Exercice 1 : Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous

x	0	2	3	5
$f(x)$	-1	2	9	87

Déterminons es polynômes caractéristiques de Lagrange :

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} = \frac{(x^2-5x+6)(x-5)}{-30} = \frac{-1}{30}\left(x^3-10x^2+31x-30\right)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} = \frac{x(x^2-8x+15)}{6} = \frac{1}{6}\left(x^3-8x^2+15x\right)$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} = \frac{x(x^2-7x+10)}{-6} = \frac{-1}{6}\left(x^3-7x^2+10x\right)$$
$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)} = \frac{x(x^2-5x+6)}{30} = \frac{1}{30}\left(x^3-5x^2+6x\right)$$

Donc :

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{i=3} f(x_i)L_i(x)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{30}\left(x^3-10x^2+31x-30\right)+\frac{2}{6}\left(x^3-8x^2+15x\right)+\frac{-9}{6}\left(x^3-7x^2+10x\right)+\frac{87}{30}\left(x^3-5x^2+6x\right)$$
$$P_3(x) = \frac{53}{30}x^3-7x^2+\frac{253}{30}x-1$$

Exercice 2 : Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ par rapport aux points 0; $\frac{3}{4}$; 1.

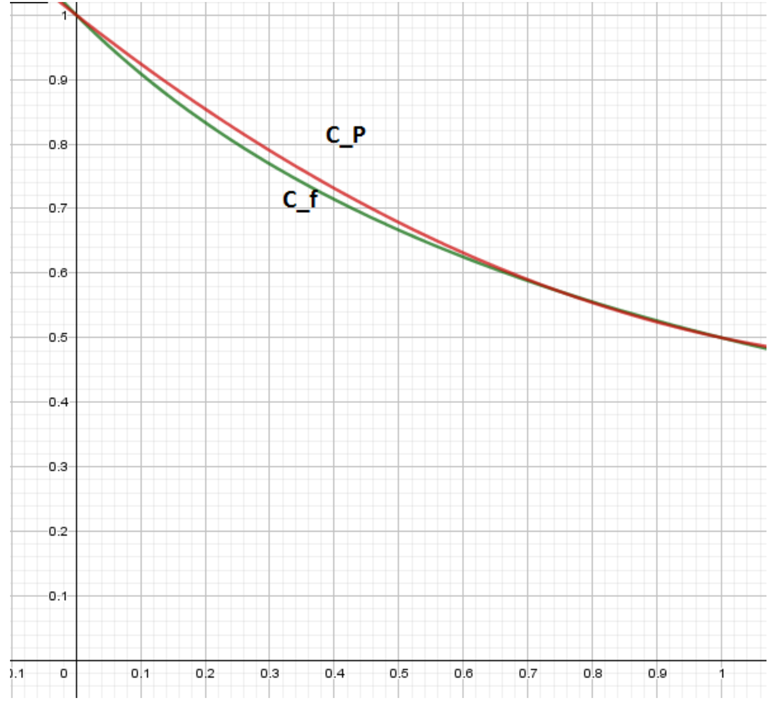
Polynômes caractéristiques de Lagrange par rapport aux points 0; $\frac{3}{4}$ et 1 :

$$L_0(x) = \frac{(x-\frac{3}{4})(x-1)}{(0-\frac{3}{4})(0-1)} = \frac{4}{3}\left(x^2-\frac{7}{4}x+\frac{3}{4}\right)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(\frac{3}{4}-0)(\frac{3}{4}-1)} = \frac{-16}{3}\left(x^2-x\right)$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{3}{4})}{(1-0)(1-\frac{3}{4})} = 4\left(x^2-\frac{3}{4}x\right)$$

Donc le polynômes d'interpolation par rapport aux points $(0,1)$, $(\frac{3}{4},\frac{4}{7})$ et $(1,\frac{1}{2})$ est donné par :

$$P_2(x) = L_0(x)+\frac{4}{7}L_1(x)+\frac{1}{2}L_2(x) = \frac{2}{7}x^2-\frac{11}{14}x+1$$

1) Représenter sur un même graphique le polynôme et la fonction interpolée ;
   Les deux courbes passent pas les trois points $(0,1)$, $(\frac{3}{4},\frac{4}{7})$ et $(1,\frac{1}{2})$ mais elles ne sont pas confondues, il faut ajouter d'autres points (par exemple, 0.1, 0.2, 0.3,...) pour pouvoir ajuster la représentation. Il faut bien choisir l'échelle sur l'axe des ordonnées pour pouvoir distinguer les deux courbes ? elles ont trois points en commun mais leurs différence est réduite (égale à l'erreur !).



