Exercice 1 : Soit (PC) le problème de Cauchy donné par :

$$(PC)\begin{cases} y'(t)+10y(t)=0 \\ y(0)=y_0>0 \end{cases}$$

1. On suppose que (PC) admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte) ;
   Par séparation des variables, nous avons :

$$y'=-10y \Rightarrow \frac{dy}{dt}=-10y \Rightarrow \frac{dy}{y}=-10dt \Rightarrow \ln(|y|)=-10t+c \Rightarrow |y|=e^ce^{-10t} \Rightarrow y=ke^{-10t}$$

   et comme $y(0)=y_0=ke^0=k$ alors, la solution du (PC) est :

$$y(t)=y_0e^{-10t}$$

2. Soit $h>0$ un pas de temps donné, on pose $t_n=nh$ pour $n\in\mathbb{N}$ (en particulier $t_0=0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Cranck-Nicolson :
   En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ; En intégrant l'équation, nous avons :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt=-10\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt \Rightarrow y(t_{n+1})-y(t_n)=-10\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$$

   En appliquant la méthode du trapèze pour approcher l'intégrale su deuxième membre, nous obtenons :

$$y(t_{n+1})-y(t_n)=-10((t_{n+1}-t_n)\frac{y(t_{n+1})+y(t_n)}{2})=-10(h\frac{y(t_{n+1})+y(t_n)}{2}))=-5h(y(t_{n+1})+y(t_n))$$

   Finalement, en utilisant l'approximation $y(t_i)\simeq y_i$ on déduit :

$$y_{n+1}-y_n=-5h(y_{n+1}+y_n) \Rightarrow (1+5h)y_{n+1}=(1-5h)y_n \Rightarrow y_{n+1}=\frac{1-5h}{1+5h}y_n$$

3. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r (en fonction de h). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r|<1$ pour tout $h>0$; On a :

$$y_{n+1}=\frac{1-5h}{1+5h}y_n=ry_n$$

   si $h\neq\frac{1}{5}$ alors $r\neq 0$ et la suite $(y_n)_n$ est géométrique de raison $r=\frac{1-5h}{1+5h}$.
   En plus, h étant positif,

$$|1-5h|<|1|+|-5h|=1+5h=|1+5h| \Rightarrow |r|=\frac{|1-5h|}{|1+5h|}<1$$

4. Sous quelle condition sur $h>0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n.

$$r=\frac{1-5h}{1+5h}\geq 0 \Rightarrow 1-5h\geq 0 \Rightarrow h\leq\frac{1}{5}$$

   En utilisant les propriétés des suites géométriques et en supposant $h<\frac{1}{5}$ on a :

$$y_n=y_0r^n=y_0(\frac{1-5h}{1+5h})^n$$

Exercice 2 : Considérons le problème de Cauchy : trouver $y : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > t_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une unique solution y. Le principe des méthodes numériques est de subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en m intervalles de longueur $h = \dfrac{T - t_0}{m} = t_{i+1} - t_i$. Pour chaque noeud $t_i = t_0 + ih$, $(1 < i < m)$ on cherche la valeur inconnue y_i qui approche $y(t_i)$.
Rappelons que l'ensemble des valeurs $\{y_0, y_1, ..., y_m\}$ représente la solution numérique du problème.

Dans cette exercice on va construire des nouveaux schémas numériques basés sur l'intégration de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_i et t_{i+2} :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt.$$

1. En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique explicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i. Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;
   La méthode du point milieu (ou rectangle au milieu) consiste à remplacer la fonction $g(t) = f(t, y(t))$ par la constante $g(\frac{a+b}{2}) = g(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \simeq f(t_{i+1}, y_{i+1})$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t_{i+1}, y_{i+1})dt = f(t_{i+1}, y_{i+1}) \int_{t_i}^{t_{i+2}} dt = f(t_{i+1}, y_{i+1})[t_{i+2} - t_i] = 2hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

   D'ou :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = 2hf(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y(t_{i+2}) = y(t_i) + 2hf(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+2} = y_i + 2hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

   Le calcul de y_{i+2} nécessite les deux valeurs y_{i+1} et y_i, par conséquent, on doit donner les deux premieres valeurs de la suite :
   $y_0 = y(0)$ donnée et $y_1 = y_0^P = y_0 + hf(t_0, y_0)$ calculée par la méthode d'Euler explicite.

