SMC3 - M20 : MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE
SÉRIE N^0 3 —— CORRECTION

Exercice 1 : Étudions la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes :

Convergence simple sur $[a,b]$: Étude de la limite de la suite $(f_n(x))_n$ en calculant $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ en fonction de x et de l'intervalle $[a,b]$ (x joue le role d'un paramètre).

Convergence uniforme sur $[a,b]$: Étude de la limite de la suite $((sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|)_n$

- $f_n(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}^+$

  Convergence simple : $f_n(x)$ est une suite géométrique de raison x :

  • $0 \leq x < 1$ la suite géométrique converge vers 0 : $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

  • $x = 1$ la suite est constante et prend la valeur 1 : $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = 1$

  • $x > 1$ la suite diverge.

  La suite de fonctions $f_n(x)$ diverge sur $\mathbb{R}^+$ mais converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{f(x)=0} & 0 \leq x < 1 \\ \text{f(1)=1} \end{cases}$$

  Convergence uniforme, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

  la premiere consiste à utiliser la réciproque de la propriété fondamentale suivante :

$$\begin{cases} f_n(.) \text{ sont continues pour tout } n \\ \text{la convergence est uniforme vers } f \end{cases} \Rightarrow f \text{ est continue}$$

  Cette réciproque se formule comme suit :

$$\begin{cases} f_n(.) \text{ sont continues pour tout } n \\ f \textbf{ n'est pas continue} \end{cases} \Rightarrow f \textbf{ la convergence n'est pas uniforme vers } f$$

  les $f_n(.)$ sont continues et f n'est pas continue (car $\lim_{x\to 1} f_n(x) = 0 \neq f(1) = 1$), alors la convergence n'est pas uniforme.

  La deuxième méthode consiste à montrer que $\lim_{n\to+\infty} sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| > 0$ et utilisant la majoration suivante (avec un bon choix de x_0 en fonction de n)

$$sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)| \geq |f_n(x_0)-f(x_0)| \text{ pour tout } x\in[a,b] \text{ et } x_0\in[a,b]$$

  Pour $x_0 = 1-\frac{1}{n} \in [0,1]$ on a :

$$sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| \geq |f_n(x_0)-f(x_0)| = |(1-\frac{1}{n})^n - 0| = e^{nlog(1-\frac{1}{n})} = e^{-\frac{log(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| \geq e^{-1} = \frac{1}{e} > 0 \text{ car } \lim_{X\to 0}\frac{log(1+X)}{X} = 1$$

  Donc, la convergence vers f n'est pas uniforme.

- $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $\mathbb{R}^+$

  x^n est une suite géométrique de raison x :

  • $x > 1$: $x^n \to +\infty$, $f_n(x) \to -\infty$ et la suite de fonctions diverge.

  • $x = 1$: $f_n(1) = 0$ et la suite de fonctions converge vers $f(1) = 0$

• $0 \leq x < 1$: $x^n \to 0$ et la suite de fonctions converge vers $f(x) = 0$

Donc, la suite de fonctions $f_n(x)$ diverge sur $\mathbb{R}^+$ et converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f(x) = 0$.
Pour $x \in [0,1]$, on pose : $g(x) = |f_n(x) - f(x)| = |x^n(1-x)| = x^n(1-x)$

$$g'(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x)$$

et $g'(x) \geq 0$ pour $x \leq \frac{n}{n+1} < 1$ donc g est croissante sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ et décroissante sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$ on en déduit :

$$sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = g(\frac{n}{n+1}) = (\frac{n}{n+1})^n(1-\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1}e^{nlog(\frac{n}{n+1})} = \frac{1}{n+1}e^{-nlog(\frac{n+1}{n})}$$

Soit

$$sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n+1}e^{-\frac{log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = 0$$

Donc, la suite de fonctions $f_n(x)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

- $f_n(x) = \frac{nxe^{-nx}}{1-e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{(-nx)e^{(-nx)}}{1-e^{-x}} = 0 \text{ car } x > 0 \text{ et } \lim_{n\to-\infty} Xe^X = 0$$

