SMP3 : 2018 - 2019
Anlyse Numérique et Algorithmique
serie d'exercices N°3

Exercice 1

Soit f une fonction de classe C^3, définie sur $[0, 3]$ et à valeurs réelles.

1) Déterminer le polynôme d'interpolation d'ordre 2 de f, p_2, qui prend les même valeurs que f en $x = 0, 1, 3$.

2) Déterminer la méthode de quadrature élémentaire obtenue en remplaçant l'intégrale de f sur $[0, 3]$ par celle de p_2.

3) Montrer que l'ordre de la méthode est égal à 2.

Solution de l'exercice 1

1) On utilise l méthode de lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{3} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$$
$$L_1(x) = \frac{x(x-3)}{-2} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2$$
$$L_2(x) = \frac{x(x-1)}{6} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x$$
$$\Rightarrow p_2(x) = f(0)(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1) + f(1)(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x) + f(3)(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x)$$
$$p_2(x) = \left(\frac{f(0)}{3} - \frac{f(1)}{2} + \frac{f(3)}{6}\right)x^2 + \left(-\frac{4f(0)}{3} + \frac{3f(1)}{2} - \frac{f(3)}{6}\right)x + f(0)$$

2)

$$\left(\frac{f(0)}{3} - \frac{f(1)}{2} + \frac{f(3)}{6}\right)\int_0^3 x^2dx = 9\left(\frac{f(0)}{3} - \frac{f(1)}{2} + \frac{f(3)}{6}\right)$$
$$\left(-\frac{4f(0)}{3} + \frac{3f(1)}{2} - \frac{f(3)}{6}\right)\int_0^3 xdx = \frac{9}{2}\left(-\frac{4f(0)}{3} + \frac{3f(1)}{2} - \frac{f(3)}{6}\right)$$
$$f(0)\int_0^3 dx = 3f(0)$$
$$\int_0^3 p_2(x)dx = 9\left(\tfrac{f(0)}{3} - \tfrac{f(1)}{2} + \tfrac{f(3)}{6}\right) + \tfrac{9}{2}\left(-\tfrac{4f(0)}{3} + \tfrac{3f(1)}{2} - \tfrac{f(3)}{6}\right) + 3f(0)$$
$$= f(0)(3-6+3) + f(1)(-\frac{9}{2} + \frac{27}{4}) + f(3)(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}) = -6f(0) + \frac{9}{4}f(1) + \frac{3}{4}f(3)$$

3) vérifions pour $p = 1$, $p = x$, $p = x^2$ et $p = x^4$

$p = 1 \Rightarrow -6 + \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = -3$

$p = x \Rightarrow -6 * 0 + \frac{9}{4} * 1 + \frac{3}{4} * 3 = \frac{9}{2} = \int_0^3 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{2}$

$p = x^2 \Rightarrow -6 * 0 + \frac{9}{4} * 1 + \frac{3}{4} * 9 = 9 = \int_0^3 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$

$p = x^3 \Rightarrow -6 * 0 + \frac{9}{4} * 1 + \frac{3}{4} * 27 = \frac{45}{2} \neq \int_0^3 x^3dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{3^4}{4} = \frac{81}{4}$

donc la méthode est d'ordre 2

Exercice 2 Soit f une fonction $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On considère l'approximation

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{12}\left(11f\left(-\frac{3}{5}\right) + f\left(-\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right) + 11f\left(\frac{3}{5}\right)\right).$$

Quel est le degré de précision de cette formule de quadrature ?

2. Soit g une fonction de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$, et $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ une subdivision de $[a;b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = \dfrac{b-a}{m}$.

