h}{1+5h}$.
   En plus, h étant positif,

   $$|1 - 5h| < |1| + |-5h| = 1 + 5h = |1 + 5h| \Rightarrow |r| = \frac{|1 - 5h|}{|1 + 5h|} < 1$$

4. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n.

$$r = \frac{1-5h}{1+5h} \geq 0 \Rightarrow 1 - 5h \geq 0 \Rightarrow h \leq \frac{1}{5}$$

En utilisant les propriétés des suites géométriques et en supposant $h < \frac{1}{5}$ on a :

$$y_n = y_0 r^n = y_0 (\frac{1-5h}{1+5h})^n$$

5. Soit n^* tel que : $T - h < hn^* \leq T$, on a : $y_{n^*} = y_0(\frac{1-5h}{1+5h})^{n^*}$ et comme $h > 0$:

$$\frac{T}{h} - 1 < n^* \leq \frac{T}{h} \Longrightarrow (\frac{1-5h}{1+5h})^{\frac{T}{h}-1} < (\frac{1-5h}{1+5h})^{n^*} \leq (\frac{1-5h}{1+5h})^{\frac{T}{h}}$$

On utilisant les fonction exponentielle et logarithme, nous obtenons :

$$\lim_{h \to 0} (\frac{1-5h}{1+5h})^{\frac{T}{h}-1} = \lim_{h \to 0} (\frac{1-5h}{1+5h})^{\frac{T}{h}} = e^{-10T}$$

Donc,

$$\lim_{h \to 0} y_{n^*} = y_0 e^{-10T}$$

6. Le schéma progressif d'Euler s'écrit :

$$u_{n+1} = u_n + hf(t, u_n) = u_n + h(-10u_n) = (1 - 10h)u_n$$

$(u_n)_n$ est géométrique de raison $1 - 10h$ et

$$u_n = (1 - 10h)^n y_0$$

On a :

$$0 < h < \frac{1}{10} \Longrightarrow -1 < -10h < 0 \Longrightarrow 1 - 1 < 1 - 10h < 1$$

et la suite converge vers 0. la dernière limite est calculée de la même manière que précédemment.

Exercice 2 : Considérons le problème de Cauchy : trouver $y : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t > t_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une unique solution y. Le principe des méthodes numériques est de subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en m intervalles de longueur $h = \dfrac{T - t_0}{m} = t_{i+1} - t_i$. Pour chaque noeud $t_i = t_0 + ih$, $(1 < i < m)$ on cherche la valeur inconnue y_i qui approche $y(t_i)$. Rappelons que l'ensemble des valeurs $\{y_0, y_1, ..., y_m\}$ représente la solution numérique du problème.

Dans cette exercice on va construire des nouveaux schémas numériques basés sur l'intégration de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_i et t_{i+2} :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt.$$

1. En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique explicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i. Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;
   La méthode du point milieu (ou rectangle au milieu) consiste à remplacer la fonction $g(t) = f(t, y(t))$ par la constante $g(\frac{a+b}{2}) = g(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \simeq f(t_{i+1}, y_{i+1})$:
   $$\int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t,y(t))dt = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t_{i+1},y_{i+1})dt = f(t_{i+1},y_{i+1}) \int_{t_i}^{t_{i+2}} dt = f(t_{i+1},y_{i+1})[t_{i+2}-t_i] = 2hf(t_{i+1},y_{i+1})$$
   D'ou :
   $$y(t_{i+2}) - y(t_i) = 2hf(t_{i+1},y_{i+1}) \Rightarrow y(t_{i+2}) = y(t_i) + 2hf(t_{i+1},y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+2} = y_i + 2hf(t_{i+1},y_{i+1})$$
   Le calcul de y_{i+2} nécessite les deux valeurs y_{i+1} et y_i, par conséquent, on doit donner les deux premieres valeurs de la suite :
   $y_0 = y(0)$ donnée et $y_1 = y_0^P = y_0 + hf(t_0, y_0)$ calculée par la méthode d'Euler explicite.

2. En utilisant la formule de quadrature de Simpson pour approcher le membre de droite, écrire un schéma numérique implicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i ; Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;

   Application de la méthode de Simpson avec les trois points : x_i, x_{i+1} et x_{i+2} :
   $$\int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t,y(t))dt = \frac{t_{i+2}-t_i}{6}\left[f(t_i,y(t_i)) + 4f(t_{i+1},y(t_{i+1})) + f(t_{i+2},y(t_{i+2}))\right]$$
   On a : $t_{i+2} - t_i = 2h$ et $f(t_j, y(t_j)) \simeq f(t_j, y_j)$
   d'ou :
   $$y_{i+2} - y_i = \frac{h}{3}\left[f(t_i,y_i) + 4f(t_{i+1},y_{i+1}) + f(t_{i+2},y_{i+2})\right]$$
   $$y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3}\left[f(t_i,y_i) + 4f(t_{i+1},y_{i+1}) + f(t_{i+2},y_{i+2})\right]$$
   Le calcul de y_{i+2} nécessite les deux valeurs y_{i+1} et y_i, par conséquent, on doit donner les deux premieres valeurs de la suite :
   $y_0 = y(0)$ donnée et $y_1 = y_0^P = y_0 + hf(t_0, y_0)$ calculée par la méthode d'Euler explicite.
   Remarquons que y_{i+2} figure aussi dans le second membre, donc la méthode est implicite (nécessite un calcul supplémentaire pour isoler et calculer y_{i+2}.