Agrandissement de la représentation dans la partie $[0.8, 1]$

2) Comparer, à l'aide d'une calculatrice, $f(\frac{1}{2})$ et $P_2(\frac{1}{2})$;

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} \sim 0,666667 \text{ et } P_2(\frac{1}{2}) = \frac{19}{28} \sim 0,678571$$

La différence entre les deux valeurs est d'ordre $0,01$ on peut dire qu'elles sont égales à 10^{-2} près ;

3) Rappeler la formule de l'erreur et donner une majoration de $|E(x)| = |f(x) - P_2(x)|$;

Formule générale : Il existe ξ entre compris entre le plus petit et le plus grand points d'interpolation (si les points sont ordonnés du plus petit au plus grand, en peut écrire $\xi \in [x_0, x_n]$) tel que :

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| = |(x - x_0)(x - x_1)....(x - x_n)|\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$$

Concernant f et P_2, il existe $\xi \in [0, 1]$ tel que :

$$|E_2(x)| = |f(x) - P_2(x)| = |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|\frac{|f^{(3)}(\xi)|}{(3)!} = |x(x - \frac{3}{4})(x - 1)|\frac{|f^{(3)(\xi)}|}{6}$$

On a :

$$f(x)=\frac{1}{1+x} \quad f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2} \quad f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3} \quad f^{(3)}(x)=\frac{-6}{(1+x)^4} \quad f^{(4)}(x)=\frac{24}{(1+x)^5}>0$$

On en déduit que $f^{(3)}$ est croissante et pour $x\in[0,1]$ on a $f^{(3)}(0)\leq f^{(3)}(x)\leq f^{(3)}(1)$ soit $-6\leq f^{(3)}(x)\leq \frac{-6}{16}$

Finalement,

$$|f^{(3)}(\xi)|\leq \sup_{x\in[0,1]}|f^{(3)}(x)|=6$$

et,

$$|E_2(x)|\leq |x(x-\frac{3}{4})(x-1)|$$

A titre d'exemple, $|E_2(\frac{1}{2})|\leq \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{2}=\frac{1}{16}\sim 0,0625$ qui est une majoration de la valeur exacte donnée par $|E_2(\frac{1}{2})|=|f(\frac{1}{2})-P_2(\frac{1}{2})|\sim 0,01$.

4) Évaluer l'erreur commise en considérant les points support : 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et 1. D'après la formule du cours, il existe $\xi\in[0,1]$ tel que :

$$|E_4(x)|=|f(x)-P_4(x)|=|x(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})(x-1)|\frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!}$$

On a :

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{(1+x)^5} \quad f^{(5)}(x)=\frac{-120}{(1+x)^6}$$

et avec un calcul d'encadrement, nous avons successivement :

$$0\leq x\leq 1 \quad 1\leq 1+x\leq 2 \quad 1\leq (1+x)^6\leq 2^6 \quad \frac{1}{64}\leq\frac{1}{(1+x)^6}\leq 1 \quad -120\leq f^{(5)}(x)\leq\frac{-120}{64}$$

et

$$|f^{(5)}(\xi)|\leq \sup_{x\in[0,1]}|f^{(5)}(x)|=120$$

Finalement,

$$|E_4(x)|=|f(x)-P_4(x)|\leq |x(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})(x-1)|$$

Exercice 3 : On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[2,2.4]$, dont on connaît les valeurs suivantes :

$$f(2)=5.2\ ,\ f(2.1)=6.4,\ f(2.2)=5.8\ ,\ f(2.3)=6.1 \text{ et } f(2.4)=6$$

1) Établir le tableau des différences finies de f ;

x_i	$f(x_i)$	DD_1	DD_2	DD_3	DD_4
2	$5,2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2,1$	$6,4$	$\frac{6,4-5,2}{2,1-2}=12$	$-$	$-$	$-$
$2,2$	$5,8$	$\frac{5,8-6,4}{2,2-2,1}=-6$	$\frac{-6-12}{2,2-2}=-90$	$-$	$-$
$2,3$	$6,1$	$\frac{6,1-5,8}{2,3-2,2}=3$	$\frac{3-(-6)}{2,3-2,1}=45$	$\frac{45+90}{2,3-2}=450$	$-$
$2,4$	6	$\frac{6-6,1}{2,4-2,3}=-1$	$\frac{-1-3}{2,4-2,2}=-20$	$\frac{-20-45}{2,4-2,1}=\frac{-650}{3}$	$\frac{\frac{-650}{3}-450}{2,4-2}=\frac{-5000}{3}$

2) En déduire le polynôme d'interpolation de Newton de f d'ordre 4, associé aux points $x_0=2$, $x_1=2.1$, $x_2=2.2$, $x_3=2.3$ et $x_4=2.4$.