2. En utilisant la formule de quadrature de Simpson pour approcher le membre de droite, écrire un schéma numérique implicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i ; Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;

   Application de la méthode de Simpson avec les trois points : x_i, x_{i+1} et x_{i+2} :

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt = \frac{t_{i+2} - t_i}{6} \left[f(t_i, y(t_i)) + 4f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + f(t_{i+2}, y(t_{i+2}))\right]$$

   On a : $t_{i+2} - t_i = 2h$ et $f(t_j, y(t_j)) \simeq f(t_j, y_j)$
   d'ou :

$$y_{i+2} - y_i = \frac{h}{3} \left[f(t_i, y_i) + 4f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_{i+2}, y_{i+2})\right]$$
$$y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3} \left[f(t_i, y_i) + 4f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_{i+2}, y_{i+2})\right]$$

   Le calcul de y_{i+2} nécessite les deux valeurs y_{i+1} et y_i, par conséquent, on doit donner les deux premieres valeurs de la suite :
   $y_0 = y(0)$ donnée et $y_1 = y_0^P = y_0 + hf(t_0, y_0)$ calculée par la méthode d'Euler explicite.
   Remarquons que y_{i+2} figure aussi dans le second membre, donc la méthode est implicite (nécessite un calcul supplémentaire pour isoler et calculer y_{i+2}.

3. Proposer une modification du schéma a la question précédente pour qu'il devient explicite.
   Pour obtenir une méthode explicite, il suffit de remplacer, dans le second membre, y_{i+2} par une expression équivalente (par exemple, en utilisant la méthode explicite d'Euler) : $y_{i+2} = y^P_{i+2} = y_{i+1} + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$ d'ou :

$$y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3}\left[f(t_i, y_i) + 4f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_{i+2}, y_{i+1} + hf(t_{i+}, y_{i+1}))\right]$$

Exercice 3 : On considère le problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 10]$, définie par :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), \quad t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy ;
   Par séparation des variables :

$$y' = -y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dt \Rightarrow \ln(|y|) = -t + cste \Rightarrow y = Ke^{-t}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow y = e^{-t}$$

2. Soit h le pas temporel. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire (EDO) ;

$$\begin{cases} y_{i+1} - y_i = hf(t_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) = y_i - hy_i = (1-h)y_i \quad \text{pour } i = 1, 2, ... \\ y_0 = y(0) = 1 \text{ donnée,} \end{cases}$$

3. En déduire une formulation du type :

$$y_{i+1} = g(h, i)$$

   avec $g(h, i)$ une fonction à préciser (autrement dit, l'itérée en t_i ne dépend que de h et i et ne dépend pas de y_i) ; On a

$$y_{i+1} = (1-h)y_i = (1-h)(1-h)y_{i-1} = ... = (1-h)^{i+1}y_0 = (1-h)^{i+1}$$

   On peut démontrer le résultat par récurrence.
4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour tracer les solutions :
   - exacte : La fonction $y(t) = e^{-t}$ Pour chaque méthode numérique, il faut construire la table des valeurs (t_i, y_i) :
   - obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 2.5 \Rightarrow n = 4$ et $y_{i+1} = (-1, 5)^{i+1}$, $i = 0, 1, ...$