Donc, la suite de fonctions converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
D'autre part :

$$sup_{x>0}|f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(\frac{1}{n})| = \frac{(n\frac{1}{n})e^{-(n\frac{1}{n})}}{1-e^{-\frac{1}{n}}} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-\frac{1}{n}}}$$

Lorsque $n \to +\infty$, $-\frac{1}{n} \to 0^-$, la fonction exponentielle est croissante donc $e^{-\frac{1}{n}} \to 1^-$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} sup_{x>0}|f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-1}}{1-e^{-\frac{1}{n}}} = +\infty$$

Donc, la suite de fonctions $f_n(x)$ ne converge pas uniformément vers la fonction $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- $f_n(x) = \frac{\log(1+nx)}{\sqrt{(1+nx)}}$ sur $\mathbb{R}^+$ et $[a, +\infty[$ $a > 0$
Le calcul de la limite $n \to +\infty$ donne la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$, on peut écrire :

$$f_n(x) = \frac{\log((1+nx)^{\frac{1}{4}})^4}{\sqrt{(1+nx)}} = \frac{4\log(1+nx)^{\frac{1}{4}}}{(1+nx)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{4(1+nx)^{\frac{1}{4}}}{(1+nx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4}{(1+nx)^{\frac{1}{4}}} \to 0(\text{ car } \log U \leq U)$$

Donc, la suite de fonction $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$.
La convergence uniforme sur $[a, +\infty[$. On a $\log(1+nx) \geq 0$ et :

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leq \frac{4}{(1+nx)^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{4}{(1+na)^{\frac{1}{4}}}$$

car $x \geq a \Rightarrow 1+nx \geq 1+na \Rightarrow (1+nx)^{\frac{1}{4}} \geq (1+na)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{1}{(1+nx)^{\frac{1}{4}}} \leq \frac{1}{(1+na)^{\frac{1}{4}}}$
On en déduit :

$$sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{4}{(1+na)^{\frac{1}{4}}} \to 0$$

Donc, la suite de fonctions $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x) = 0$ sur $[a, +\infty[$, tandis que sur $[0, +\infty[$, on a :

$$sup_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = \frac{\log(1+n\frac{1}{n})}{\sqrt{(1+n\frac{1}{n})}} = \frac{\log(2)}{\sqrt{2}}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} sup_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)-f(x)| \geq \frac{\log(2)}{\sqrt{2}}$$

La limite ne peut pas être égale à 0 et la convergence n'est pas uniforme sur $[0,+\infty[$.

- $f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$ sur $[0,1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^{-x}}{n} = e^{-x} \text{ car } f_n(x) \text{ est une fonction rationnelle en } n$$

La suite de fonction $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x)=e^{-x}$ sur $[0,1]$. Pour la convergence uniforme, on a :

$$|f_n(x)-f(x)| = |\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} - e^{-x}| = |\frac{x^2-xe^{-x}}{n+x}| = |\frac{x(x-e^{-x})}{n+x} \leq \frac{|x|+|e^{-x}|}{n+x} \leq \frac{1}{n}$$

car $0\leq x\leq 1 \Rightarrow -1\leq -x\leq 0 \Rightarrow |e^{-x}|\leq 1$ et $0\leq |x|\leq 1$ donc $\frac{|x|+|e^{-x}|}{n+x} \leq \frac{0+1}{n+0} = \frac{1}{n}$ On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Soit

$$\lim_{n\to+\infty} sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| = 0$$

La suite de fonctions $f_n(x)$ converge uniformément vers f.

- $f_n(x) = \frac{n}{1+n(x+1)}$ sur $[0,1]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{x+1} \text{ car } f_n(x) \text{est une fonction rationnelle en } n$$

La suite de fonction $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur $[0,1]$. Pour la convergence uniforme, on a :

$$|f_n(x)-f(x)| = |\frac{n}{1+n(x+1)} - \frac{1}{x+1}| = \frac{1}{(x+1)(1+n(x+1))} \leq \frac{1}{n+1}$$

car :

$$0\leq x\leq 1 \Rightarrow 1\leq x+1\leq 2 \text{ et } n+1\leq 1+n(x+1)\leq 1+2n \Rightarrow n+1\leq (x+1)(1+n(x+1))\leq 4n+2$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

La suite de fonctions $f_n(x)$ converge uniformément vers f.

