Exercice 1 :

- Construire le polynôme d'interpolation P_2 basé sur le système de trois points : $(0,2)$, $(1,1)$ et $(2,2)$, en utilisant successivement les trois méthodes (directe, Lagrange, Newton).
- Déterminer le polynôme d'interpolation P_3 basé sur le système de points : $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$.

Exercice 2 :

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ par rapport aux points 0; $\frac{3}{4}$; 1.
- Représenter sur un même graphique le polynôme et la fonction interpolée.
- Comparer, à l'aide d'une calculatrice, $f(\frac{1}{2})$ et $P_2(\frac{1}{2})$.
- Rappeler la formule de l'erreur et donner une majoration de $|E(x)| = |f(x) - P_2(x)|$.
- Évaluer l'erreur commise en considérant les points support : 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et 1.

Exercice 3 :

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[2, 2.4]$, dont on connaît les valeurs suivantes :

$$f(2) = 5.2\ ,\ f(2.1) = 6.4,\ f(2.2) = 5.8\ ,\ f(2.3) = 6.1 \text{ et } f(2.4) = 6$$

1) Établir le tableau des différences finies de f ;
2) En déduire le polynôme d'interpolation de Newton de f d'ordre 4, associé aux points $x_0 = 2$, $x_1 = 2.1$, $x_2 = 2.2$, $x_3 = 2.3$ et $x_4 = 2.4$. Peut-on donner, à partir du tableau précédent, les polynômes d'interpolation par rapport aux points x_0, x_1, x_2 et x_3 ? et par rapport aux points x_1, x_2, x_3 et x_4 ? Expliquer la réponse.
3) Donner une valeur approchée de $f(2.25)$ et donner une majoration de l'erreur $|f(x) - P_4(x)|$ si f est de classe $\mathcal{C}^5$.

Exercice 4 :

Pour calculer le zéro d'une fonction $f(x)$ inversible sur un intervalle $[a, b]$ on peut utiliser l'interpolation : après avoir évalué f sur une discrétisation x_i de $[a, b]$, on interpole l'ensemble $(y_i = f(x_i), x_i)_{i=0}^{m}$ et on obtient un polynôme $p(y)$ tel que : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = p(0)$.

1) Utiliser cette méthode pour évaluer l'unique racine r de la fonction $f(x) = \exp(x) - 2$ dans l'intervalle $[0, 1]$ avec trois points d'interpolation ;
2) Comparer ensuite le résultat obtenu avec l'approximation du zéro de f obtenue par la méthode de Newton en 3 itérations à partir de $x_0 = 0$.

Exercice 5 :

La division Euclidienne d'un polynôme V par un polynôme W non nul consiste à écrire (d'une manière unique) V sous la forme $V = Wq + r$ où q et r sont deux polynômes, le second vérifiant $deg(r) < deg(W)$; q est le quotient de la division euclidienne de V et W et r le reste de cette division.

1) Montrer que si $W(x) = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_d)$ alors r est le polynôme d'interpolation de V aux points $(a_0,\ a_1, ..., a_d)$;
2) Utiliser une division euclidienne pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de $V(x) = x^5 - 3x^4 + x - 3$ aux points $-1,\ 0,\ 1,\ 2$. Vérifier le résultat obtenu.

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2 - 3x^2$:

1) Calculer le polynôme P_0 qui interpole f au point d'abscisse $x_0 = 0$;
2) Calculer le polynôme P_1 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$;
3) Calculer le polynôme P_2 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$;

4) Calculer le polynôme P_n, $n > 3$ qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2, \cdots,$ et $x_n = n$. Est-ce que le résultat est vrai pour une fonction f quelconque.

Exercice 7 : Soit f une fonction de classe C^3, définie sur $[0, 3]$ et à valeurs réelles.

1) Déterminer le polynôme d'interpolation d'ordre 2 de f, noté $P_2(.)$, qui prend les même valeurs que $f(.)$ en $x = 0, 1, 3$;
2) Déterminer la méthode de quadrature élémentaire obtenue en remplaçant l'intégrale de $f(.)$ sur $[0, 3]$ par celle de $P_2(.)$;
3) Montrer que l'ordre de la méthode est égal à 2.

Exercice 8 : On se place sur l'intervalle $[-1, +1]$:

1) Calculer les polynômes de base de degré 3 associés aux points $\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$;
2) En déduire le polynôme d'interpolation, P_3, de degré inférieur ou égal à 3 d'une fonction f définie sur $[-1, +1]$, associé aux points $\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$;
3) Décrire la méthode de quadrature sur $[-1, +1]$ obtenue en remplaçant l'intégrale de f par celle de P_3. Quel est l'ordre de cette méthode ?

Exercice 9 : Estimer $\int_0^{5/2} f(x)dx$ à partir des données suivantes :

x	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	2	2	$1,6364$	$1,2500$	$0,9565$

en utilisant :

La méthode des rectangles à gauche composite, méthode des rectangles à droite composite et méthode des trapèzes composite.

Exercice 10 :

Estimer, à l'aide des théorèmes du cours, le nombre de sous-intervalles n nécessaire pour obtenir une approximation de :

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1 + x^2} dx$$

avec une erreur moindre que 10^{-2}, en utilisant :

La méthode du point milieu combinée, du méthode des trapèzes combinées et méthode de Simpson combinée. Commenter les résultats trouvés.