SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE
SÉRIE N^0 3 - SOLUTION

Exercice 1 : Une fonction f est donnée par les valeurs suivantes :

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	2	4	8	16	32

- Calculer une valeur approchée de $f'(3)$,
  Progressive :

$$f'(3) = f'(x_2) \approx (Dy)_2^P = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{f(4) - f(3)}{1}$$

  Regressive ou rétrograde :

$$f'(3) = f'(x_2) \approx (Dy)_2^R = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{f(3) - f(2)}{1}$$

  Centrée :

$$f'(3) = f'(x_2) \approx (Dy)_2^C = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{f(4) - f(2)}{2}$$

- Sachant que f est définie par $f(x) = 2^x$, calculer $f'(3)$,

$$f(x) = 2^x = e^{xlog2} \Rightarrow f'(x) = log2e^{xlog2} = 2^x log2 \Rightarrow f'(3) = 2^3 log2$$

- Donner les formules de l'erreur d'approximation et comparer la valeur exacte et les valeurs approchées.
  Progressive :

$$|f'(x_2) - (Df)_2^P| \leq Kh \text{ avec } K = \frac{1}{2} \max_{x \in [x_2, x_3]} f''(x)$$

  Regressive ou rétrograde :

$$|f'(x_2) - (Df)_2^R| \leq Kh \text{ avec } K = \frac{1}{2} \max_{x \in [x_1, x_2]} f''(x)$$

  Centrée :

$$|f'(x_2) - (Df)_2^C| \leq Kh^2 \text{ avec } K = \frac{1}{6} \max_{x \in [x_1, x_3]} y'''(x)$$

  $h = 1$ reste à déterminer k en calculant à chaque fois le max sur l'intervalle associé.

Exercice 2 : Une fonction f est donnée par les valeurs suivantes :

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	1	4	9	16

- En utilisant des approximations centrées, calculer une valeur approchée de $f''(2)$,

$$f''(2) = f''(x_2) \approx \frac{f'(x_3) - f'(x_1)}{2h}$$

avec :

$$f'(x_3) \approx \frac{f(x_4) - f(x_2)}{2h} \text{ et } f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h}$$

Reste à remplacer et à calculer.

- Sachant que f est définie par $f(x) = x^2$, calculer $f''(2)$ et comparer cette valeur avec celle approchée.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2$$

- Établir la formule générale pour calculer une valeur approchée de $f''(x_i)$ en utilisant des approximations centrées.

$$f''(x_i) \approx \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_{i-1})}{2h}$$

avec

$$f'(x_{i+1}) \approx \frac{f(x_{i+2}) - f(x_i)}{2h} \text{ et } f'(x_{i-1}) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-2})}{2h}$$

Reste à remplacer et à réduire.

Exercice 3 : On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \text{y'(t)=1+y(t)} & t \in [0,1] \\ \text{y(0)=0} \end{cases}$$

- Montrer que ce problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.

Il s'agit d'un problème de Cauchy avec $f(t, y) = 1 + y$ et on a :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |1 + y_1 - (1 + y_2)| = |y_1 - y_2|$$

Donc f est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et le problème de Cauchy admet une solution unique.

Equation différentielle linéaire du 1er ordre : $y'(t) - y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = Ke^t$ $y(t) = -1$ est une solution particulière, donc : $y(t) = ke^t - 1$ et comme $y(0) = 0$ alors $k = 1$ donc :

$$y(t) = e^t - 1$$

- Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$. **Schéma d'Euler Progressif ou explicite :**

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(t_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) & \text{pour } i = 0, 1, 2, ... \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

avec

$$h = 0.1,\ f(t, y) = 1 + y,\ \text{et } y_0 = 0$$

Soit :

$$y_{i+1} = y_i + 0.1(1 + y_i) = 0.1 + 1.1y_i \text{ avec } y_0 = 0 \text{ et } i = 0, 1, ...$$

- Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.1$. **Schéma d'Euler retrograde ou implicite :**

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}) & \text{pour } i = 0, 1, 2, ... \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

avec

$$h = 0.1,\ f(t, y) = 1 + y,\ \text{et } y_0 = 0$$

Soit :

$$y_{i+1} = y_i + 0.1(1 + y_{i+1}) = 0.1 + y_i + 0.1y_{i+1} \Rightarrow y_{i+1} = \frac{10}{9} + \frac{10}{9}y_i \text{ avec } y_0 = 0 \text{ et } i = 0, 1, ...$$

- Comparer les erreurs d'approximation des deux méthodes.

Reste à faire les calculs exactes et approchés et à comparer.

Exercice 4 : La même méthode que 3

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t)=t+y(t) & t \in [0,1] \\ y(0)=1 \end{cases}$$

- Calculer des valeurs approchées de y_0, y_1, y_2 et y_3 en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.
- Sachant que la solution exacte est donnée par $y(t) = 2e^t - t - 1$, Calculer l'erreur d'approximation pour les valeurs approchées calculées précédemment. Comment varie cette erreur en fonction de i ?