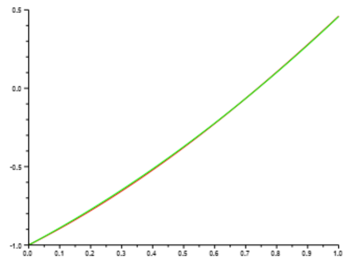


SMP3 : 2018 - 2019

Analyse Numérique et Algorithmique

serie d'exercices N°2

Exrcice 1. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ de $f(x) = x - \cos(x)$ par rapport aux points 0; 3/4; 1.

Comparer, à l'aide d'une calculatrice, $f(1/2)$ et $P_2(1/2)$.

Représenter sur un même graphique le polynôme et la fonction interpolée.

Solution de l'exercice 1

$$P_2(x) = a + bx + cx^2 \text{ vérifie } p(0) = f(0) = a = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b3/4 + c(3/4)^2 = 1 + 3/4 - \cos(3/4) = 1.018\,3 \\ b + c = 2 - \cos(1) = 1.\,4597 \end{cases},$$

$$\text{dont la solution est: } [b = 1.051\,9, c = 0.407\,80]$$

$$\Rightarrow P_2 = -1 + 1.051x + 0.407x^2$$

$$p(1/2) = -0.37275 \text{ et } f(1/2) = -0.3775826$$

//

n = 40 ; // nombre de noeuds

t=linspace(0,1,n) ;//le nombre d'éléments de la subdivision

f=t-cos(t);//l'ensemmble image de f

plot2d(t,f,style=5);//courbe de f en rouge

P_2=-1+1.051*t+0.407*t.*t; //l'ensemble image de P_2

plot2d(t,P_2,style=3); //courbe de P_2 en vert

On voit que les deux courbes sont confondues

Exercice 2 Rappellons que la division euclidienne d'un polynôme V par un polynôme W non nul consiste à écrire (de manière unique) V sous la forme $V = qW + r$ où q et r sont deux polynômes, le second vérifiant $deg(r) < deg(W)$. On appelle q le quotient de la division euclidienne de V et W et r le reste de cette division.

(a) Montrer que si $W(x) = (x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_m)$ alors r est le polynôme d'interpolation de Lagrange de V aux points $\{a_0,\ a_1, ..., a_m\}$.

(b) Utiliser une division euclidienne pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de $V(x) = x^5 - 3x^4 + x - 3$ aux points $-1,\ 0,\ 1$ et 2. Vérifier le résultat obtenu.

Solution de lexercice 2

a) De la relation $V = qW + r \Leftrightarrow V - r = qW$ on déduit $V - r$ s'annule aux points $a_i,\ i = 0, 1, .., m$ c'est à dire $V(a_i) = r(a_i)$ $(d^\circ r \leq m)$ donc r interpole V aux points $\{a_0,\ a_1, ..., a_m\}$.

b) On applique la question a) avec $W = x(x+1)(x-1)(x-2) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$

la division de $V(x) = x^5 - 3x^4 + x - 3$ par $W = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ donne

$$\left(x^5 - 3x^4 + x - 3\right) = \left(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x\right)(x-1) + \left(-x^3 - 3x^2 + 3x - 3\right)$$

donc $r = \left(-x^3 - 3x^2 + 3x - 3\right)$ est l'interpolé de V aux points $-1,\ 0,\ 1$ et 2

Exercice 3

1. Calculer le polynôme p de Lagrange qui interpole la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aux points d'abscisse $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$. et représenter les graphes de f et de p pour $x \in [1, 4]$.

2. Vérifier que l'erreur $\varepsilon(x) = f(x) - p(x)$ prend sa valeur maximale en un unique point $\widehat{x}$ dans l'intervalle $[2, 4]$. Calculer ensuite $\widehat{x}$ à 10^{-1} près (on pourra utiliser la méthode de dichotomie).