À l'aide d'un changement de variable affine, en déduire une formule de quadrature pour l'intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx$$

En tirer une formule de quadrature composite pour l'intégrale $\int_a^b g(x)dx$

3. Écrire l'algorithme pour approcher $\int_a^b g(x)dx$

Solution de l'exercice 2

1) On vérifie avec des puissances de x

$p = 1, \quad \int_{-1}^{1} 1dx = 2, \qquad \frac{1}{12} * (11 * 1 + 1 + 1 + 11 * 1) = 2$

$p = x, \quad \int_{-1}^{1} xdx = 0, \qquad \frac{1}{12} * \left(11 * (-\frac{3}{5}) + (-\frac{1}{5}) + (\frac{1}{5}) + 11 * (\frac{3}{5})\right) = 0.$

$p = x^2 ... \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{12} * \left(11 * (-\frac{3}{5})^2 + (-\frac{1}{5})^2 + (\frac{1}{5})^2 + 11 * (\frac{3}{5})^2\right) = \frac{2}{3}$

$p = x^3 ... \int_{-1}^{1} x^3dx = 0, \qquad \frac{1}{12} * \left(11 * (-\frac{3}{5})^3 + (-\frac{1}{5})^3 + (\frac{1}{5})^3 + 11 * (\frac{3}{5})^3\right) = 0$

$p = x^4 ... \int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5}\ , \qquad \frac{1}{12} * \left(11 * (-\frac{3}{5})^4 + (-\frac{1}{5})^4 + (\frac{1}{5})^4 + 11 * (\frac{3}{5})^4\right) = \frac{446}{1875}$

le degré de précision de cette formule de quadrature est 3.

2) On utlise le changement de variable

$$x = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}u = a + ih + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}u$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx = \int_{-1}^{1} g(a + ih + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}u)\frac{h}{2}du,$$

On pose alors $f(u) = g(a + ih + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}u)\frac{h}{2}$ et on applique la formule donnée dans 1):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx \approx \frac{1}{12}\left(11f\left(-\frac{3}{5}\right)+f\left(-\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)+11f\left(\frac{3}{5}\right)\right)$$
$$\approx \frac{1}{12}\{11g(a+ih+\frac{h}{2}-\frac{3}{5}\frac{h}{2})\frac{h}{2}+\left(g(a+ih+\frac{h}{2}-\frac{1}{5}\frac{h}{2})\frac{h}{2}\right)$$
$$+g(a+ih+\frac{h}{2}+\frac{1}{5}\frac{h}{2})\frac{h}{2}+11g(a+ih+\frac{h}{2}+\frac{3}{5}\frac{h}{2})\frac{h}{2})\}$$
$$\approx \frac{h}{24}\{11g(a+\frac{h}{2}-\frac{3}{5}\frac{h}{2}+ih)+g(a+\frac{h}{2}-\frac{1}{5}\frac{h}{2}+ih)$$
$$+g(a+\frac{h}{2}+\frac{1}{5}\frac{h}{2}+ih)+11g(a+\frac{h}{2}+\frac{3}{5}\frac{h}{2}+ih))\}$$

On pose

$$\alpha = a+\frac{h}{2}-\frac{3}{5}\frac{h}{2}, \quad \beta = a+\frac{h}{2}-\frac{1}{5}\frac{h}{2}$$
$$\gamma = a+\frac{h}{2}+\frac{1}{5}\frac{h}{2}, \quad \delta = a+\frac{h}{2}+\frac{3}{5}\frac{h}{2}$$

On a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx \approx \frac{h}{24}\{11g(\alpha+ih)+g(\beta+ih)+g(\gamma+ih)+11g(\delta+ih)\}$$

D'où la formule composite

$$\int_a^b g(x)dx \approx \frac{b-a}{24m}\sum_{i=0}^{m-1}\{11g(\alpha+ih)+g(\beta+ih)+g(\gamma+ih)+11g(\delta+ih)\}.$$

3) Algorithme

$a=\quad$, $b=\quad$, $m=$

$h=\dfrac{b-a}{m}$

$I=\dfrac{b-a}{24m}\{11g(\alpha)+g(\beta)+g(\gamma)+11g(\delta)\}$; //initialisation correspondant à $i=0$.