Le polynome d'interpolation est donné par la méthode de Newton :

$$P_4(x)=5,2+12(x-2)-90(x-2)(x-2,1)+450(x-2)(x-2,1)(x-2,2)-\frac{5000}{3}(x-2)(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)$$

$$P_4(x)=5,2+12(x-2)-90(x^2-4,1x+4,2)+450(x^3-6,3x^2+13,22x-9,24)$$
$$-\frac{5000}{3}(x^4-8,6x^3+27,71x^2-39,646x+21,252)$$

$$P_4(x) = -\frac{5000}{3}x^4 + x^3(\frac{43000}{3} + 450) + x^2(-\frac{138550}{3} - 2835 - 90) + x(\frac{198230}{3} + 5949 + 369 + 12)$$
$$+(-\frac{106260}{3} - 4158 - 378 - 24 + 5,2)$$
$$P_4(x) = -\frac{5000x^4}{3} + \frac{44350x^3}{3} - \frac{147325x^2}{3} + \frac{217220x}{3} - \frac{199874}{5}$$

Ou en valeurs approchées des coefficients :

$$P_4(x) = -1666.67x^4 + 14783.3x^3 - 49108.3x^2 + 72406.7x - 39974.8$$

Peut-on donner, à partir du tableau précédent, les polynômes d'interpolation par rapport aux points x_0, x_1, x_2 et x_3 ?

Oui, il suffit de d'utiliser le tableau pour les différences divisées des 4 points au lieu de 5 points (en supprimant x_4, toute la ligne est à supprimer) :

x_i	$f(x_i)$	DD_1	DD_2	DD_3	DD_4
2	$5,2$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2,1$	$6,4$	$\frac{6,4-5,2}{2,1-2} = 12$	$-$	$-$	$-$
$2,2$	$5,8$	$\frac{5,8-6,4}{2,2-2,1} = -6$	$\frac{-6-12}{2,2-2} = -90$	$-$	$-$
$2,3$	$6,1$	$\frac{6,1-5,8}{2,3-2,2} = 3$	$\frac{3-(-6)}{2,3-2,1} = 45$	$\frac{45+90}{2,3-2} = 450$	$-$
$\cancel{2,4}$	$\cancel{6}$	$\cancel{\frac{6-6,1}{2,4-2,3} = -1}$	$\cancel{\frac{-1-3}{2,4-2,2} = -20}$	$\cancel{\frac{-20-45}{2,4-2,1} = \frac{-650}{3}}$	$\cancel{\frac{\frac{-650}{3}-450}{2,4-2} = \frac{-5000}{3}}$

Donc :

$$P_3(x) = 5,2 + 12(x-2) - 90(x-2)(x-2,1) + 450(x-2)(x-2,1)(x-2,2)$$
$$P_3(x) = 450x^3 - 2925x^2 + 6330x - \frac{22774}{5}$$

Par rapport aux points x_1, x_2, x_3 et x_4 ? Expliquer la réponse.

La réponse est aussi oui mais avec une méthode différente : en effet, lorsqu'on supprime x_0, il en suffit pas de supprimer la 1ère ligne mais toutes les différences divisées qui utilisent x_0 (la première valeur de chaque colonnes ! !) :

x_i	$f(x_i)$	DD_1	DD_2	DD_3	DD_4
$\cancel{2}$	$\cancel{5,2}$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2,1$	$6,4$	$\cancel{\frac{6,4-5,2}{2,1-2} = 12}$	$-$	$-$	$-$
$2,2$	$5,8$	$\frac{5,8-6,4}{2,2-2,1} = -6$	$\cancel{\frac{-6-12}{2,2-2} = -90}$	$-$	$-$
$2,3$	$6,1$	$\frac{6,1-5,8}{2,3-2,2} = 3$	$\frac{3-(-6)}{2,3-2,1} = 45$	$\cancel{\frac{45+90}{2,3-2} = 450}$	$-$
$2,4$	6	$\frac{6-6,1}{2,4-2,3} = -1$	$\frac{-1-3}{2,4-2,2} = -20$	$\frac{-20-45}{2,4-2,1} = \frac{-650}{3}$	$\cancel{\frac{\frac{-650}{3}-450}{2,4-2} = \frac{-5000}{3}}$