3. Comparer la fonction ε avec l'estimation théorique de l'erreur

Solution de lexercice 3

$$p(x) = a+bx+cx^2 \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 1 \\ a+2b+4c = 1/2 \\ a+4b+16c = 1/4 \end{cases} \text{, dont l solution est } \left[a = \tfrac{7}{4}, b = -\tfrac{7}{8}, c = \tfrac{1}{8}\right]$$

$$p(x) = \tfrac{7}{4} - \tfrac{7}{8}x + \tfrac{1}{8}x^2$$

La représentation graphique de f et p sur $[1, 4]$ sur le même graphe donne :

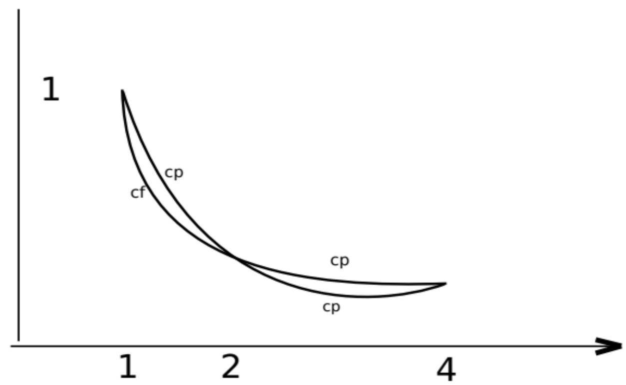
2) D'après l'étude à la question 1) on a

$$\varepsilon(x) = |f(x) - p(x)| = \begin{cases} p(x) - f(x) = \tfrac{7}{4} - \tfrac{7}{8}x + \tfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{x}\ , & \text{sur } [1,2] \\ f(x) - p(x) = \dfrac{1}{x} - \tfrac{7}{4} + \tfrac{7}{8}x - \tfrac{1}{8}x^2, & \text{sur } [2,4] \end{cases}$$

A- Cherchons $\widehat{x} \in [1, 2]$ tel que $\varepsilon(\widehat{x}) = \sup\limits_{[1,2]} \varepsilon(x)$.

Le maximum de $\varepsilon(x)$ sur $[1, 2]$ est atteint en un point où la dérivée $\varepsilon'(x) = -\frac{7}{8} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{x^2}$ s'annule, car $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = 0$. Grâce au théorème des valeurs intermédière et à la monotonie stricte de $\varepsilon'(x)$ on déduit que $\varepsilon'(x)$ admet une racine unique sur $]1, 2[$ et c'est cette racine qui réalise le $\sup\limits_{[1,2]} \varepsilon(x)$ sur $[1, 2]$ c'est à dire $\varepsilon(\widehat{x}) = \sup\limits_{[1,2]} \varepsilon(x)$ et $\varepsilon\ '(\widehat{x}) = 0$.

Pour approcher $\widehat{x}$ à 10^{-1} prés on utlise la méthode de dichotomie appliquée à $\varepsilon\ '$ sur $[1, 2]$, on porte les valeurs dans le tableau suivant



k	a_k	x_k	b_k	$\varepsilon\,'(a_k)$	$\varepsilon\,'(x_k)$	$\|x_k - \widehat{x}\| \leq$
0	1	0.5	2	0.375	-0.055555	0.5
1	1	1.25	1.5	0.375	0.0775	0.25
2	1.25	1.375	1.5	0.0775	-0.002324	0.125
3	1.25	1.3125	1.375	0.0775	0.033623	0.0625

Donc la valeur maximale de $\varepsilon(x)$ sur $[1,2]$ est voisine de

$$\varepsilon(x_3) = 0.0549898 \approx 0.055$$

B- Etudions la fonction $\varepsilon(x) = f(x) - p(x) = \dfrac{1}{x} - \frac{7}{4} + \frac{7}{8}x - \frac{1}{8}x^2$ sur l'intervalle $[2,4]$. le maximum de $\varepsilon(x)$ sur $[2,4]$ est un point $\widehat{y}$ où la dérivée $\varepsilon'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{7}{8} - \frac{1}{4}x$ s'annule. On remarque que $\varepsilon'(2) = \frac{1}{8}$ et $\varepsilon'(4) = -\frac{3}{16}$ donc grâce au théorème des valeurs intermediéres on déduit que $\varepsilon'(x)$ s'annule sur $[2,4]$.