pour $i=1:m-1$

$I \leftarrow I+\dfrac{b-a}{24m}\{11g(\alpha+ih)+g(\beta+ih)+g(\gamma+ih)+11g(\delta+ih)\}$;

fin

Execice 3 Considérons le problème de Cauchy suivant dont on suppose qu'il existe une et une seule solution :

$$\text{trouver } y:[t_0,T]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \text{ tel que}$$
$$\begin{cases} y'(t)=f(t,y(t)), & \forall t\in[t_0,T] \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

Le principe des méthodes numériques pour approcher la fonction y est de subdiviser l'intervalle $[t_0,T]$ en N intervalles de longueur $h=\dfrac{T-t_0}{N}$. Pour chaque nœud $t_n=t_0+nh$, $(1\leq n\leq N)$ on cherche la valeur inconnue u_n

qui approche $y(t_n)$ à partir de $u_0 = y_0$. L'ensemble des valeurs $\{u_0,\ u_1, ..., u_N\}$ représente la solution numérique.

Dans cette exercice on va construire des schémas numériques basés sur l'intégration approchée de l'EDO $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_n et t_{n+1} à partir de la relation

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

Les schémas d'ADAM approchent l'intégrale précédente par l'intégrale d'un polynôme interpolant f en des points donnés.

1. Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler le point $\{t_n\}$. Quel schéma reconnait-on ?

2. Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_n, t_{n+1}\}$. Quel schéma reconnait-on ?

3. Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_{n-1},\ t_n,\ t_{n+1}\}$ en proposant une adéquate initialisation de la suite. (Attention : on intègre f sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ mais on interpole f en t_{n-1}, t_n et t_{n+1}.

Solution de l'exercice 3

1) Le polynôme d'interpolation de $f(., y(.))$ en un point t_n, est le polynôme constant $p = f(t_n, y(t_n))$, par la suite $\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)dt = (t_{n+1} - t_n)\, f(t_n, y(t_n)) \approx y(t_{n+1}) - y(t_n)$, comme y_n doit être voisin de $y(t_n)$ on cherchera les y_n solution du système $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y(t_n)),\quad y_0 = y(0)$ on retrouve le schéma d'Euler explicite.

2) Le polynôme d'interpolation de $f(., y(.))$ aux points t_n, et t_{n+1} est le polynôme de degré 1, $P(t) = \dfrac{f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_n, y(t_n))}{t_{n+1} - t_n}(t - t_n) + f(t_n, y(t_n))$, par la suite

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)dt = \frac{t_{n+1} - t_n}{2}\left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + f(t_n, y(t_n))\right]$$

comme y_n doit être voisin de $y(t_n)$ on cherchera les y_n solution du système $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + f(t_n, y(t_n))\right]$

$$\Leftrightarrow y_{n+1} - \frac{h}{2} f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) = y_n + f(t_n, y(t_n)), \quad y_0 = y(0)$$

on retrouve le schéma de **Crank-Nicolson** qui est un schéma implicite.

3)Le polynôme d'interpolation de $f(., y(.))$ aux points $t_{n-1},\ t_n$, et t_{n+1} est le polynôme de degré 2.

$$P(t) = \frac{f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))}{(t_{n-1} - t_n)\,(t_{n-1} - t_{n+1})}\,(t - t_n)\,(t - t_{n+1})$$

$$+\frac{f\left(t_n, y(t_n)\right)}{\left(t_n-t_{n-1}\right)\left(t_n-t_{n+1}\right)}\left(t-t_{n-1}\right)\left(t-t_{n+1}\right)+$$
$$\frac{f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{\left(t_{n-1}-t_n\right)\left(t_{n+1}-t_{n-1}\right)}\left(t-t_n\right)\left(t-t_{n-1}\right)$$
$$P(t)=\frac{f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))}{2h^2}\left(t-t_n\right)\left(t-t_{n+1}\right)$$
$$+\frac{f\left(t_n, y(t_n)\right)}{-h^2}\left(t-t_{n-1}\right)\left(t-t_{n+1}\right)+\frac{f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{-2h^2}\left(t-t_n\right)\left(t-t_{n-1}\right)$$