i	0	1	2	3	4
t_i	0	$2,5$	5	$7,5$	10
y_i	1	$-1,5$	$2,25$	$-3,375$	$5,0625$

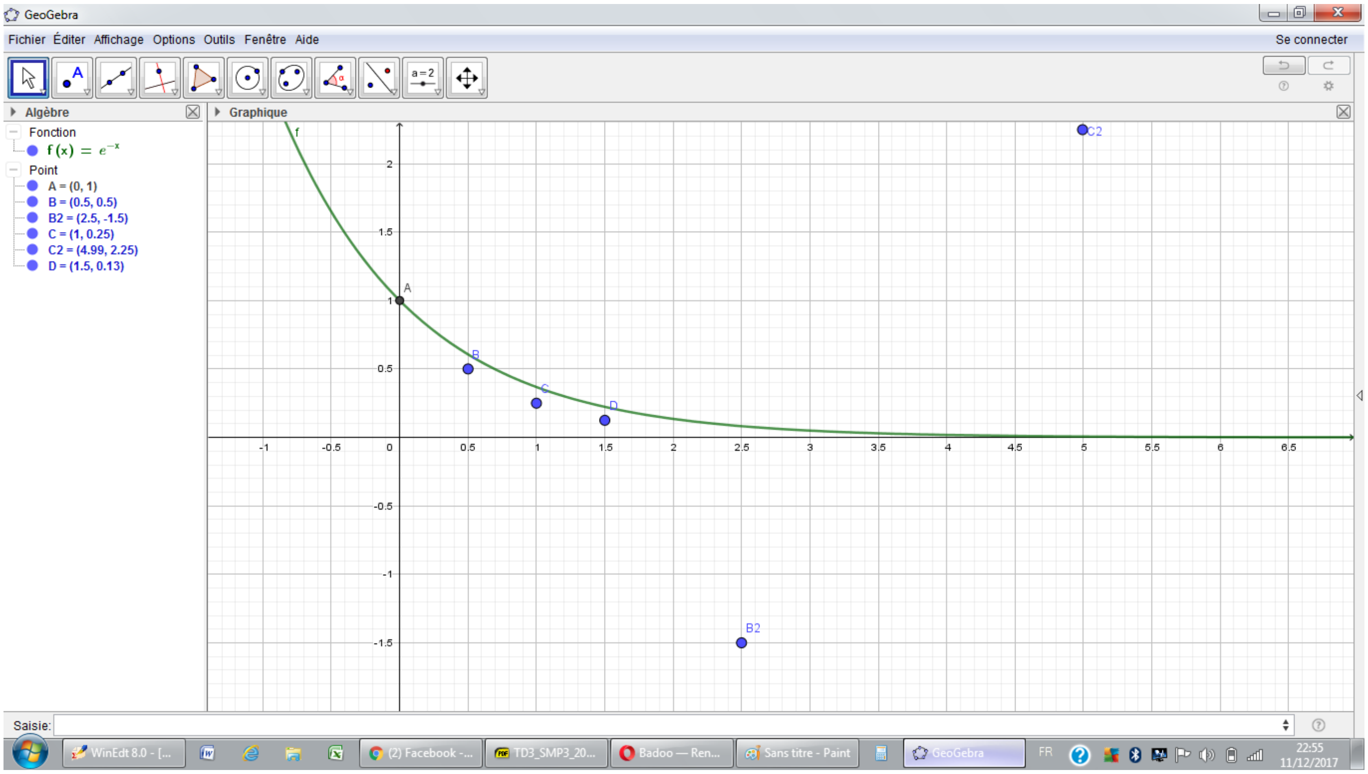
   - obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 0.5 \Rightarrow n = 20$ et $y_{i+1} = (0, 5)^{i+1}$, $i = 0, 1, ...$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
Y_i	1	$0,5$	$0,25$	$0,125$	$0,0625$	$0,03125$	$0,015625$	$0,0078125$	$0,00390625$

	9	10	11	12	13
	$4,5$	5	$5,5$	6	$6,5$
	$0,001953125$	$0,001953125$	$0,0009765625$	$0,00048828125$	$0,0001220703125$

	14	15	16	17
	7	$7,5$	8	$8,5$
	$0,00006103515625$	$0,000030517578125$	$0,0000152587890625$	$0,00000762939453125$

	18	19	20
	9	9,5	10
	0,000003814697265625	0,0000019073486328125	0,00000095367431640625



La courbe représente la solution exacte, les points A, $B2$, $C2$,.... la solution approchée avec $n = 4$ et les points A, B, C,... la solution approchée avec $n = 20$.

Exercice 4 : Une deuxième approche pour la résolution numérique des équations différentielles consiste à utiliser le calcul numérique de la dérivée et de l'utiliser pour approcher $y'(t_i)$. Soit f une fonction supposée derivable sur un intervalle $[a, b]$ et $(_i)_{i=0,\ldots,n}$ une subdivision de $[a, b]$ en n sous intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$, une valeur approché de $f'(t_i)$ peut être donnée par l'une des trois formules :

$$D_1 : \qquad f'_d(t_i) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{h} \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

$$D_2 : \qquad f'_g(t_i) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{h} \qquad i = 1, \ldots, n$$

1) Une fonction f est donnée par les valeurs suivantes :

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	2	4	8	16	32

a. Calculer, de deux manières différentes, une valeur approchée de $f'(3)$,

$$f'(3) = f'(x_2) \approx f'_d(3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{f(4) - f(3)}{1} = \frac{8-4}{1} = 8$$

$$f'(3) = f'(x_2) \approx f'_g(3) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{f(3) - f(2)}{1} = \frac{4-2}{1} = 2$$

b. Sachant que f est définie par $f(x) = 2^x$, calculer $f'(3)$,

$$f(x) = 2^x = e^{x \ln 2} \Rightarrow f'(x) = \ln 2 e^{x \ln 2} = 2^x \ln 2 \Rightarrow f'(3) = 2^3 \ln 2 \approx 4,23$$

2) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit $(t_i)_{i=0,...,n}$ une subdivision de $[0,T]$ avec $t_i = 0+i(\frac{T-0}{n})$, une solution approchée $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$ du problème (P) peut être obtenue est utilisant la dérivation numérique de la manière suivante :

a. Écrire l'équation différentielle pour $t = t_i$ puis utiliser D_1 pour reformuler l'équation différentielle en une relation entre $y(t_{i+1})$ et $y(t_i)$;

On a :

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y(t_{i+1} = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))$$

b. En utilisant l'approximation $y_i \simeq y(t_i)$, formuler la méthode de résolution ainsi obtenue (dite méthode d'Euler explicite) ;

On a :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y_{i+1}) = y_i + hf(t_i, y_i)$$

c. Formuler la méthode d'Euler implicite obtenue en utilisant la définition D_2 au lieu de D_1 ;

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{h} = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y(t_i) = y(t_{i-1}) + hf(t_i, y(t_i))$$

Donc :

$$y_i = y_{i-1} + hf(t_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

3) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que ce problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.

Il s'agit d'un problème de Cauchy avec $f(t,y) = 1 + y$ et on a :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |1 + y_1 - (1 + y_2)| = |y_1 - y_2|$$

Donc f est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et le problème de Cauchy admet une solution unique.

Equation différentielle linéaire du 1er ordre : $y'(t) - y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = Ke^t$ $y(t) = -1$ est une solution particulière, donc : $y(t) = ke^t - 1$ et comme $y(0) = 0$ alors $k = 1$ donc :

$$y(t) = e^t - 1$$

2. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant **la méthode d'Euler explicite ou progressive** avec $h = 0.1$.

$$\begin{cases} \frac{y^P_{i+1} - y^P_i}{h} = f(t_i, y_i) \Rightarrow y^P_{i+1} = y_i + hf(t_i, y^P_i) \quad \text{pour } i = 1, 2, ... \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

avec

$$h = 0.1, \ f(t,y) = 1 + y, \ \text{et } y_0 = 0$$

Soit :

$$y^P_{i+1} = y^P_i + 0.1(1 + y^P_i) = 0.1 + 1.1y^P_i \text{ avec } y^P_0 = y(0) = 0 \text{ et } i = 0, 1, ..., 10$$

- Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,...,$y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.1$. Notons qu'une valeur approchée de $y(t_i) = y(ih) = y^P_i = 0.1 + 1.1y^P_{i-1}$ pour $i = 1, ..., 10$ donc :
  $y(0.1) = y(t_1) \simeq y^P_1 = 0.1 + 1.1 \times 0 = 0.1$, $y(0.2) = y(t_2) \simeq y^P_2 = 0.1 + 1.1 \times y^P_1 = 0.1 + 1.1 \times 0.1 = 0.21$,....
  Schéma d'Euler retrograde ou implicite :

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}^R - y_i^R}{h} = f(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+1}^R = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}^R) \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, ... \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

avec

$$h = 0.1, \ f(t, y) = 1 + y, \ \text{et } y_0 = 0$$

Soit :

$$y_{i+1}^R = y_i^R + 0.1(1 + y_{i+1}^R) = 0.1 + y_i^R + 0.1 y_{i+1}^R \Rightarrow y_{i+1}^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{9} y_i^R \text{ avec } y_0^R = y(0) = 0 \text{ et } i = 0, 1, ...$$

Notons qu'une valeur approchée de $y(t_i) = y(ih) = y_i^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{9} y_{i-1}^R$ pour $i = 1, ..., 10$ donc : $y(0.1) \simeq y_1^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{9} y_0^R = \frac{1}{9}$, $y(0.2) = y(t_2) \simeq \frac{1}{9} + \frac{10}{9} y_1^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{81} \simeq 0.23$,....

4. Comparer les erreurs d'approximation des deux méthodes.

   Il faut comparer l'erreur (la différence) entre la valeur exacte et les valeurs approchées, on peut utiliser le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5	...	9	10
t_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	...	0.9	1
Valeur exacte $y(t_i) = e^{t_i} - 1$	0	$e^{0.1} - 1 \simeq 0.105$	$e^{0.2} - 1 \simeq 0.221$						
Valeur approchée explicite y_i^P	0	0.1	0.21						
Valeur approchée implicite y_i^P	0	$\frac{1}{9} \simeq 0.111$	0.23						
Erreur $E_P = \lvert y(t_i) - y_i^p \rvert$	0	0.005	0.011						
Erreur $E_R = \lvert y(t_i) - y_i^R \rvert$	0	0.006	0.009						

Les documents relatifs à ce cours sont disponibles sur : www.ferrahi.ma

---

Faculté des Sciences de Tétouan, Département de Mathématiques, BP. 2121 M'Hannech II, 93030 Tétouan Maroc.