- $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$sur $[0,1]$
  - si $x\neq 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{nx}{nx} = 1$ car $f_n(x)$ est une fonction rationnelle en n
  - pour $x=0$, on a $f_n(x)=0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

  Donc, la suite de fonctions $f_n(x)$ converge sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{f(x)=1} & \text{si } x\neq 0 \\ \text{f(0)=0} \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue (les $f_n(.)$ sont continues) alors la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

- $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$

  On a $f_n(x) = (\frac{1}{1+x^2})^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{1+x^2}$
  - Si $x\neq 0$, on a $|\frac{1}{1+x^2}| < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
  - Pour $x=0$, on a $f_n(x)=1$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$

  Donc, la suite de fonctions $f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{f(x)=0} & \text{si } x\neq 0 \\ \text{f(0)=1} \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue (les $f_n(.)$ sont continues) alors la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soit $f_n(x)$ la suite des fonctions telle que $f_n(x) = x(1-x)^n$:

- Montrons que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 2[$;

  On a $(1-x)^n$ est une suite géométrique de raison $1-x$ et $x \in [0,2[\Rightarrow 1-x \in]-1,1]$, on en déduit :

  - $x \in]0,2[\Rightarrow 1-x \in]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}(1-x)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
  - Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$

  Donc la suite de fonctions $f_n(x)$ converge simplement sur $[0, 2[$ vers $f(x) = 0$.

  Remarque : La suite de fonctions $f_n(x)$ ne converge pas uniformément, en effet :

$$\sup_{x\in[0,2[} |f_n(x) - f(x)| \geq |f(2-\frac{1}{n}) - (2-\frac{1}{n})| = |f_n(2-\frac{1}{n})| \text{ car } x_0 = 2-\frac{1}{n} \in [0,2[$$

  Or,

$$|f_n(2-\frac{1}{n})| = |(2-\frac{1}{n})(1-(2-\frac{1}{n}))^n| = |(2-\frac{1}{n})(-1+\frac{1}{n})^n| = |(2-\frac{1}{n})(-1)^n(1-\frac{1}{n})^n| = (2-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{n})^n$$

  et

$$\sup_{x\in[0,2[} |f_n(x) - f(x)| \geq (2-\frac{1}{n})e^{n\log(1-\frac{1}{n})} = (2-\frac{1}{n})e^{-\frac{\log(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}}$$

  Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,2[} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{n\to+\infty}(2-\frac{1}{n})e^{-\frac{\log(1-\frac{1}{n})}{-\frac{1}{n}}} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} > 0$$

- Montrons que la série de terme général $(f_n)_n$ converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 2[$;

  Étudions la série, des sommes partielles, définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x(1-x)^k = x\sum_{k=0}^{k=n}(1-x)^k = x\frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = 1-(1-x)^{n+1}$$

  En calculant la somme des termes de la suite géométrique de raison $(1-x)$ (pour $x \neq 0$). Donc :

  • $x \in]0,2[\Rightarrow 1-x \in]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}(1-x)^{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1$

  • Pour $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$, $S_n(0) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n(0) = 0$

  La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge simplement sur $[0, 2[$ vers la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \text{f(x)=1} & x \neq 0 \\ \text{f(0)=0} \end{cases}$$

  Les fonctions $f_n(x)$ sont continues, la fonction f n'est pas contenue alors **la convergence n'est pas uniforme** (en utilisant le théorème fondamental relatif aux séries de fonctions et non pas le théorème relatif aux suites de fonctions utilisé précédemment).

