SMP3 : ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

SÉRIE N^0 2 — 2020 - 2021

Exercice 1 :

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[2, 2.4]$, dont on connaît les valeurs suivantes :

$$f(2) = 5.2 \text{ , } f(2.1) = 6.4, \ f(2.2) = 5.8 \text{ , } f(2.3) = 6.1 \text{ et } f(2.4) = 6$$

1) Établir le tableau des différences finies de f ;

x_i	$f(x_i)$	DD_1	DD_2	DD_3	DD_4
2	$5,2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2,1$	$6,4$	$\frac{6,4-5,2}{2,1-2} = 12$	$-$	$-$	$-$
$2,2$	$5,8$	$\frac{5,8-6,4}{2,2-2,1} = -6$	$\frac{-6-12}{2,2-2} = -90$	$-$	$-$
$2,3$	$6,1$	$\frac{6,1-5,8}{2,3-2,2} = 3$	$\frac{3-(-6)}{2,3-2,1} = 45$	$\frac{45+90}{2,3-2} = 450$	$-$
$2,4$	6	$\frac{6-6,1}{2,4-2,3} = -1$	$\frac{-1-3}{2,4-2,2} = -20$	$\frac{-20-45}{2,4-2,1} = \frac{-650}{3}$	$\frac{\frac{-650}{3}-450}{2,4-2} = \frac{-5000}{3}$

2) En déduire le polynôme d'interpolation de Newton de f d'ordre 4, associé aux points $x_0 = 2$, $x_1 = 2.1$, $x_2 = 2.2$, $x_3 = 2.3$ et $x_4 = 2.4$.

Le polynôme d'interpolation est donné par la méthode de Newton :

$$P_4(x) = 5,2+12(x-2)-90(x-2)(x-2,1)+450(x-2)(x-2,1)(x-2,2)-\frac{5000}{3}(x-2)(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)$$

$$P_4(x) = 5,2 + 12(x-2) - 90(x^2 - 4,1x + 4,2) + 450(x^3 - 6,3x^2 + 13,22x - 9,24)$$
$$-\frac{5000}{3}(x^4 - 8,6x^3 + 27,71x^2 - 39,646x + 21,252)$$

$$P_4(x) = -\frac{5000}{3}x^4 + x^3(\frac{43000}{3} + 450) + x^2(-\frac{138550}{3} - 2835 - 90) + x(\frac{198230}{3} + 5949 + 369 + 12)$$
$$+(-\frac{106260}{3} - 4158 - 378 - 24 + 5,2)$$

$$P_4(x) = -\frac{5000x^4}{3} + \frac{44350x^3}{3} - \frac{147325x^2}{3} + \frac{217220x}{3} - \frac{199874}{5}$$

Ou en valeurs approchées des coefficients :

$$P_4(x) = -1666.67x^4 + 14783.3x^3 - 49108.3x^2 + 72406.7x - 39974.8$$

Peut-on donner, à partir du tableau précédent, les polynômes d'interpolation par rapport aux points x_0, x_1, x_2 et x_3 ?

Oui, il suffit de d'utiliser le tableau pour les différences divisées des 4 points au lieu de 5 points (en supprimant x_4, toute la ligne est à supprimer) :

x_i	$f(x_i)$	DD_1	DD_2	DD_3	DD_4
2	$5,2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2,1$	$6,4$	$\frac{6,4-5,2}{2,1-2} = 12$	$-$	$-$	$-$
$2,2$	$5,8$	$\frac{5,8-6,4}{2,2-2,1} = -6$	$\frac{-6-12}{2,2-2} = -90$	$-$	$-$
$2,3$	$6,1$	$\frac{6,1-5,8}{2,3-2,2} = 3$	$\frac{3-(-6)}{2,3-2,1} = 45$	$\frac{45+90}{2,3-2} = 450$	$-$
$\cancel{2,4}$	$\cancel{6}$	$\cancel{\frac{6-6,1}{2,4-2,3} = -1}$	$\cancel{\frac{-1-3}{2,4-2,2} = -20}$	$\cancel{\frac{-20-45}{2,4-2,1} = \frac{-650}{3}}$	$\cancel{\frac{\frac{-650}{3}-450}{2,4-2} = \frac{-5000}{3}}$

Donc :

$$P_3(x) = 5,2 + 12(x-2) - 90(x-2)(x-2,1) + 450(x-2)(x-2,1)(x-2,2)$$

$$P_3(x) = 450x^3 - 2925x^2 + 6330x - \frac{22774}{5}$$

Par rapport aux points x_1, x_2, x_3 et x_4 ? Expliquer la réponse.