On intégre $p(t)$ sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t)dt=\frac{f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))}{2h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_n\right)\left(t-t_{n+1}\right)+$$
$$\frac{f\left(t_n, y(t_n)\right)}{-h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_{n-1}\right)\left(t-t_{n+1}\right)$$
$$+\frac{f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{-2h^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_n\right)\left(t-t_{n-1}\right)$$

i)

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_n\right)\left(t-t_{n-1}\right)dt=\frac{1}{6}t_n^3-\frac{1}{2}t_n t_{n+1}^2+\frac{1}{3}t_{n+1}^3-(n-1)\frac{1}{2}t_n^3$$
$$-\frac{1}{2}(n-1)t_{n+1}^3+(n-1)t_n t_{n+1}^2$$
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_n\right)\left(t-t_{n-1}\right)dt=(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(n-1))t_{n+1}^3+\left(\frac{1}{6}-(n-1)\right)t_n^3$$
$$+\left(n-1-\frac{1}{2}\right)t_n t_{n+1}^2$$

ii)

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_{n-1}\right)\left(t-t_{n+1}\right)dt=\frac{1}{3}t_{n+1}^3-\frac{1}{3}t_n^3+\frac{1}{2}t_n^2 t_n\left[n-1\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[n+1\right]t_n^2 t_n-\frac{1}{2}t_{n+1}\left[n-1\right]t_{n+1}^2-\frac{1}{2}t_{n+1}\left[n+1\right]t_{n+1}^2$$
$$+t_{n+1}\left[n-1\right]t_{n+1}\left[n+1\right]t_{n+1}-t_n t_n\left[n-1\right]t_n\left[n+1\right]$$
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_{n-1}\right)\left(t-t_{n+1}\right)dt=$$
$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{2}(n+1)+(n-1)(n+1)\right)t_{n+1}^3$$
$$+\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{2}(n+1)-(n-1)(n+1)\right)t_n^3$$
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_{n-1}\right)\left(t-t_{n+1}\right)dt=\left(n^2-n-\frac{2}{3}\right)t_{n+1}^3+\left(-n^2+n+\frac{2}{3}\right)t_n^3$$

iii)

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_n\right)\left(t-t_{n-1}\right)dt=$$
$$\frac{1}{6}t_n^3-\frac{1}{2}t_n t_{n+1}^2+\frac{1}{3}t_{n+1}^3-\frac{1}{2}(n-1)t_n^3-\frac{1}{2}(n-1)t_{n+1}^3+(n-1)t_n t_{n+1}^2$$
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(t-t_n\right)\left(t-t_{n-1}\right)dt=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(n-1)\right)t_n^3+-\frac{1}{2}(n-1)t_n^3+\left(n-\frac{3}{2}\right)t_n t_{n+1}^3$$

On pose

$$A_n = \frac{1}{2h}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t-t_n)(t-t_{n-1})dt,\ B_n =$$
$$\frac{1}{-h}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t-t_{n-1})(t-t_{n+1})dt, \quad C = \frac{1}{-2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t-t_{n-1})(t-t_{n+1})dt.$$

En intégrant l'équation $y' = f(t, y(t))$ entre t_n et t_{n+1}, on déduit que la suite (y_n) chérchée doit être solution de système :

$$y_{n+1} - y_n = A_n f(t_{n-1}, y_{n-1})) + B_n f(t_n, y_n) + C_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

On utilise une prédiction d'Euler progressive et remplacer y_{n+1} dans le terme $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ par $\widetilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ et poser $y_1 = y_0 + hf(0, y_0)$ et on a le schéma :

$$\begin{cases} y_0 \text{ et } y_1 = y_0 + hf(0, y_0) \text{ sont données,} \\ \text{pour } n \geq 1 \text{ on pose } \widetilde{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \text{ et on a} \\ y_{n+1} = y_n + A_n f(t_{n-1}, y_{n-1}) + B_n f(t_n, y_n) + C_n f(t_{n+1}, \widetilde{y}_{n+1}) \end{cases}$$

Exercice 4 Soit $\beta > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème de Cauchy

$$(4.1) \qquad \begin{cases} y\,'(t) = -\beta y(t), & \text{pour } t > 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où y_0 est une valeur donnée. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et u_n une approximation de $y(t_n)$.

