SÉRIE N^0 2 — 2020 - 2021

Exercice 1 : On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[2, 2.4]$, dont on connaît les valeurs suivantes :

$$f(2) = 5.2 \text{ , } f(2.1) = 6.4, \; f(2.2) = 5.8 \text{ , } f(2.3) = 6.1 \text{ et } f(2.4) = 6$$

1) Établir le tableau des différences finies de f ;
2) En déduire le polynôme d'interpolation de Newton de f d'ordre 4, associé aux points $x_0 = 2$, $x_1 = 2.1$, $x_2 = 2.2$, $x_3 = 2.3$ et $x_4 = 2.4$. Peut-on donner, à partir du tableau précédent, les polynômes d'interpolation par rapport aux points x_0, x_1, x_2 et x_3 ? et par rapport aux points x_1, x_2, x_3 et x_4 ? Expliquer la réponse.
3) Donner une valeur approchée de $f(2.25)$ et donner une majoration de l'erreur $|f(x) - P_4(x)|$ si f est de classe $\mathcal{C}^5$.

Exercice 2 :

Pour calculer le zéro d'une fonction $f(x)$ inversible sur un intervalle $[a, b]$ on peut utiliser l'interpolation : après avoir évalué f sur une discrétisation x_i de $[a, b]$, on interpole l'ensemble $(y_i = f(x_i), x_i)_{i=0}^m$ et on obtient un polynôme $p(y)$ tel que : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = p(0)$.

1) Utiliser cette méthode pour évaluer l'unique racine r de la fonction $f(x) = \exp(x) - 2$ dans l'intervalle $[0, 1]$ avec trois points d'interpolation ;
2) Comparer ensuite le résultat obtenu avec l'approximation du zéro de f obtenue par la méthode de Newton en 3 itérations à partir de $x_0 = 0$.

Exercice 3 :

La division Euclidienne d'un polynôme V par un polynôme W non nul consiste à écrire (d'une manière unique) V sous la forme $V = Wq + r$ où q et r sont deux polynômes, le second vérifiant $deg(r) < deg(W)$; q est le quotient de la division euclidienne de V et W et r le reste de cette division.

1) Montrer que si $W(x) = (x - a_0)(x - a_1)(x - a_d)$ alors r est le polynôme d'interpolation de V aux points $(a_0, \; a_1, ..., a_d)$;
2) Utiliser une division euclidienne pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de $V(x) = x^5 - 3x^4 + x - 3$ aux points $-1, \; 0, \; 1, \; 2$. Vérifier le résultat obtenu.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2 - 3x^2$:

1) Calculer le polynôme P_0 qui interpole f au point d'abscisse $x_0 = 0$;
2) Calculer le polynôme P_1 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$;
3) Calculer le polynôme P_2 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$;
4) Calculer le polynôme P_n, $n > 3$ qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\cdots$, et $x_n = n$. Est-ce que le résultat est vrai pour une fonction f quelconque.

Exercice 5 : Soit f une fonction de classe C^3, définie sur $[0, 3]$ et à valeurs réelles.

1) Déterminer le polynôme d'interpolation d'ordre 2 de f, noté $P_2(.)$, qui prend les même valeurs que $f(.)$ en $x = 0, 1, 3$;
2) Déterminer la méthode de quadrature élémentaire obtenue en remplaçant l'intégrale de $f(.)$ sur $[0, 3]$ par celle de $P_2(.)$;
3) Montrer que l'ordre de la méthode est égal à 2.

Exercice 6 : On se place sur l'intervalle $[-1, +1]$:

1) Calculer les polynômes de base de degré 3 associés aux points $\{-1, -\frac{1}{3}, \; \frac{1}{3}, \; 1\}$;
2) En déduire le polynôme d'interpolation, P_3, de degré inférieur ou égal à 3 d'une fonction f définie sur $[-1, +1]$, associé aux points $\{-1, -\frac{1}{3}, \; \frac{1}{3}, \; 1\}$;
3) Décrire la méthode de quadrature sur $[-1, +1]$ obtenue en remplaçant l'intégrale de f par celle de P_3. Quel est l'ordre de cette méthode ?

Exercice 7 :

Soit f une fonction $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0}^{m}$ de subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ définis par $x_i = a + ih$ avec $h = \dfrac{b-a}{m}$. Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature composite pour approcher l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$:

1) Écrire le polynôme $P(.)$ qui interpole f aux points 0 et 1 ;
2) En déduire une formule de quadrature basée sur l'approximation : $\int_0^1 f(x)dx \simeq \int_0^1 p(x)dx$ et étudier le degré de précision de cette formule de quadrature ;
3) A l'aide d'un changement de variable affine, déduire une formule de quadrature pour l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$;
4) En utilisant le résultat au point précédent, proposer une formule de quadrature composite pour le calcul approché de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Quelle méthode de quadrature reconnaît-on ?

Exercice 8 :

Estimer $\int_0^{5/2} f(x)dx$ à partir des données suivantes :

x	0	$1/2$	1	$3/2$	2	$5/2$
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	2	2	$1,6364$	$1,2500$	$0,9565$

en utilisant :

1. La méthode des rectangles à gauche composite ;
2. La méthode des rectangles à droite composite ;
3. La méthode des trapèzes composite.

Exercice 9 :

Estimer, à l'aide des théorèmes du cours, le nombre de sous-intervalles n nécessaire pour obtenir une approximation de :

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

avec une erreur moindre que 10^{-2}, en utilisant :

1. La méthode du point milieu combinée ;
2. La méthode des trapèzes combinée ;
3. La méthode de Simpson combinée ;

Commenter les résultats trouvés.

Exercice 10 :

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \text{y'(t)=t+y(t)} & t \in [0, 1] \\ \text{y(0)=1} \end{cases}$$

- Calculer des valeurs approchées de y_0, y_1, y_2 et y_3 en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.
- Sachant que la solution exacte est donnée par $y(t) = 2e^t - t - 1$, Calculer l'erreur d'approximation pour les valeurs approchées calculées précédemment. Comment varie cette erreur en fonction de i ?

Exercice 11 :

Soit (PC) le problème de Cauchy donné par :

$$(PC) \begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

1. On suppose que (PC) admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte) ;
2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Cranck-Nicolson :
   En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ;
3. Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r (en fonction de h). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$;
4. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n.