La réponse est aussi oui mais avec une méthode différente : en effet, lorsqu'on supprime x_0, il en suffit pas de supprimer la 1ère ligne mais toutes les différences divisées qui utilisent x_0 (la première valeur de chaque colonnes ! !) :

x_i	$f(x_i)$	DD_1	DD_2	DD_3	DD_4
$\cancel{2}$	$\cancel{5,2}$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2,1$	$6,4$	$\cancel{\frac{6,4-5,2}{2,1-2}=12}$	$-$	$-$	$-$
$2,2$	$5,8$	$\frac{5,8-6,4}{2,2-2,1}=-6$	$\cancel{\frac{-6-12}{2,2-2}=-90}$	$-$	$-$
$2,3$	$6,1$	$\frac{6,1-5,8}{2,3-2,2}=3$	$\frac{3-(-6)}{2,3-2,1}=45$	$\cancel{\frac{45+90}{2,3-2}=450}$	$-$
$2,4$	6	$\frac{6-6,1}{2,4-2,3}=-1$	$\frac{-1-3}{2,4-2,2}=-20$	$\frac{-20-45}{2,4-2,1}=\frac{-650}{3}$	$\cancel{\frac{\frac{-650}{3}-450}{2,4-2}=\frac{-5000}{3}}$

Donc :

$$P_3'(x) = 6,4 - 6(x-2,1) + 45(x-2,1)(2,2) - \frac{650}{3}(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)$$

$$P_3'(x) = -\frac{650x^3}{3} + 1475x^2 - \frac{10030x}{3} + \frac{12646}{5}$$

Remarque : La même méthode est à utiliser si nous supprimons plusieurs points du début ou de la fin du tableau, par contre, nous ne pouvons pas utiliser le même tableau pour déduire les différences divisées lorsque nous supprimons un point du milieu du tableau. Par exemple, pour x_0, x_1, x_3 et x_4 il faut refaire les calculs dès le début ! !

3) Donner une valeur approchée de $f(2.25)$ et donner une majoration de l'erreur $|f(x) - P_4(x)|$ si f est de classe $\mathcal{C}^5$.

On a :

$$f(2.25) \sim P_4(2,25)$$

et, il existe ξ tel que :

$$|f(x) - P_4(x)| = |(x-2)(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)(x-2,4)|\frac{|f^{(5)(\xi)}|}{5!}$$

$$|f(x) - P_4(x)| \leq \frac{M}{5!}|(x-2)(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)(x-2,4)|$$

avec : $M = \sup_{x\in[2;2,4]} |f^{(5)}(x)|$

Remarque : Nous pouvons aussi donner une approximation de $f(2.25)$ en utilisant $P_3(.)$ et $P_3'(.)$.

Exercice 2 :

Pour calculer le zéro d'une fonction $f(x)$ inversible sur un intervalle $[a, b]$ on peut utiliser l'interpolation : après avoir évalué f sur une discrétisation x_i de $[a, b]$, on interpole l'ensemble $(y_i = f(x_i), x_i)_{i=0}^m$ et on obtient un polynôme $p(y)$ tel que : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = p(0)$.

1) Utiliser cette méthode pour évaluer l'unique racine r de la fonction $f(x) = \exp(x) - 2$ dans l'intervalle $[0, 1]$ avec trois points d'interpolation ;

Localisation de la racine : Soit $f(x) = e^x - 2$, f est une fonction continue croissante (car $f'(x) = e^x > 0$) et $f(0)f(1) = (-1)(e-2) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\bar{x} \in [0, 1]$

f est inversible (admet une fonction réciproque) car f est une bijection (continue + croissante) de $[0, 1]$ vers $[-1, e-2]$.

Discrétisation de l'intervalle en trois points ($n = 2$) et $x_i = 0 + i(\frac{1-0}{2}) = \frac{i}{2}$ donc $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. Le tableau des valeurs de $f(x_i)$:

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
$y_i = f(x_i)$	-1	$e^{\frac{1}{2}} - 2$	$e - 2$

Le tableau inversé (les valeurs $(y_i, f^{-1}(y_i) = x_i)$) :

y_i	-1	$e^{\frac{1}{2}} - 2$	$e - 2$
$x_i = f^{-1}(y_i)$	0	$\frac{1}{2}$	1

Le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ sur la base des points y_i et les valeurs $x_i = f^{-1}(y_i)$ est une approximation de $f^{-1}(x)$ (nous pouvons le calculer par n'importe quelle méthode d'interpolation). Par exemple, le tableau des différences divisées est donnée par :

y_i	x_i	DD_1	DD_2
-1	0	$-$	$-$
$e^{\frac{1}{2}} - 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-0}{e^{\frac{1}{2}}-2+1} = \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}}-1)} \simeq 0,345$	$-$
$e - 2$	1	$\frac{1-\frac{1}{2}}{e-2-(e^{\frac{1}{2}}-2)} = \frac{1}{2(e-e^{\frac{1}{2}})}$	$\frac{\frac{\frac{1}{2}}{e-e^{\frac{1}{2}}}-\frac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}-1}}{e-2+1} = \frac{1}{2(e-1)}\left(\frac{1}{e-e^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}-1}\right) = \frac{1}{2(e-1)}\frac{2e^{\frac{1}{2}}-1-e}{e^{\frac{3}{2}}-2e+e^{\frac{1}{2}}}$ $= \frac{1}{2(e-1)}\frac{-(e+1-2e^{\frac{1}{2}})}{e^{\frac{1}{2}}(e-2e^{\frac{1}{2}}+1)} = \frac{-1}{2e^{\frac{1}{2}}(e-1)} \simeq -0,176$