De plus $\varepsilon''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{8 - x^3}{4x^3} < 0$ sur $]2,4[$, donc $\varepsilon'(x)$ admet une racine unique sur $]2,4[$ cette racine correspond au $\sup\limits_{[2,4]} \varepsilon(x)$ sur cet intervalle.

Pour approcher ce maximum de $\varepsilon(x)$, donc la racine de $\varepsilon'(x)$ à 10^{-1} prés, on applique à ε' la méthode de dichotomie,on porte les valeurs dans le tableau suivant

k	a_k	y_k	b_k	$\varepsilon\,'(a_k)$	$\varepsilon\,'(y_k)$	$\|y_k - \widehat{y}\| \leq$
0	2	3	4	0.125	0.0138889	1
1	3	3.5	4	0.013888	-0.081632	0.5
2	3	3.25	3.5	0.013888	-0.032174	0.25
3	3	3.125	3.25	0.013888	-0.00865	0.125
4	3	3.0625	3.125	0.013888	0.00275	0.0625

Quelques détail de calcul

soit $y_0 = \dfrac{4+2}{2} = 3$, et $\varepsilon'(3) = \dfrac{7*3*3-2*3*3*3-8}{8*3*3} = \dfrac{1}{72} \Rightarrow \widehat{y} \in [3,4]$, et $|y_k - \widehat{y}| \leq 1$

soit $y_1 = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2}$, et $\varepsilon'(\frac{7}{2}) = \dfrac{7*\frac{7}{2}*\frac{7}{2}-2*\frac{7}{2}*\frac{7}{2}*\frac{7}{2}-8}{8*\frac{7}{2}*\frac{7}{2}} = -\dfrac{4}{49} \Rightarrow \widehat{y} \in [3, 7/2]$ et $|y_k - \widehat{y}| \leq 1/2$

soit $y_2 = \dfrac{3+\frac{7}{2}}{2} = \dfrac{13}{4}$ et $\varepsilon'(\frac{13}{4}) = \dfrac{7*\frac{13}{4}*\frac{13}{4}-2*\frac{13}{4}*\frac{13}{4}*\frac{13}{4}-8}{8*\frac{13}{4}*\frac{13}{4}} = -\dfrac{87}{2704} \Rightarrow \widehat{y} \in \left[3, \dfrac{13}{4}\right]$ et $|y_k - \widehat{y}| \leq 1/4$

soit $y_3 = \dfrac{3+\frac{13}{4}}{2} = \dfrac{25}{8}$, et $\varepsilon'(\frac{25}{8}) = \dfrac{7*\frac{25}{8}*\frac{25}{8}-2*\frac{25}{8}*\frac{25}{8}*\frac{25}{8}-8}{8*\frac{25}{8}*\frac{25}{8}} = -\dfrac{173}{20\,000} \Rightarrow \widehat{y} \in \left[3, \dfrac{25}{8}\right]$ et $|y_k - \widehat{y}| \leq 1/8$

soit $x_4 = \left(\dfrac{25}{8}+3\right)\dfrac{1}{2} = 3.062\,5$ alors $|y_4 - \widehat{y}| \leq \left(\dfrac{25}{8}-3\right) * \dfrac{1}{2} = 0.062\,5 \leq 10^{-1}$

Donc l'erreur commise peut être calculer en utilisant y_4,

$$\sup_{[2,4]}\varepsilon(x) \approx \varepsilon(y_4) = \frac{1}{3.062\,5} - \tfrac{7}{4} + \tfrac{7}{8} * 3.062\,5 - \frac{1}{8} * (3.062\,5)^2 = 8.385\,5 \times 10^{-2} \approx 0.084$$

ConclusionOn constate qu'on bien $\varepsilon(y_4) \approx 0.084 > \varepsilon(x_3) = 0.0549898 \approx 0.055$

Donc le $\sup \varepsilon(x)$ est atteint sur l'intervalle $[2,4]$.