3. Proposer une modification du schéma a la question précédente pour qu'il devient explicite.
   Pour obtenir une méthode explicite, il suffit de remplacer, dans le second membre, y_{i+2} par une expression équivalente (par exemple, en utilisant la méthode explicite d'Euler) : $y_{i+2} = y_{i+2}^P = y_{i+1} + hf(t_{i+}, y_{i+1})$ d'ou :
   $$y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3}\left[f(t_i,y_i) + 4f(t_{i+1},y_{i+1}) + f(t_{i+2},y_{i+1} + hf(t_{i+},y_{i+1}))\right]$$

Exercice 3 : On considère le problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 10]$, définie par :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), \quad t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- exacte : La fonction $y(t) = e^{-t}$ Pour chaque méthode numérique, il faut construire la table des valeurs (t_i, y_i) :
- obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 2.5 \Rightarrow n = 4$ et $y_{i+1} = (-1, 5)^{i+1}$, $i = 0, 1, ...$

i	0	1	2	3	4
t_i	0	$2,5$	5	$7,5$	10
y_i	1	$-1,5$	$2,25$	$-3,375$	$5,0625$

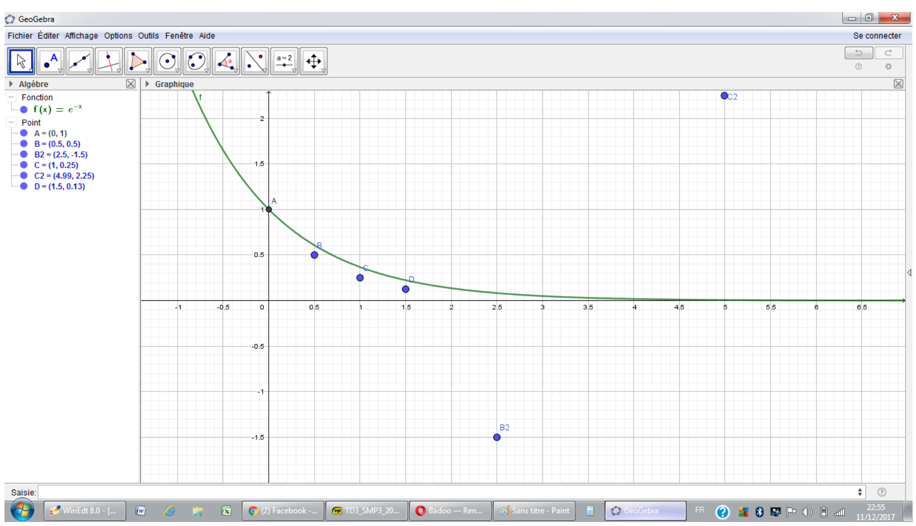
- obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 0.5 \Rightarrow n = 20$ et $y_{i+1} = (0, 5)^{i+1}$, $i = 0, 1, ...$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
Y_i	1	$0,5$	$0,25$	$0,125$	$0,0625$	$0,03125$	$0,015625$	$0,0078125$	$0,00390625$

	9	10	11	12	13
	$4,5$	5	$5,5$	6	$6,5$
	$0,001953125$	$0,001953125$	$0,0009765625$	$0,00048828125$	$0,0001220703125$

	14	15	16	17
	7	$7,5$	8	$8,5$
	$0,00006103515625$	$0,000030517578125$	$0,0000152587890625$	$0,00000762939453125$

	18	19	20
	9	$9,5$	10
	$0,000003814697265625$	$0,0000019073486328125$	$0,00000095367431640625$



La courbe représente la solution exacte, les points A, $B2$, $C2$,.... la solution approchée avec $n = 4$ et les points A, B, C,... la solution approchée avec $n = 20$.

Exercice 4 : Une deuxième approche pour la résolution numérique des équations différentielles consiste à utiliser le calcul numérique de la dérivée et de l'utiliser pour approcher $y'(t_i)$. Soit f une fonction supposée derivable sur un intervalle $[a, b]$ et $(_i)_{i=0,...,n}$ une subdivision de $[a, b]$ en n sous intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$, une valeur approché de $f'(x_i)$ peut être donnée par l'une des trois formules :

$$D_1 : \qquad f'_d(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \qquad i = 0, ..., n-1$$

$$D_2 : \qquad f'_g(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \qquad i = 1, ..., n$$

1) Une fonction f est donnée par les valeurs suivantes :