Donc le polynôme d'interpolation sur la base des (y_i) est donné par :

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}}-1)}(x - y_0) - \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}}(e-1)}(x - y_0)(x - y_1)$$

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}}-1)}(x + 1) - \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}}(e-1)}(x + 1)(x - e^{\frac{1}{2}} + 2)$$

On a :

$$f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = f^{-1}(0) \sim P_2(0) = \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}}-1)} - \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}}(e-1)}(-e^{\frac{1}{2}} + 2) = \frac{e^{\frac{3}{2}} + e - 4e^{\frac{1}{2}} + 2}{2e^{\frac{1}{2}}(e^{\frac{1}{2}} - 1)(e^1 - 1)}$$

Soit :

$$\bar{x} \sim 0,708$$

2) Comparer ensuite le résultat obtenu avec l'approximation du zéro de f obtenue par la méthode de Newton en 3 itérations à partir de $x_0 = 0$.

D'abord, vérifiant les conditions de convergence : f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ par contre $f(x_0) = f(0) = -2$ calculons x_1 : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_k)-2}{f'(x_k)} = 0 - \frac{1-2}{1} = 1$ et $f(x_1) = e - 2 > 0$ de même signe que $f''(x)$. On en déduit que la méthode de Newton converge vers $\overline{x}$ et une valeur approchée après trois itérations est donnée par x_3 avec :

$$x_2 = 1 - \frac{e-2}{e} \sim 0.736 \text{ et } x_3 = x_2 - \frac{e^{x_2} - 2}{e^{x_2}} \sim 0.694$$

Exercice 3 : La division euclidienne d'un polynôme V par un polynôme W non nul consiste à écrire (d'une manière unique) V sous la forme $V = Wq + r$ où q et r sont deux polynômes, le second vérifiant $deg(r) < deg(W)$; q est le quotient de la division euclidienne de V et W et r le reste de cette division.

1) Montrer que si $W(x) = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_d)$ alors r est le polynôme d'interpolation de V aux points $(a_0,\ a_1, ..., a_d)$;

Soit $P_d(x)$ le polynôme d'interpolation de $V(x)$ par rapport au points a_0, a_1,...,a_d alors, on a :

$$P_d(a_i) = V(a_i) = q(a_i)W(a_i) + r(a_i) \qquad i = 0, 1, ..., d$$

Or,

$$W(a_i) = (a_i - a_0)...(a_i - a_i)...(a_i - a_d) = 0 \qquad i = 0, 1, ..., d$$

On en déduit :

$$P_d(a_i) = r(a_i) \qquad i = 0, 1, ..., d \Rightarrow (P_d - r)(a_i) = 0 \qquad i = 0, 1, ..., d$$

Remarquons que le polynôme d'interpolation $P_d(x)$ est de degré au plus égal à d et le reste de la division euclidienne est strictement inférieur au degré de $V(x)$ (qui égal à $d + 1$).

Donc, le degré du polynôme $(P_d - r)(x)$ est de degré au plus égal à d et ayant $d+1$ racines (a_0,...,a_d), on en déduit que ce polynôme est le polynôme identiquement nul : $(P_d - r)(x) = 0$ et $P_d(x) = r(x)$. (Un polynôme non identiquement nul de degré n ne peut pas avoir plus de n racines).

2) Utiliser une division euclidienne pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de $V(x) = x^5 - 3x^4 + x - 3$ aux points $-1,\ 0,\ 1,\ 2$. Vérifier le résultat obtenu.
Il suffit d'effectuer la division euclidienne de $V(x)$ par $W(x)$ avec

$$W(x) = (x+1)(x-0)(x-1)(x-2) = (x^3 - x)(x-2) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

On a :

$$V(x) = (x-1)W(x) + (-x^3 - 3x^2 + 3x - 3)$$

Donc :

$$P_3(x) = -x^3 - 3x^2 + 3x - 3$$

Pour vérifier le résultat, il suffit qu comparer les images des points x_i utilisant $V(x)$ et $P_3(x)$:

$$P_3(0) = -3 = V(0), \quad P_3(1) = -4 = V(1), \quad P_3(-1) = -8 = V(-1), ...$$

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2 - 3x^2$:

1) Calculer le polynôme P_0 qui interpôle f au point d'abscisse $x_0 = 0$;
Le polynôme P_0 est de degré zéro donc égal à une constante et il prend la même valeur que f au point $x_0 = 0$:

$$P_0(x) = P_0(x_0) = f(x_0) = f(0) = 2$$

2) Calculer le polynôme P_1 qui interpôle f aux points d'abscisse $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$;
Utilisant, par exemple, la méthode de Newton :

x_i	$f(x_i)$	$DD1$
0	2	$-$
1	-1	$\frac{-1-2}{1-0} = -3$

Donc :

$$P_1(x) = 2 - 3(x - x_0) = 2 - 3x$$

3) Calculer le polynôme P_2 qui interpôle f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$;
Complétant le tableau précédent en ajoutant la ligne $x_2 = 2$:

x_i	$f(x_i)$	$DD1$	$DD2$
0	2	$-$	$-$
1	-1	$\frac{-1-2}{1-0} = -3$	$-$
2	-10	$\frac{-10+1}{2-1} = -9$	$\frac{-9+3}{2-0} = -3$

Donc :

$$P_2(x) = 2 - 3(x - x_0) - 3(x - x_0)(x - x_1) = 2 - 3x - 3x(x-1) = 2 - 3x^2 = f(x)$$

Le résultat précédent est tout à fait normal car f est un polynôme de degré 2 et on ne peut pas trouver une meilleur approximation de f par un autre polynôme de degré 2.

4) Calculer le polynôme P_n, $n \geq 3$ qui interpôle f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\cdots$, et $x_n = n$. Est-ce que le résultat est vrai pour une fonction f quelconque.
Remarquons que nous ne pouvons pas faire des calculs (car le nombre de points n'est pas fini !), par contre, on a :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \Rightarrow (P_n - f)(x_i) = 0 \quad i = 0, 1, ..., n$$

$f(x)$ est un polynôme de degré 2 et $P_n(x)$ est un polynôme de degré $n \geq 3$ donc $(P_n - f)(x)$ est un polynôme de degré n ayant $n+1$ racines (x_0, x_1,...,x_n). On en déduit que :

$$(P_n - f)(x) = 0 \quad \text{et} \quad P_n(x) = f(x)$$

Exercice 5 :

Soit f une fonction de classe C^3, définie sur $[0,3]$ et à valeurs réelles.

1) Déterminer le polynôme d'interpolation d'ordre 2 de f, noté $P_2(.)$, qui prend les même valeurs que $f(.)$ en $x=0,1,3$;

   On a :

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x^2-4x+3)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} \frac{-1}{2}(x^2-3x)$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}(x^2-x)$$

   Donc :

$$P_2(x) = f(0)L_0(x) + f(1)L_1(x) + f(2)L_2(x)$$

2) Déterminer la méthode de quadrature élémentaire obtenue en remplaçant l'intégrale de $f(.)$ sur $[0,3]$ par celle de $P_2(.)$;

$$\int_0^3 f(x)dx \sim \int_0^3 P_2(x) = \int_0^3 (f(0)L_0(x) + f(1)L_1(x) + f(2)L_2(x))dx$$
$$= f(0)\int_0^3 L_0(x)dx + f(1)\int_0^3 L_1(x)dx + f(2)\int_0^3 L_2(x)dx$$

   On a :

$$\int_0^3 L_0(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{3}(x^2-4x+3)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{3x}{2}\right]_0^3 = 0$$
$$\int_0^3 L_1(x)dx = \int_0^3 \frac{-1}{2}(x^2-3x) = -12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{4}$$
$$\int_0^3 L_2(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{6}(x^2-x) = 16\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3}{4}$$

   Donc, on obtient la quadrature suivante :

$$P_2(x) = f(0)\times 0 + f(1)\times\frac{9}{4} + f(2)\times\frac{3}{4} = 3(0\times f(0) + \frac{3}{4}\times f(1) + \frac{1}{4}\times f(3)$$

   avec $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \frac{3}{4}$ et $\omega_2 = \frac{1}{4}$

   Remarque : cette quadrature est différente de celle obtenue avec la méthode de Simpson (Newton-cotes, $n=2$) car la répartition des points dans l'intervalle n'est pas uniforme : $2-1=1\neq 2 = 2-0$.

3) Montrer que l'ordre de la méthode est égal à 2.

   Si f est un polynôme de degré 0, 1 ou 2 alors $P_2(x) = f(x)$ et la quadrature est exacte :

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 P_2(x)$$

   Donc, l'ordre de cette méthode est au moins égale à 2. Il suffit maintenant de trouver un exemple d'un polynôme de degré 3 telle que la quadrature ne soit pas exacte : Si $f(x)=x^3$, on a :

$$\int_0^3 f(x)dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{4}$$
$$3(0\times f(0) + \frac{3}{4}\times f(1) + \frac{1}{4}\times f(2)) = 3(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\times 27) = \frac{90}{4} \neq \int_0^3 f(x)dx$$

   Donc la méthode est d'ordre 2.