3) La coparaison avec la valeur de l'erreur donnée par la formule générale

$$|E(f)| \leq \frac{1}{(m+1)!} \sup |f^{(m+1)}| \sup |w|, \text{ où } m = 2,$$
$$\sup \left| f^{(3)}(x) \right| = \sup \left| -6x^{-4} \right| = 6, \text{ et}$$
$$\sup |w| = \sup |(x-1)(x-2)(x-4)| = \sup_{[2,4]} \left| x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \right| \leq 2$$
$$|E(f)| \leq \frac{6*2}{3!} = 2$$

On constate que la majoration de l'erreur donnée par la formule générale est beaucoup moins précise que l'erreur établi par la méthode utilisée à la question 2).

Exercice 4 Construire le polynôme P qui interpole les points $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$. en utilisant

a) la méthode directe
b) la méthode de la grange
c) la méthode de newton

Solution de lexercice 4

a) la méthode directe, on pose $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ et on résoud le système

$$\begin{cases} p(0) = a = 2 \\ p(1) = a + b + c + d = 1 \\ p(2) = a + 2b + 4c + 8d = 2 \\ p(3) = a + 3b + 9c + 27d = 3 \end{cases}$$

dont la solution est: $\left[a = 2, b = -\frac{8}{3}, c = 2, d = -\frac{1}{3}\right]$ donc

$$p(x) = 2 - \tfrac{8}{3}x + 2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3$$

b) la méthode de la grange, On calcule les polynôme caractéristiques de Lagrange L_i

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6},\ L_1(x) = \frac{x(x-2)(x-3)}{2}$$
$$L_2(x) = \frac{x(x-1)(x-3)}{-2},\ L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$
$$p(x) = 2L_0 + L_1 + 2L_2 + 3L_3 =$$
$$2 * \tfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6} + \tfrac{x(x-2)(x-3)}{2} + 2 * \tfrac{x(x-1)(x-3)}{-2} + 3 * \tfrac{x(x-1)(x-2)}{6} =$$
$$-\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \tfrac{8}{3}x + 2$$

c) la méthode de newton, Calculons la base de Newton
$w_0 = 1,\ w_1 = x,\ w_2(x) = x(x-1),\ w_3(x) = x(x-1)(x-2)$

i	x_i	$y_i = f[x_i]$	$f[x_{i-1} - x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	2			
1	1	1	-1		
2	2	2	1	1	
3	3	3	1	0	$-1/3$

$$p(x) = 2w_0 - w_1 + w_2 - \tfrac{1}{3}w_3$$
$$= 2 - (x) + x(x-1) - \tfrac{1}{3}x(x-1)(x-2) = -\tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \tfrac{8}{3}x + 2$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 + x^3$.
1. Calculer le polynôme p_0 qui interpole f au point d'abscisse $x_0 = 0$.
2. Calculer le polynôme p_1 qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0,\ x_1 = 1\}$.
3. Calculer le polynôme p_2 qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2\}$.
4. Calculer le polynôme p_3 qui interpole f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3\}$.
5. Pour $n \geq 3$, calculer les polynômes p_n qui interpolent f aux points d'abscisse $\{x_0 = 0,\ x_1 = 1, ...,\ x_n = n\}$.

Solution de lexercice 5

Puisque on cherche des polynômes d'interpolation de différents degrè pour une même fonction, on utilise la méthode de Newton, on utilise alors la base $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $(w_0 = 1$ et $w_k(x) = (x - x_{k-1})w_{k-1}(x))$ et le tableau des différences divisées.

k	x_k	$y_k = f[x_k]$	$f[x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-2}, .., x_k]$	$f[x_{k-3}, .., x_k]$	$f[x_{k-4}, ..., x_k$
0	0	1				
1	1	2	1			
2	2	9	7	3		
3	3	28	19	6	1	
4	4	65	37	9	1	0