- Calculons : $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$

  Sur $[0, 1]$ la série de fonctions converge simplement vers :

$$\begin{cases} \text{f(x)=1} & x \neq 0 \\ \text{f(0)=0} \end{cases}$$

  La convergence n'est pas uniforme sur l'intervalle d'intégration, nous ne pouvons pas utiliser le théorème fondamental pour échanger $\sum$ et $\int$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx$$

En utilisons une intégration par parties, calculons d'abord :

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x(1-x)^n dx = \left[\frac{-x(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}dx = -\frac{1}{n+1}\left[\frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

Soit

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Puis, on a ;

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n}\int_0^1 f_k(x)dx = \sum_{k=0}^{k=n}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}) = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{n+2}) = 1$$

Alors que $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx$ n'est pas définie (car la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ n'est pas continue sur $[0,1]$).

Exercice 3 : Soit $f_n(x)$ la suite des fonctions telle que $f_n(x) = e^{-nx^2} sin(nx^2) + \sqrt{1-x^2}$:

- Montrons que $f_n(x)$ converge simplement vers une fonction $f(x)$ sur $[-1,1]$;

- Si $x \neq 0$, on a :

$$|e^{-nx^2} sin(nx^2)| \leq e^{-nx^2} \to_{n\to+\infty} 0$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sqrt{1-x^2} = f(x)$$

- Pour $x = 0$ on a $f_n(0) = 1 = f(0)$ et la suite de fonctions $f_n(x)$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

- Montrons que pour tout $0 < a < 1$, $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ sur $[a,1]$;

On a :

$$|f_n(x) - f(x)| = |e^{-nx^2} sin(nx^2)| \leq e^{-nx^2} \leq e^{-na^2} \text{ car } x \geq a \Rightarrow -nx^2 \leq -na^2 \text{ et } e^x \text{ croissante}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} e^{-na^2} = 0$$

La suite de fonctions $f_n(x)$ converge uniformément vers $f(x)$ sur $[a,1]$.

- Montrons que sur $[0,1]$, $f_n(x)$ ne converge pas uniformément vers $f(x)$.

Ici nous ne pouvons pas utiliser le réciproque du théorème fondamental (car f est continue).

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \lim_{n\to+\infty} |f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) - f(\frac{1}{\sqrt{n}})| = |e^{-1}\sin(1)| = \frac{\sin(1)}{e} > 0$$

La suite de fonctions $f_n(x)$ ne converge pas uniformément vers $f(x)$ sur $[0,1]$.

Exercice 4 : Étudions la convergence des séries de terme général donné par :

Remarque : L'étude des séries de fonctions peut se faire à deux niveau :

- Etude de la convergence en utilisant les différents types de convergences et les critères associées (surtout ceux relatifs aux séries numériques),

- Calcul de la limite (ou somme) on utilisant la suite des fonctions des sommes partielles ou des méthodes de simplification.