Exercice 6 :

On se place sur l'intervalle $[-1,+1]$:

1) Calculer les polynômes de base de degré 3 associés aux points $\left\{-1,-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},1\right\}$;

$$L_0(x)=\frac{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(-1+\frac{1}{3})(-1-\frac{1}{3})(-1-1)}=\frac{-1}{16}(9x^2-1)(x-1)$$
$$L_1(x)=\frac{(x+1)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{-1}{3}+1)(\frac{-1}{3}-\frac{1}{3})(\frac{-1}{3}-1)}=\frac{9}{16}(3x-1)(x^2-1)$$
$$L_2(x)=\frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{1}{3}+1)(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-1)}=\frac{-9}{16}(x^2-1)(3x+1)$$
$$L_3(x)=\frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})}{(1+1)(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})}=\frac{1}{16}(x+1)(9x^2-1)$$

2) En déduire le polynôme d'interpolation, P_3, de degré inférieur ou égal à 3 d'une fonction f définie sur $[-1,+1]$, associé aux points $\{-1,-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 1\}$;

$$P_3(x)=f(-1)L_0(x)+f(-\frac{1}{3})L_1(x)+f(\frac{1}{3})L_2(x)+f(1)L_3(x)$$

3) Décrire la méthode de quadrature sur $[-1,+1]$ obtenue en remplaçant l'intégrale de f par celle de P_3. Quel est l'ordre de cette méthode ?

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx\simeq f(-1)\int_{-1}^{1} L_0(x)dx+f(-\frac{1}{3})\int_{-1}^{1} L_1(x)dx+f(\frac{1}{3})\int_{-1}^{1} L_2(x)dx+f(1)\int_{-1}^{1} L_3(x)dx$$

On a :

$$\int_{-1}^{1} L_0(x)dx=\frac{-1}{16}\int_{-1}^{1}(9x^2-1)(x-1)dx=\frac{1}{4}$$
$$\int_{-1}^{1} L_1(x)dx=\frac{9}{16}\int_{-1}^{1}(3x-1)(x^2-1)dx=\frac{3}{4}$$
$$\int_{-1}^{1} L_2(x)dx=\frac{-9}{16}\int_{-1}^{1}(x^2-1)(3x+1)dx=\frac{3}{4}$$
$$\int_{-1}^{1} L_3(x)dx=\frac{1}{16}\int_{-1}^{1}(x+1)(9x^2-1)dx=\frac{1}{4}$$

D'ou :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=2(\frac{1}{8}f(-1)+\frac{3}{8}f(\frac{-1}{3})+\frac{3}{8}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{8}f(1))$$

Cette quadrature (méthode de Simpson $\frac{3}{8}$) est donnée sur un intervalle $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{8}(f(a)+f(a+\frac{b-a}{3})+f(a+2\frac{b-a}{3})+f(a+3\frac{b-a}{3})+f(b))$$

Cette méthode est d'ordre au moins égal à 3 (si f est un polynôme de degré 3 alors $f(x)=P_3(x)$ et au plus égal à 4 (résultat général de la méthode de Newton-cotes).

Soit f est le polynôme de degré 4 tel que $f(x)=x^4$, on a :

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)dx=[\frac{x^5}{5}]_{-1}^{1}=\frac{2}{5}=\frac{14}{35}$$
$$\widetilde{I}_2=(\frac{1}{8}f(-1)+\frac{3}{8}f(\frac{-1}{3})+\frac{3}{8}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{8}f(1))=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{17}+\frac{1}{27}+1)=\frac{14}{27}\neq I$$

Donc, la méthode est d'ordre 3.

Exercice 7 :

Soit f une fonction $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ de subdivision uniforme de l'intervalle $[a,b]$ définis par $x_i = a + ih$ avec $h = \dfrac{b-a}{m}$. Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature composite pour approcher l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$:

1) Écrire le polynôme $P(.)$ qui interpole f aux points 0 et 1 ;

$$L_0(x) = \frac{x-1}{0-1} = 1-x \qquad \text{et} \qquad L_1(x) = \frac{x-0}{1-0} = x$$

Donc :

$$P_1(x) = f(0)(1-x) + f(1)(x) = (f(1)-f(0))x + f(0)$$

2) En déduire une formule de quadrature basée sur l'approximation : $\int_0^1 f(x)dx \simeq \int_0^1 p(x)dx$ et étudier le degré de précision de cette formule de quadrature ;

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \int_0^1 P_1(x)dx = \int_0^1 ((f(1)-f(0))x + f(0))dx$$

$$= (f(1)-f(0))\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + f(0)\,[x]_0^1 = \frac{f(1)-f(0)}{2} + f(0) = \frac{f(1)+f(0)}{2}$$

3) A l'aide d'un changement de variable affine, déduire une formule de quadrature pour l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$;

On pose $X = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$ $(x = x_i + (x_{i+1}-x_i)X)$ donc $dx = (x_{i+1}-x_i)dX$

D'autre part : $x = x_i \rightarrow X = 0$ et $x = x_{i+1} \rightarrow X = 1$ donc :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_0^1 f(x_i + (x_{i+1}-x_i)X)(x_{i+1}-x_i)dX$$

$$= (x_{i+1}-x_i)\int_0^1 f(x_i+(x_{i+1}-x_i)X)dX = (x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_i + (x_{i+1}-x_i)\times 0) + f(x_i + (x_{i+1}-x_i)\times 1)}{2}$$

$$= (x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

4) En utilisant le résultat au point précédent, proposer une formule de quadrature composite pour le calcul approché de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Quelle méthode de quadrature reconnaît-on ?