1. $p_0(x) = 1w_0 = 1$
2. $p_1(x) = 1w_0 + 1w_1 = p_0 + 1w_1 = 1 + x$
3. $p_2(x) = 1w_0 + 1w_1 + 1w_2 = p_1 + 1w_2 = 1 + x + x(x - 1) = x^2 + 1$
4. $p_3(x) = p_2(x) + 3w_3 = x^2 + 1 + 3x(x - 1)(x - 2) = 3x^3 - 8x^2 + 6x + 1$
5. $p_4(x) = p_3(x) - 1w_4 = 3x^3 - 8x^2 + 6x + 1 - x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = -x^4 + 9x^3 - 19x^2 + 12x + 1$

pour $n \geq 5$ on peut utiliser la formule

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + w_k f[x_0, ..., x_n]$$

Exercice 6. On se place sur l'intervalle $[-1, +1]$.

1) Calculer les polynômes de base de Lagrange de degré 3 associés aux points $\{-1, -1/3, 1/3, 1\}$.

2) En déduire le polynôme d'interpolation de lagrange p_3, de degré inférieur ou égal à 3 d'une fonction f définie sur $[-1, +1]$, associé aux points $\{-1, -1/3, 1/3, 1\}$.

3) Décrire la méthode de quadrature sur $[-1, +1]$ obtenue en remplaçant l'intégrale de f par celle de p_3.

4) Quel est l'ordre de cette méthode ?

Solution de lexercice 6

1)

$$L_0(x) = \frac{(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})(x - 1)}{(-1 + \frac{1}{3})(-1 - \frac{1}{3})(-1 - 1)} = x^3 - x^2 - \tfrac{1}{9}x + \tfrac{1}{9},$$

$$L_1(x) = \frac{(x + 1)(x - \frac{1}{3})(x - 1)}{(-\frac{1}{3} + 1)(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3})(-\frac{1}{3} - 1)} = \tfrac{27}{16}x^3 - \tfrac{9}{16}x^2 - \tfrac{27}{16}x + \tfrac{9}{16}$$

$$L_2(x) = \frac{(x + 1)(x + \frac{1}{3})(x - 1)}{(\frac{1}{3} + 1)(\frac{1}{3} + \frac{1}{3})(\frac{1}{3} - 1)} = -\tfrac{27}{16}x^3 - \tfrac{9}{16}x^2 + \tfrac{27}{16}x + \tfrac{9}{16},$$

$$L_3(x) = \frac{(x + 1)(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3})}{(1 + 1)(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{3})} = \tfrac{9}{16}x^3 + \tfrac{9}{16}x^2 - \tfrac{1}{16}x - \tfrac{1}{16}$$

2) $p_3(x) = f(-1)L_0(x) + f(-\frac{1}{3})L_1(x) + f(\frac{1}{3})L_2(x) + f(1)L_3(x)$
3) On intégre $p_3(x)$ sur $[-1, +1]$ à la place de $f(x)$ et on a alors

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} p_3(x)dx = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) \int_{-1}^{1} L_i(x)dx = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i f(x_i).$$

4) l'ordre de cette formule de quadrature est 3, car pour tout polynôme de degré ≤ 3 on a

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i p(x_i)$$

Exercice 7 Estimer, à l'aide des théorèmes du cours, le nombre de sous-intervalles n nécessaire pour obtenir une approximation de

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

avec une erreur moindre que 10^{-6}, en utilisant
(a) la méthode du point milieu combinée,
(b) la méthode des trapèzes combinée,
(c) la méthode de Simpson combinée ?

Solution de lexercice 7

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2},\ f'(x) = \frac{-8x}{(1+x^2)^2},\quad f''(x) = \frac{-8\left(1+x^2\right)^2+8*4x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{24x^2-8}{\left(1+x^2\right)^3}$$