1. Écrire le schéma du trapèze (appelé aussi de Crank Nicolson) permettant de calculer u_{n+1} à partir de u_n. Sous quelle condition sur h le schéma du trapèze est-il A-stable ? Autrement dit, pour quelles valeurs de h la relation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ a-t-elle lieu ?

2. A partir du schéma du trapèze, et en utilisant une prédiction progressive de votre choix déduire le schéma de Heun. Sous quelle condition sur h le schéma de Heun est-il A-stable ?

Solution de l'exercice 4

1) En intégrant l'équation entre t_n et t_{n+1} on a $y(t_{n+1}) - y(t_n) = -\beta \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$, la méthode de trapèze appliquée à l'intégral permet d'écrir $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt \approx \frac{h}{2}(y(t_{n+1}) + y(t_n))$, on déduit alors que la suite (u_n) chérchée doit être solution de système :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{\beta h}{2}(u_{n+1} + u_n) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{\beta h}{2}\right) u_{n+1} = \left(1 - \frac{\beta h}{2}\right) u_n$$

D'où l'on a

$$\begin{cases} u_0 = y(0) = y_0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2 - \beta h}{2 + \beta h} u_n = \cdots = \left(\dfrac{2 - \beta h}{2 + \beta h}\right)^{n+1} u_0 \end{cases}$$

Puisque $\beta > 0$ et $h > 0$ on a $\left|\dfrac{2-\beta h}{2+\beta h}\right| < 1$, donc la suite u_n tend vers 0.

2) Pour un problème général $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = y_0$, la méthode de trapèzs permet d'éxprimer la solution obtenue par la relation $u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{2}\left[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\right]$, et pour éviter le calcul implicite de u_{n+1} dans ces équations, on utilise une prédiction d'Euler progressive et remplacer le u_{n+1} dans le terme $f(t_{n+1}, u_{n+1})$ par $\widehat{u}_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$. On obtient ainsi le schéma de Heun. Plus précisément, cette méthode s'écrit

$$\begin{cases} u_0 = y(0) \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{h}{2}\left(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, \widehat{u}_{n+1})\right) \end{cases}$$

En appliquant le schéma de Heun au problème (4.1) on obtient la suite définie par récurrence suivante

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left(-\beta u_n - \beta(u_n - h\beta u_n)\right) = \left(1 - h\beta + \frac{(\beta h)^2}{2}\right) u_n$$

Par induction on obtient

$$u_n = \left(1 - h\beta + \frac{(\beta h)^2}{2}\right)^n u_0$$

Donc u_n tend vers 0 si et seulement si $\left|1 - h\beta + \dfrac{(\beta h)^2}{2}\right| < 1$.

Pour $h > 0$ et $\beta > 0$ on a
$\left|1 - h\beta + \dfrac{(\beta h)^2}{2}\right| = \dfrac{(\beta h)^2}{2} - h\beta + 1 = \dfrac{(x)^2}{2} - x + 1 = \varphi(x)$

l'étude de la fonction montre que $\varphi(x) < 1$ pour $x = \beta h < 2$, en fin la suite u_n tend vers 0 si $h < \dfrac{2}{\beta}$.

Exercice 5 Soit le problème de Cauchy :

$$y'(t) + 10y(t) = 0, \qquad t > 0; \quad y(0) = y_0 \qquad (5,1)$$

1). Calculer la solution exacte de ce problème.

2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$.

Par la suite, nous nous présentons la méthode dite de Cranck-Nicolson en intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode de tramèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$. Donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n.

3) Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r. et Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$.

4) Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? et Donner l'expression de y_n en fonction de n.