Commençant par répartir l'intervalle $[a,b]$ en n sous intervalles de même amplitude : $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih$ pour $i = 0, ..., n$ on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x^n} f(x)dx$$

En utilisant la question précédente pour chaque intégrale et en remarquons que $(x_{i+1}-x_i) = h = \frac{b-a}{n}$ on a :

$$\int_a^b f(x)dx = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + ... + h\frac{f(x_{i-1})+f(x_n)}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\frac{f(x_0)}{2} + hf(x_1) + ... + hf(x_{n-1}) + h\frac{f(x_n)}{2} = h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)\right)$$

On reconnaît donc la méthode des trapèzes qui est une méthode composite contrairement à la méthode du trapèze (un) qui est une méthode simple.

Exercice 8 :

Estimer $\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx$ à partir des données suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	2	2	$1,6364$	$1,2500$	$0,9565$

en utilisant :

1. La méthode des rectangles à gauche composite ;

   On a :

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x)dx + \int_2^{\frac{5}{2}} f(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \int_0^{\frac{1}{2}} f(0)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(\frac{1}{2})dx + \int_1^{\frac{3}{2}} f(1)dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(\frac{3}{2})dx + \int_2^{\frac{5}{2}} f(2)dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq f(0)\int_0^{\frac{1}{2}} dx + f(\frac{1}{2})\int_{\frac{1}{2}}^1 dx + f(1)\int_1^{\frac{3}{2}} dx + f(\frac{3}{2})\int_{\frac{3}{2}}^2 dx + f(2)\int_2^{\frac{5}{2}} dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{2}\left[f(0) + f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(\frac{3}{2}) + f(2)\right] \simeq \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} + 2 + 2 + 1,6364 + 1,2500\right]$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq 4,1932$$

   Utilisation de la formule du cours : $h = \frac{1}{2}$, $n = 5$, $a_i = 0 + ih = \frac{i}{2}$ avec $i = 0, ...5$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq h\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) = h\sum_{i=0}^{4} f(\frac{i}{2}) = \frac{1}{2}\left[f(0) + f(\frac{1}{2}) + ... + f(2)\right]$$

2. La méthode des rectangles à droite composite ;

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x)dx + \int_2^{\frac{5}{2}} f(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \int_0^{\frac{1}{2}} f(\frac{1}{2})dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(1)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} f(\frac{3}{2})dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(2)dx + \int_2^{\frac{5}{2}} f(\frac{5}{2})dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq f(\frac{1}{2})\int_0^{\frac{1}{2}} dx + f(1)\int_{\frac{1}{2}}^1 dx + f(\frac{3}{2})\int_1^{\frac{3}{2}} dx + f(2)\int_{\frac{3}{2}}^2 dx + f(\frac{5}{2})\int_2^{\frac{5}{2}} dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{2}) + f(1) + f(\frac{3}{2}) + f(2) + f(\frac{5}{2})\right] \simeq \frac{1}{2}\left[2 + 2 + 1,6364 + 1,2500 + 0.9565\right]$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq 3,92145$$

   Utilisation de la formule du cours : $h = \frac{1}{2}$, $n = 5$, $a_i = 0 + ih = \frac{i}{2}$ avec $i = 0, ...5$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq h\sum_{i=1}^{n} f(a_i) = h\sum_{i=1}^{5} f(\frac{i}{2}) = \frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{2}) + ... + f(2) + f(\frac{5}{2})\right]$$

3. La méthode des trapèzes composite.

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x)dx + \int_2^{\frac{5}{2}} f(x)dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(0) + f(\frac{1}{2})}{2}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(\frac{1}{2}) + f(1)}{2}dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{f(1) + f(\frac{3}{2})}{2}dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{f(\frac{3}{2}) + f(2)}{2}dx$$