On suppose disposer d'une subdivision d'éléments équidistants $x_i = \frac{h}{2}i$, avec $h = \frac{1}{m}$

a) On sait que l'erreur vérifie la formule $E_{[x_{2i+2},x_{2i}]}(f) \leq \dfrac{(x_{2i+2}-x_{2i})^3}{24} \sup|f\ ''| = \dfrac{h^3}{24} \sup|f\ ''|$ et l'erreur sur $[0,1]$ vérifie

$$E_{[a,b]}^m(f) = \sum_{i=0}^{m-1} E_{[x_{2i},x_{2i+2}]}(f) \leq m\frac{h^3}{2}\max_{[a,b]}|f\ ''| = \frac{1}{24}h^2\max_{[a,b]}|f\ ''|$$

pour que $E_{[a,b]}^m(f)$ soit $\leq 10^{-6}$ il suffit que

$$\frac{1}{24}h^2\max_{[a,b]}|f\ ''| \leq 10^{-6} \Leftrightarrow \frac{1}{24m^2}\max_{[a,b]}|f\ ''| \leq 10^{-6} \Leftrightarrow m^2 \geq \frac{10^6}{24}\max_{[a,b]}|f\ ''|$$

b) On pplique la formule obtenue en utilisant la méthode de trapèze cobinée

$$E_{[a,b]}^m(f) = \sum_{i=0}^{m-1} E_{[x_i,x_{i+1}]}(f) \leq m\frac{h^3}{12}\max_{[a,b]}|f\ ''| = \frac{1}{12}h^2\max_{[a,b]}|f\ ''|$$

pour que $E_{[a,b]}^m(f)$ soit $\leq 10^{-6}$ il suffit que $\dfrac{1}{12}h^2\max_{[a,b]}|f\ ''| = \dfrac{1}{12m^2}\max_{[a,b]}|f\ ''| \leq 10^{-6}$

$$m^2 \geq \frac{10^6}{12} \max_{[a,b]} |f^{\prime\prime}|$$

c) On pplique la formule obtenue en utilisant la méthode de Simpson cobinée

$$E^m_{[a,b]}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} E_{[x_{2i},x_{2i+2}]}(f) \leq m \frac{h^5}{2880} \max_{[a,b]} |f^{(4)}| = \frac{1}{2880 m^4} \max_{[a,b]} |f^{(4)}|$$

pour que $E^m_{[a,b]}(f)$ soit $\leq 10^{-6}$ il suffit que $\frac{1}{2880m^4} \max_{[a,b]} |f^{(4)}| \leq 10^{-6}$

$$m^4 \geq \frac{10^6}{2880} \max_{[a,b]} |f^{(4)}|$$

Exercice 8 Formule des trapèzes et fonctions convexes. On souhaite calculer une valeur approchée de $ln(2)$ à partir de la relation

$$ln(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

Nous considérerons la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Montrer que pour tout $a,\ b \in]0; +\infty[$ et pour tout $t \in [0; 1]$ on a

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \qquad (8.1)$$

(b) On suppose $0 < a < b < +\infty$. Soit $x \in [a; b]$. Montrer que $\frac{b-x}{b-a} \in [0; 1]$. Montrer en prenant $t = \frac{b-x}{b-a}$ dans (8.1) que $f(x) \leq p(x)$,où $p(x)$ est le polynôme interpolant f aux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

(c) Trouver une approximation de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ en appliquant la méthode des trapèzes combinée (composite) avec 2 sous-intervalles. Faire un schéma illustrant le calcul.

(d) Expliquer pourquoi quel que soit le nombre de sous-intervalles, le nombre trouvé par la méthode des trapèzes combinée fournira toujours une approximation par excès (c'est-à-dire supérieure à la valeur exacte $ln(2)$.)

(e) On approche maintenant $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ en utilisant la méthode Simpson combinée. Combien de sous intervalles faut-il utiliser pour commettre une erreur inférieure ou égale à 10^{-10}?

Solution de lexercice 8

$a)$ vérifions que $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \Leftrightarrow \frac{1}{ta + (1-t)b} \leq \frac{t}{a} + \frac{1-t}{b}$

comme $ta + (1-t)b > 0$ il suffit de montrer que on peut multiplier la dernière inéglité sans changer son sens

$$\frac{t^2a+t(1-t)b}{a}+\frac{t(1-t)a+(1-t)^2b}{b}=t^2+(1-t)^2+t(1-t)(\tfrac{b}{a}+\tfrac{a}{b})\geq 1$$

or

$$\tfrac{b}{a}+\tfrac{a}{b}=\tfrac{b^2+a^2}{ab}\geq 2 \text{ car } b^2+a^2-2ab=(a-b)^2\geq 0$$
$$t^2+(1-t)^2+t(1-t)(\tfrac{b}{a}+\tfrac{a}{b})\geq t^2+(1-t)^2+2t(1-t)=1$$

b) $0\leq x\leq b \Leftrightarrow -b\leq -x\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq b-x\leq b-a \Leftrightarrow 0\leq \dfrac{b-x}{b-a}\leq 1$

