



SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE
SÉRIE N° 3

Exercice 1 : Une fonction f est donnée par les valeurs suivantes :

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	2	4	8	16	32

- Calculer une valeur approchée de $f'(3)$,
- Sachant que f est définie par $f(x) = 2^x$, calculer $f'(3)$,
- Donner les formules de l'erreur d'approximation et comparer la valeur exacte et les valeurs approchées.

Exercice 2 : Une fonction f est donnée par les valeurs suivantes :

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	0	1	4	9	16

- En utilisant des approximations centrées, calculer une valeur approchée de $f''(2)$,
- Sachant que f est définie par $f(x) = x^2$, calculer $f''(2)$ et comparer cette valeur avec celle approchée.
- Établir la formule générale pour calculer une valeur approchée de $f''(x_i)$ en utilisant des approximations centrées.

Exercice 3 : On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t)=1+y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0)=0 \end{cases}$$

- Montrer que ce problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.
- Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,..., $y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.
- Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$,..., $y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.1$.
- Comparer les erreurs d'approximation des deux méthodes.

Exercice 4 : On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t)=t+y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0)=1 \end{cases}$$

- Calculer des valeurs approchées de y_0 , y_1 , y_2 et y_3 en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.
- Sachant que la solution exacte est donnée par $y(t) = 2e^t - t - 1$, Calculer l'erreur d'approximation pour les valeurs approchées calculées précédemment. Comment varie cette erreur en fonction de i ?