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	2	4	8	16	32

a. Calculer, de deux manières différentes, une valeur approchée de $f'(3)$,

$$f'(3) = f'(x_2) \approx f'_d(3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{f(4) - f(3)}{1} = \frac{8-4}{1} = 8$$

$$f'(3) = f'(x_2) \approx f'_g(3) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{f(3) - f(2)}{1} = \frac{4-2}{1} = 2$$

b. Sachant que f est définie par $f(x) = 2^x$, calculer $f'(3)$,

$$f(x) = 2^x = e^{x\ln 2} \Rightarrow f'(x) = \ln 2 e^{x\ln 2} = 2^x \ln 2 \Rightarrow f'(3) = 2^3 \ln 2 \approx 4,23$$

2) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit $(t_i)_{i=0,...,n}$ une subdivision de $[0, T]$ avec $t_i = 0 + i(\frac{T-0}{n})$, une solution approchée $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$ du problème (P) peut être obtenue est utilisant la dérivation numérique de la manière suivante :

a. Écrire l'équation différentielle pour $t = t_i$ puis utiliser D_1 pour reformuler l'équation différentielle en une relation entre $y(t_{i+1})$ et $y(t_i)$;

On a :

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y(t_{i+1} = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))$$

b. En utilisant l'approximation $y_i \simeq y(t_i)$, formuler la méthode de résolution ainsi obtenue (dite méthode d'Euler explicite) ;

On a :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y_{i+1}) = y_i + hf(t_i, y_i)$$

c. Formuler la méthode d'Euler implicite obtenue en utilisant la définition D_2 au lieu de D_1 ;

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{h} = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y(t_i) = y(t_{i-1}) + hf(t_i, y(t_i))$$

Donc :

$$y_i = y_{i-1} + hf(t_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

3) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P)\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) \quad t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que ce problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.
Il s'agit d'un problème de Cauchy avec $f(t,y) = 1 + y$ et on a :

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |1 + y_1 - (1 + y_2)| = |y_1 - y_2|$$

Donc f est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et le problème de Cauchy admet une solution unique.
Equation différentielle linéaire du 1er ordre : $y'(t) - y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = Ke^t$ $y(t) = -1$ est une solution particulière, donc : $y(t) = ke^t - 1$ et comme $y(0) = 0$ alors $k = 1$ donc :

$$y(t) = e^t - 1$$

2. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant **la méthode d'Euler explicite ou progressive** avec $h = 0.1$.

$$\begin{cases} \frac{y^P_{i+1} - y^P_i}{h} = f(t_i, y_i) \Rightarrow y^P_{i+1} = y_i + hf(t_i, y^P_i) \quad \text{pour } i = 1, 2, ... \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

avec

$$h = 0.1,\ f(t,y) = 1 + y,\ \text{et } y_0 = 0$$

Soit :

$$y^P_{i+1} = y^P_i + 0.1(1 + y^P_i) = 0.1 + 1.1y^P_i \text{ avec } y^P_0 = y(0) = 0 \text{ et } i = 0, 1, ..., 10$$

- Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.1$. Notons qu'une valeur approchée de $y(t_i) = y(ih) = y^P_i = 0.1 + 1.1y^P_{i-1}$ pour $i = 1, ..., 10$ donc :
$y(0.1) = y(t_1) \simeq y^P_1 = 0.1 + 1.1 \times 0 = 0.1$, $y(0.2) = y(t_2) \simeq y^P_2 = 0.1 + 1.1 \times y^P_1 = 0.1 + 1.1 \times 0.1 = 0.21$,....
Schéma d'Euler retrograde ou implicite :

$$\begin{cases} \frac{y^R_{i+1} - y^R_i}{h} = f(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y^R_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y^R_{i+1}) \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, ... \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

avec : $h = 0.1,\ f(t,y) = 1 + y,\ \text{et } y_0 = 0$
Soit :

$$y^R_{i+1} = y^R_i + 0.1(1 + y^R_{i+1}) = 0.1 + y^R_i + 0.1y^R_{i+1} \Rightarrow y^R_{i+1} = \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y^R_i \text{ avec } y^R_0 = y(0) = 0 \text{ et } i = 0, 1, ...$$

Notons qu'une valeur approchée de $y(t_i) = y(ih) = y^R_i = \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y^R_{i-1}$ pour $i = 1, ..., 10$ donc :
$y(0.1) \simeq y^R_1 = \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y^R_0 = \frac{1}{9}$, $y(0.2) = y(t_2) \simeq \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y^R_1 = \frac{1}{9} + \frac{10}{81} \simeq 0.23$,....

4. Comparer les erreurs d'approximation des deux méthodes.
   Il faut comparer l'erreur (la différence) entre la valeur exacte et les valeurs approchées, on peut utiliser le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5	...	9	10
t_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	...	0.9	1
Valeur exacte $y(t_i) = e^{t_i} - 1$	0	$e^{0.1} - 1 \simeq 0.105$	$e^{0.2} - 1 \simeq 0.221$						
Valeur approchée explicite y_i^P	0	0.1	0.21						
Valeur approchée implicite y_i^P	0	$\frac{1}{9} \simeq 0.111$	0.23						
Erreur $E_P = \|y(t_i) - y_i^p\|$	0	0.005	0.011						
Erreur $E_R = \|y(t_i) - y_i^R\|$	0	0.006	0.009						