On applique la formule (8.1) avec $t=\dfrac{b-x}{b-a}$ on a

$$\frac{1}{\frac{b-x}{b-a}a+(1-\frac{b-x}{b-a})b}\leq \frac{\frac{b-x}{b-a}}{a}+\frac{(1-\frac{b-x}{b-a})}{b}$$

Or

$$\frac{1}{\frac{b-x}{b-a}a+(1-\frac{b-x}{b-a})b}=\frac{1}{\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b}=\frac{1}{x}=f(x)$$
$$\frac{\frac{b-x}{b-a}}{a}+\frac{(1-\frac{b-x}{b-a})}{b}=\frac{x-b}{a-b}\frac{1}{a}+\frac{x-a}{b-a}\frac{1}{b}=p(x)$$

En conclusion on a $f(x)\leq p(x)$

c) $\int_1^2\dfrac{dx}{x}=\int_1^{1.5}\dfrac{dx}{x}+\int_{1.5}^2\dfrac{dx}{x}\approx \frac{0.5}{2}(\frac{1}{1.5}+1)+\frac{0.5}{2}(\frac{1}{1.5}+\frac{1}{2})=\frac{0.5}{2}*(1+\frac{2}{1.5}+0.5)=0.708\,33$

d) La fonction f est convexe, donc tout segment joignant deux points de la courbe de f se trouve au dessus de cette courbe, si $(x_i)_{0\leq i\leq m}$ est une subdivsion de $[0,1]$ lors $\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx\leq \int_{x_i}^{x_{i+1}}p^{(i)}(x)dx=(x_{i+1}-x_i)\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)$, $p^{(i)}$ étnt le polynome d'interpoltion de f ausx point $(x_i,f(x_i))$ et $(x_{i+1},f(x_{i+1}))$,la courbe de $p^{(i)}$ est le segment reliant les deux points $(x_i,f(x_i))$ et $(x_{i+1},f(x_{i+1}))$ qui se trouve u dessus de l courbe de f. en conclusion par sommtion on a

$$\int_1^2 f(x)dx\leq \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}p^{(i)}(x)dx=\frac{h}{2}\left(f(1)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(1+ih)+f(2)\right)$$

e) Il suffit d'étuliser la formule

$$E_{[a,b]}^m(f)=\sum_{i=0}^{m-1}E_{[x_{2i},x_{2i+2}]}(f)\leq m\frac{h^5}{2880}\max_{[a,b]}|f^{(4)}|=\frac{1}{2880}h^4\max_{[1,2]}|f^{(4)}|$$
$$f'(x)=-\tfrac{1}{x^2}\ ,\ f''(x)=\tfrac{2}{x^3},\ f^{(3)}(x)=-6x^{-4} \text{ et}$$
$$f^{(4)}(x)=24x^{-5}\Rightarrow \sup_{[1,2]}|f^{(4)}|=24$$

pour avoir $E_{[a,b]}^m(f)\leq 10^{-10}$ il suffit que $\dfrac{1}{2880m^4}\max_{[a,b]}|f^{(4)}|=\dfrac{24}{2880m^4}\leq 10^{-10}\Rightarrow m^4\geq\left(\frac{24*10^{10}}{2880}\right)^{\frac{1}{4}}=95.544$

La plus petite valeur acceptable est $m=96$.

Exercice 2 (Exercice 2.5 Gloria Facc)
Exercice 3 (2.19)
Exercice 6 (exercice 27 et 30 Gloria Faccanoni)
Exercice 6(examen 05-06).
Exercice 8 (calvani 53)