- $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}^+$
  $f_n(x)$ est le terme général d'une série alternée $(-1)^n U_n$ avec $U_n = \frac{1}{n+x}$ une suite dépendant du paramètre x. On a U_n est décroissante ($\frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+x}$) et converge vers 0. Donc, d'après le théorème fondamental sur les séries alternées, la série de terme général $f_n(x)$ converge simplement.
  D'autre part :
  $$|f_n(x)| = \frac{1}{n+x} \sim \frac{1}{n} \text{ série de Reimann divergente}$$
  Alors, la série de terme général $f_n(x)$ n'est pas absolument convergente et par conséquent, il ne converge pas normalement.
  Nous ne pouvons rien déduire par rapport à la convergence uniforme car nous ne disposons pas de la somme $\sum_0^{+\infty} f_n(x)$ pour étudier cette convergence en utilisant la définition.
- $f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
  Comme $x \neq 0$, on a $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2x^2} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$. Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Reimann convergente ($\alpha = 2$) alors la série de terme général $f_n(x)$ converge simplement.
  D'autre part, pour $x \in [a, +\infty[$, on a :
  $$x \geq a \Rightarrow n + n^2x^2 \geq n + n^2a^2 \text{ et } f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x^2} \leq \frac{1}{n+n^2a^2}$$
  La série de terme général $a_n = \frac{1}{n+n^2a^2}$ est équivalente à la série de Reimann convergente $\frac{1}{n^2}$. On en déduit que la série de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente et par conséquent uniformément convergente.
  Remarque : Le série ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.
- $f_n(x) = xe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}^+$
  - Si $x \neq 0$, on a :
  $$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k^n} xe^{-kx} = \sum_{k=0}^{k^n} x(e^{-x})^k = x\sum_{k=0}^{k^n}(e^{-x})^k = x\frac{1-(e^{-x})^{n+1}}{1-e^{-x}}$$
  et
  $$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} \text{ car } x > 0 \Rightarrow 0 < e^{-x} < 1$$
  - Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et $S_n(x) = 0$. Donc, la série de terme général $f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :
  $$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} & x \neq 0 \\ \text{f(0)=0} \end{cases}$$
  D'autre part, nous avons :
  $$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{-x}{e^{-x}-1} = 1 \neq f(0)(\text{ car } e^U - 1 \sim_0 U)$$
  Donc, f n'est pas continue et la convergence n'est pas uniforme.
- $f_n(x) = x^{2n}$ sur $[0, 1[$ et $[0, a]$ avec $a \in [0, 1[$
  On a $f_n(x) = x^{2n} = (x^2)^n$ une suite géométrique de raison x^2 et $x \in [0, 1[\Rightarrow x^2 \in [0, 1[$ et :
  $$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n}(x^2)^k = \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} \text{ avec } x^2 \in [0, 1[$$
  d'ou :
  $$\sum_{k=0}^{+\infty}(x^2)^k = \lim_{n\to+\infty} S - n(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $S(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
Convergence $[0,a]$ avec $a \in [0,1[$. On a :

$$|f_n(x)| = |(x^2)^n| \leq (a^2)^n \text{ comme } |a^2| < 1 \text{ la série numérique de terme général } (a^2)^n \text{ est convergente.}$$

On en déduit que la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement convergente et pas par conséquent uniformément convergente.

- $f_n(x) = \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{log(n+1)}$ sur $[0,+\infty[$ et $[a,+\infty]$ avec $a > 0$
Pour x_0 fixée dans $[0,+\infty[$, On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 f_n(x_0) = n^2\frac{e^{-nx_0}\sin(nx_0)}{log(n+1)} = 0$$

D'après la règle de Reimann ($\alpha = 2$) la série numérique de terme général $(f_n(x_0))$ converge et donc la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge simplement.
Pour x dans $[a,+\infty[$, on a :

$$|f_n(x)| \leq \frac{e^{-na}}{log(n+1)} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} n^2\frac{e^{-na}}{log(n+1)} = 0$$

Donc la série numérique de terme général $\frac{e^{-na}}{log(n+1)}$ converge (Règle de Reimann avec $\alpha = 2$) et par conséquent la série de fonctions de terme général converge normalement sur $[a,+\infty[$ (et aussi uniformément).

- $f_n(x) = \frac{x^2}{n^2+x^3}$ sur $[0,+\infty[$

Donc, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ simplement. Pour $x \in [0,a[$, on a :

$$|f_n(x)| \leq \frac{a^2}{n^2} \text{ série numérique de Reimann convergente } (\alpha = 2)$$

On en déduit que la série de fonctions de terme général est normalement (et aussi uniformément) convergente sur tout intervalle $[0,a[$ avec $a > 0$.

Exercice 5 : Les fonctions suivantes sont-elles bien définies :
Il s'agit d'étudier la convergence de la série de terme général $f_n(x)$ et déduire que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est bien définie si la série est convergente.

- $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$
Pour $x \in \mathbb{R}$ fixée et n au voisinage de $+\infty$ on a :

$$f_n(x) \sim \frac{x^2}{n^2} \text{ série numérique de Reimann convergente } (\alpha = 2)$$

Donc, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est convergente et la somme $f(x)$ est bien définie.

- $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
Pour $x \in \mathbb{R}$ fixée et comme $e^U \geq U$ on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\frac{1}{e^{x\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{n}\frac{1}{x\sqrt{n}} = \frac{1}{xn^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ série numérique de Reimann convergente } \alpha = \frac{3}{2} > 1$$

Donc, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est convergente et la somme $f(x)$ est bien définie.