$$+ \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{f(2) + f(\frac{5}{2})}{2}dx$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{f(0)+f(\frac{1}{2})}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx + \frac{f(\frac{1}{2})+f(1)}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} dx + \frac{f(1)+f(\frac{3}{2})}{2}\int_1^{\frac{3}{2}} dx + \frac{f(\frac{3}{2})+f(2)}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{2} dx$$
$$+\frac{f(2)+f(\frac{5}{2})}{2}\int_2^{\frac{5}{2}} dx$$
$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{2}\frac{f(0)+f(\frac{1}{2})}{2} + \frac{1}{2}\frac{f(\frac{1}{2})+f(1)}{2} + \frac{1}{2}\frac{f(1)+f(\frac{3}{2})}{2} + \frac{1}{2}\frac{f(\frac{3}{2})+f(2)}{2} + \frac{1}{2}\frac{f(2)+f(\frac{5}{2})}{2}$$
$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{4}(f(0)+f(\frac{5}{2})) + \frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{2})+f(1)+f(\frac{3}{2})+f(2)\right]$$
$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{4}(\frac{3}{2}+0.9565) + \frac{1}{2}(2+2+1.6364+1.25)$$
$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq 4,057325$$

Utilisation de la formule du cours : $h=\frac{1}{2}$, $n=5$, $a_i = 0+ih = \frac{i}{2}$ avec $i=0,...5$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f(a_0)+f(a_n)) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(a_i) = \frac{1}{4}(f(0)+f(\frac{5}{2})) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} f(\frac{i}{2})$$
$$= \frac{1}{4}(f(0)+f(\frac{5}{2})) + \frac{1}{2}\left[f(\frac{1}{2})+...+f(2)\right]$$

Exercice 9 :

Estimer, à l'aide des théorèmes du cours, le nombre de sous-intervalles n nécessaire pour obtenir une approximation de :

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

avec une erreur moindre que 10^{-2}, en utilisant :

1. La méthode du point milieu combinée ;

$$E_n = \frac{b-a}{24}(\frac{b-a}{n})^2|f''(\eta)|$$

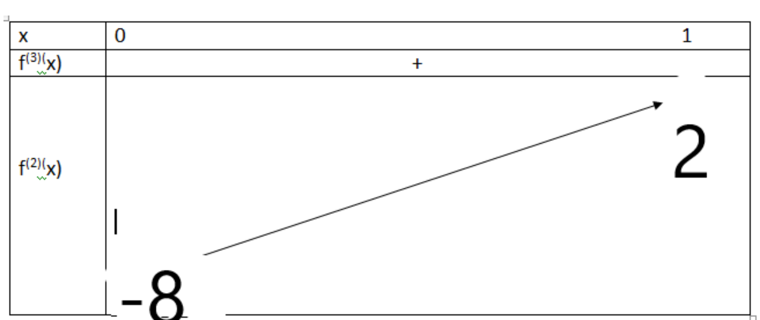
Donc :

$$E_n = \frac{1-0}{24}(\frac{1-0}{n})^2|f''(\eta)| = \frac{1}{24}(\frac{1}{n^2})|f''(\eta)|$$

cherchons une majoration de $|f''(\eta)|$, on a :

$$f'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{24x^2-8}{(1+x^2)^3}$$
$$f^{(3)}(x) = 96x\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \geq 0 \text{ sur } [0,1]$$

On en déduit : $|f''(\eta)| \leq 2$ et :



$$E_n = \frac{1}{24}(\frac{1}{n^2})|f''(\eta)| \leq 8\frac{1}{24}(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{3n^2}$$

Il suffit de prendre :

$$\frac{1}{3n^2} \leq 10^{-6} \Rightarrow 3n^2 \geq 10^6 \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{10^6}{3}} \Rightarrow n \geq 577.35$$

il suffit de considérer $n = 587$.

2. La méthode des trapèzes combinée ;

$$E_n = \frac{(b-a)^3}{12}(\frac{b-a}{n})^2|f''(\eta)|$$

Donc :

$$E_n = \frac{(1-0)^3}{12}(\frac{1-0}{n})^2|f''(\eta)| = \frac{1}{12}(\frac{1}{n^2})|f''(\eta)|$$

On en déduit :

$$E_n = \frac{1}{12}(\frac{1}{n^2})|f''(\eta)| \leq 8\frac{1}{12}(\frac{1}{n^2}) = \frac{2}{3n^2}$$

Il suffit de prendre :

$$\frac{2}{3n^2} \leq 10^{-6} \Rightarrow n^2 \geq \frac{2}{3} \times 10^6 \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{2}{3} \times 10^6 n} \geq 816.49$$

il suffit de considérer $n = 817$.

3. La méthode de Simpson combinée ;

$$E_n = \frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{4n})^4|f^{(4)}(\eta)|$$

$$E_n = \frac{1-0}{180}(\frac{1-0}{4n})^4|f^{(4)}(\eta)| = \frac{1}{180}\frac{1}{256n^4}|f^{(4)}(\eta)| = \frac{1}{46080n^4}|f^{(4)}(\eta)|$$

Il suffit donc de trouver une majoration de $|f^{(4)}(\eta)|$ sur $[-1, 1]$.