5) Soit $T > 0$ fixé, soit n^* tel que $T - h < n^*h \leq T$ (donc n^* dépend de h). Montrer que

$$\lim_{h \to 0} y_{n^*} = y_0 \exp(-10T)$$

6) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définissant le schéma d'EULER explicite pour l'équation différentielle $(5,1)$. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} u_{n^*} = y_0 \exp(-10T)$$

Solution 5

Soit (PC)le problème de Cauchy donné par :

$$(PC) \begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

1. On suppose que (PC) admet une solution exacte unique. Calculons cette solution

Par séparation des variables, nous avons :

$$\begin{aligned} y\prime = -10y) \Rightarrow \frac{dy}{y} = -10dt \Rightarrow \ln|y| = -10t + c \text{ avec } c \text{ une constante} \\ \Rightarrow |y| = \exp(c)\exp(-10t) \Rightarrow y(t) = k\exp(-10t); \text{ avec } k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

et comme$y(0) = y_0 = k$ alors, la solution du (PC) est : $y(t) = y_0 \exp(-10t)$

2. Soit $h > 0$un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(tn)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Cranck -Nicolson , En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} On a

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} -10y(t)dt$$

puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer une approximation cette dernière intégrale, on a

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) \approx \frac{t_{n+1} - t_n}{2}(-10y(t_{n+1}) - 10y(t_n))$$

Alors y_i cherchés doivent être solution de schéma:

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n \approx \frac{h}{2}(-10y_{n+1} - 10y_n) = -5h(y_{n+1} + y_n) \\ \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1 - 5h}{1 + 5h} y_n \end{aligned}$$

3. Montrons que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

Il est évident que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $r = \dfrac{1-5h}{1+5h}$ Puisque $h > 0$, On a $|r| < 1$. de plus $r \neq 0$ si $\neq \dfrac{1}{5}$

4. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n.

$$r = \frac{1-5h}{1+5h} \geq 0 \Rightarrow 1-5h \geq 0 \Rightarrow h \leq \frac{1}{5}$$

En utilisant les propriétés des suites géométriques et en supposant $h < \dfrac{1}{5}$on a :

$$y_n = y_0 r^n = \left(\frac{1-5h}{1+5h}\right)^n y_0$$

5) Soit n^* tel que $T - h < n^* h \leq T \Rightarrow y_{n^*} = \left(\dfrac{1-5h}{1+5h}\right)^{n^*} y_0$

comme $h > 0 \Rightarrow \dfrac{T}{h} - 1 < n^* \leq \dfrac{T}{h}$, et donc :

$$\left(\frac{1-5h}{1+5h}\right)^{\frac{T}{h}-1} < \left(\frac{1-5h}{1+5h}\right)^{n^*} \leq \left(\frac{1-5h}{1+5h}\right)^{\frac{T}{h}}$$

Or

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-5h}{1+5h}\right)^{\frac{T}{h}-1} &= \exp\left((T-h)\tfrac{\ln(1-5h)-\ln(1+5h)}{h}\right)\\ &= \exp\left((T-h)\left(\frac{\ln(1-5h)}{h} - \frac{\ln(1+5h)}{h}\right)\right)\\ &\to \exp(T(-5-5)) = \exp(-10T)\end{aligned}$$

De même

$$\left(\frac{1-5h}{1+5h}\right)^{\frac{T}{h}} = \exp\left(T\frac{\ln(1-5h)}{h} - \frac{\ln(1+5h)}{h}\right) \to \exp(-10T)$$

On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} y_{n^*} = y_0 \exp(-10T)$.

6) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par le schéma d'Euler explicite pour l'équation différentielle $(5,1)$. est donnée par

$$u_{n+1} = u_n + hf(u_n) = (1-10h)\,u_n$$

On déduit à nouveaux que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\rho = 1-10h$

$$\Rightarrow u_n = (1-10h)^n y_0$$

On voit que cette suite converge vers 0, si $h < \dfrac{1}{10}$ (conditionnellement stable).

On a de la même façon

$$\lim_{h \to 0} u_{n^*} = y_0 \exp(-10T)$$