- $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$
Pour $x \in \mathbb{R}$ fixée, la série de terme général $f_n(x)$ est une série alternée avec $\frac{x^2+n}{n^2}$ positive et décroît vers 0.
Donc, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est convergente et la somme $f(x)$ est bien définie.

- $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+n^2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $[-1, 1]$
  Pour $x \in [-1, 1]$ fixée et n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{x}{(x^2+n^2)^2} \sim x\frac{1}{n^4} \text{ une série numérique de Reimann convergente } n = 4$$

  Donc, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est convergente et la somme $f(x)$ est bien définie.

Exercice 6 : Soit $f_n(x)$ la suite des fonctions telle que $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$

- Étudions la convergence simple de la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ sur $]-1, 1]$;
  Pour $x \in]-1, 1[$, la série numérique de terme général $f_n(x)$ est telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1 \text{ car } |x| < 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} x^n = 0$$

  Si $x = 1$, on a $f_n(x) = \frac{1}{2}$
  pour tout $x \in]-1, 1]$ fixée, la suite $f_n(x)$ ne converge pas vers 0, d'après la condition nécessaire de convergence des séries numériques, la série numérique $\sum f_n(x)$ ne converge pas et par conséquent la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ ne converge pas sur $]-1, 1]$
- Étudions la convergence simple de la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ sur $[a, b]$ tel que $1 < a < b$;
- Est ce que cette série converge normalement ? uniformément ?
  On a :

$$a < 1 \text{ et } a \leq x \leq b \Rightarrow 1 + a^n \leq 1 + x^n \leq 1 + b^n \text{ et } \frac{1}{1+b^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+a^n} \leq \frac{1}{a^n} = (\frac{1}{a})^n$$

$$|f_n(x)| \leq (\frac{1}{a})^n \text{ pour tout } x \in [a, b]$$

  La série numérique de terme général $u_n = (\frac{1}{a})^n$ est une série géométrique qui converge (de raison $0 < \frac{1}{a} < 1$). On en déduit que la série de de terme général $f_n(x)$ est normalement (et donc uniformément et simplement) convergente sur $[a, b]$ tel que $a > 1$
- Est ce que la somme (ou limite) de cette série est continue ?
  Les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur $[a, b]$ (fonctions rationnelles) et la convergence est uniforme donc la limite (ou la somme) est continue.

Exercice 7 : Soit la série de fonction $\sum f_n$ tel que :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

- Étudions la convergence de $\sum f_n$;
  On a :

$$|f_n(x)| = |\frac{\sin(nx)}{n^3}| \leq \frac{1}{n^3} \text{ série numérique de Reimann convergente } \alpha = 3 > 1$$

  La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement (et par conséquent uniformément et simplement) convergente.
- Montrons que $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est continue ; Les fonctions $f_n(x)$ sont continues (car $\sin$ est continues) et la convergence est uniforme donc la limite (ou la somme) $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est continue.
- Montrons que :

$$\int_0^\pi f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}(1 - (-1)^n)$$

  Les fonctions $f_n(x)$ sont continues et les la convergence uniforme, d'après le théorème fondamental, nous pouvons échanger $\sum$ et $\int$.

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} [\cos(0$$

Donc :

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}(1-(-1)^n)$$

- Montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

0n a :

$$f_n'(x) = n\frac{\cos(nx)}{n^3} = \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

et

$$|f_n'(x)| = |\frac{\cos(nx)}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2} \text{ série numérique de Reimann convergente } \alpha = 2 > 1$$

La série de fonctions de terme général $f_n'(x)$ est normalement (et par conséquent uniformément et simplement) convergente (vers $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$). D'autre part, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ converge vers f. Le théorème fondamental, nous permit de déduire que :

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

- Montrons que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^3}$$

La série de fonctions de terme général $f_n'(x)$ est uniformément convergente (vers $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$).
Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(nx)}{n^2}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin(nx)}{n^3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^3}$$