On donne :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = 96$$

Donc :

$$E_n \leq \frac{96}{46080n^4} = \frac{1}{480n^4}$$

Il suffit de choisir n tel que :

$$\frac{1}{480n^4} \leq 10^{-6}$$

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{10^6}{480}} \Rightarrow n \geq 6.75$$

Il suffit de prendre $n = 7$.

Commenter les résultats trouvés.

La méthode de Simpson combinée donne la meilleure approximation en peu d'intervalles suivie de la méthode du rectangle au centre combinée puis la méthode des trapèzes.

Exercice 10 :

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \text{y'(t)=t+y(t)} \quad t \in [0,1] \\ \text{y(0)=1} \end{cases}$$

- Calculer des valeurs approchées de y_0, y_1, y_2 et y_3 en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.
- Sachant que la solution exacte est donnée par $y(t) = 2e^t - t - 1$, Calculer l'erreur d'approximation pour les valeurs approchées calculées précédemment. Comment varie cette erreur en fonction de i ?

Notons d'abord que ce problème de Cauchy (avec $f(t, x) = t + y$) admet une solution unique car la fonction f est continue et en Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, car :

$$f|(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t + y_1 - (t + y_2)| = |y_1 - y_2|$$

- La méthode d'Euler explicite consiste à intégrer l'équation différentielle sur $[t_i, t_{i+1}]$ et d'utiliser la méthode de rectangle à cause pour évaluer le second membre. Notons que $t_i = ih$ avec $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t))dt = hf(t_i, y(t_i)) = h(t_i + y(t_i))$$
$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = h(t_i + y(t_i))$$

En utilisant l'approximation $y(t_j) \simeq y_j$, on a :

$$y_{i+1} - y_i = h(t_i + y_i) \Longrightarrow y_{i+1} = (1 + h)y_i + ht_i = (1 + h)y_i + ih^2$$

On a : $y_0 \simeq y(0) = 1$ et :

$$y_1 = (1 + h)y_0 + 0 \times h^2 == 1.1$$
$$y_2 = (1 + h)y_1 + 1 \times h^2 = 1.22$$
$$y_3 = (1 + h)y_2 + 2 \times h^2 = 1.362$$

- L'erreur est la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée ;

$$E_i = |y(t_i) - y_i|$$

$$E_0 = 0, \quad E_1 = |y(t_1) - y_1| = |y(0.1) - 1.1| \simeq |1.1103 - 1.1| \simeq 0.01$$
$$E_2 = |y(0.2) - 1.22| \simeq |1.2428 - 1.22| \simeq 0.02 \quad E_3 = |y(0.3) - 1.362| \simeq 0.03$$

L'erreur ponctuelle est de l'ordre 0.01 soit 10^2.

Exercice 11 :

Soit (PC) le problème de Cauchy donné par :

$$(PC) \begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

1. On suppose que (PC) admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte) ;
   Par séparation des variables, nous avons :

$$y' = -10y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -10y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -10dt \Rightarrow \ln(|y|) = -10t + c \Rightarrow |y| = e^c e^{-10t} \Rightarrow y = ke^{-10t}$$

   et comme $y(0) = y_0 = ke^0$ alors, la solution du (PC) est :

$$y(t) = y_0 e^{-10t}$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Cranck-Nicolson :

   En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ; En intégrant l'équation, nous avons :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = -10\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt \Rightarrow y(t_{n+1}) - y(t_n) = -10\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$$

En appliquant la méthode du trapèze pour approcher l'intégrale su deuxième membre, nous obtenons :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = -10((t_{n+1} - t_n)\frac{y(t_{n+1}) + y(t_n)}{2}) = -10(h\frac{y(t_{n+1}) + y(t_n)}{2})) = -5h(y(t_{n+1}) + y(t_n))$$

Finalement, en utilisant l'approximation $y(t_i) \simeq y_i$ on déduit :

$$y_{n+1} - y_n = -5h(y_{n+1} + y_n) \Rightarrow (1 + 5h)y_{n+1} = (1 - 5h)y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1 - 5h}{1 + 5h}y_n$$

3. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r (en fonction de h). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$; On a :

$$y_{n+1} = \frac{1 - 5h}{1 + 5h}y_n = ry_n$$

si $h \neq \frac{1}{5}$ alors $r \neq 0$ et la suite $(y_n)_n$ est géométrique de raison $r = \frac{1-5h}{1+5h}$.
En plus, h étant positif,

$$|1 - 5h| < |1| + |-5h| = 1 + 5h = |1 + 5h| \Rightarrow |r| = \frac{|1 - 5h|}{|1 + 5h|} < 1$$

4. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n.

$$r = \frac{1 - 5h}{1 + 5h} \geq 0 \Rightarrow 1 - 5h \geq 0 \Rightarrow h \leq \frac{1}{5}$$

En utilisant les propriétés des suites géométriques et en supposant $h < \frac{1}{5}$ on a :

$$y_n = y_0 r^n = y_0(\frac{1 - 5h}{1 + 5h})^n$$