

Exercice 1 : Soit (PC) le problème de Cauchy donné par :

$$(PC) \begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

1. On suppose que (PC) admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte) ;
2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Cranck-Nicolson :
En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ;
3. Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r (en fonction de h). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$;
4. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n .

Exercice 2 : Considérons le problème de Cauchy : trouver $y : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > t_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une unique solution y . Le principe des méthodes numériques est de subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en m intervalles de longueur $h = \frac{T - t_0}{m} = t_{i+1} - t_i$. Pour chaque noeud $t_i = t_0 + ih$, ($1 < i < m$) on cherche la valeur inconnue y_i qui approche $y(t_i)$. Rappelons que l'ensemble des valeurs $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ représente la solution numérique du problème. Dans cette exercice on va construire des nouveaux schémas numériques basés sur l'intégration de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_i et t_{i+2} :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt.$$

1. En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique explicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i . Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;
2. En utilisant la formule de quadrature de Simpson pour approcher le membre de droite, écrire un schéma numérique implicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i ; Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;
3. Proposer une modification du schéma à la question précédente pour qu'il devienne explicite.

Exercice 3 : On considère le problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 10]$, définie par :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy ;
2. Soit h le pas temporel. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire (EDO) ;

3. En déduire une formulation du type :

$$y_{i+1} = g(h, i)$$

avec $g(h, i)$ une fonction à préciser (autrement dit, l'itérée en t_i ne dépend que de h et i et ne dépend pas de y_i);

4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour déterminer les solutions :

- obtenue avec la méthode explicite d'Euler avec $h = 2.5$,
- obtenue avec la méthode explicite d'Euler avec $h = 0.5$.

Exercice 4 : Une deuxième approche pour la résolution numérique des équations différentielles consiste à utiliser le calcul numérique de la dérivée et de l'utiliser pour approcher $y'(t_i)$. Soit f une fonction supposée dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $(i)_{i=0, \dots, n}$ une subdivision de $[a, b]$ en n sous intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$, une valeur approché de $f'(x_i)$ peut être donnée par l'une des trois formules :

$$D_1 : \quad f'_d(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$D_2 : \quad f'_g(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} \quad i = 1, \dots, n$$

1) Une fonction f est donnée par les valeurs suivantes :

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	2	4	8	16	32

- Calculer, de deux manières différentes, une valeur approchée de $f'(3)$,
- Sachant que f est définie par $f(x) = 2^x$, calculer $f'(3)$ et comparer la valeur exacte et les valeurs approchées.

2) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit $(t_i)_{i=0, \dots, n}$ une subdivision de $[0, T]$ avec $t_i = 0 + i(\frac{T-0}{n})$, une solution approchée $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ du problème (P) peut être obtenue en utilisant la dérivation numérique de la manière suivante :

- Écrire l'équation différentielle pour $t = t_i$ puis utiliser D_1 pour reformuler l'équation différentielle en une relation entre $y(t_{i+1})$ et $y(t_i)$;
- En utilisant l'approximation $y_i \simeq y(t_i)$, formuler la méthode de résolution ainsi obtenue (dite méthode d'Euler explicite);
- Formuler la méthode d'Euler implicite obtenue en utilisant la définition D_2 au lieu de D_1 ;

3) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- Montrer que le problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.
- Calculer des valeurs approchées de $y(0.1), y(0.2), y(0.3), \dots, y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.
- Calculer des valeurs approchées de $y(0.1), y(0.2), y(0.3), \dots, y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.1$.

Les documents relatifs à ce cours sont disponibles sur : www.ferrahi.ma

Faculté des Sciences de Tétouan, Département de Mathématiques, BP. 2121 M'Hannech II, 93030 Tétouan Maroc.