Donc :

$$P_3'(x) = 6,4 - 6(x-2,1) + 45(x-2,1)(2,2) - \frac{650}{3}(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)$$
$$P_3'(x) = -\frac{650x^3}{3} + 1475x^2 - \frac{10030x}{3} + \frac{12646}{5}$$

Remarque : La même méthode est à utiliser si nous supprimons plusieurs points du début ou de la fin du tableau, par contre, nous ne pouvons pas utiliser le même tableau pour déduire les différences divisées lorsque nous supprimons un point du milieu du tableau. Par exemple, pour x_0, x_1, x_3 et x_4 il faut refaire les calculs dès le début ! !

3) Donner une valeur approchée de $f(2.25)$ et donner une majoration de l'erreur $|f(x) - P_4(x)|$ si f est de classe $\mathcal{C}^5$.

On a :

$$f(2.25) \sim P_4(2,25)$$

et, il existe ξ tel que :

$$|f(x)-P_4(x)| = |(x-2)(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)(x-2,4)|\frac{|f^{(5)(\xi)}|}{5!}$$
$$|f(x)-P_4(x)| \leq \frac{M}{5!}|(x-2)(x-2,1)(x-2,2)(x-2,3)(x-2,4)|$$

avec : $M = \sup_{x\in[2;2,4]}|f^{(5)}(x)|$

Remarque : Nous pouvons aussi donner une approximation de $f(2.25)$ en utilisant $P_3(.)$ et $P_3'(.)$.

Exercice 4 : Les données suivantes concernent l'espérance de vie des habitants de deux régions :

année	1975	1980	1985	1990
Europe Ouest	72.8	74.2	75.2	76.4
Europe Est	70.2	70.2	70.3	73.2

Utiliser le polynôme d'interpolation de degré 3 pour estimer l'espérance de vie en 1977, 1983 et 1988.

Il faut déterminer les polynôme d'interpolation $P_3(x)$ et $P_3'(x)$ par rapport au deux régions puis calculer les valeurs approchées en utilisant l'interpolation.
Pour éviter les calculs compliqués, cous pouvons utiliser une échelle (ou translation des valeurs) et utiliser les points : 0, 5, 10 et 15. On a ;

$$L_0(x) = \frac{(x-5)(x-10)(x-15)}{(0-5)(0-10)(0-15)} = \frac{(x-5)(x^2-25x+150)}{-750} = \frac{-1}{750}(x^3-30x^2+275x-750)$$
$$L_1(x) = \frac{x(x-10)(x-15)}{5(5-10)(5-15)} = \frac{x(x^2-25x+150)}{250} = \frac{1}{250}(x^3-25x^2+150x)$$
$$L_2(x) = \frac{x(x-5)(x-15)}{10(10-5)(10-15)} = \frac{x(x^2-20x+75)}{-250} = \frac{-1}{250}(x^3-20x^2+75x)$$
$$L_3(x) = \frac{x(x-5)(x-10)}{15(15-5)(15-10)} = \frac{x(x^2-15x+50)}{750} = \frac{1}{750}(x^3-15x^2+50x)$$

Les polynômes d'interpolation sont donnés successivement pour les deux régions par :

$$P_3(x) = \frac{-72.8}{750}(x^3-30x^2+275x-750) + \frac{74.2}{250}(x^3-25x^2+150x)$$
$$+\frac{-75.2}{250}(x^3-20x^2+75x) + \frac{76.4}{750}(x^3-15x^2+50x)$$
$$P_3(x) = \frac{1}{750}\left\{x^3(-72.8+222.6-225.6+76.4) + x^2(2184-5565+4512-1146)\right.$$
$$\left.+x(-20020+33390-16920+3820)+54600\right\}$$
$$P_3(x) = \frac{x^3}{1250} - \frac{x^2}{50} + \frac{9x}{25} + \frac{364}{5}$$
$$P_3(x) = 0.0008x^3 - 0.02x^2 + 0.36x + 72.8$$
$$P_3'(x) = \frac{-70.2}{750}(x^3-30x^2+275x-750) + \frac{70.2}{250}(x^3-25x^2+150x)$$
$$+\frac{-70.3}{250}(x^3-20x^2+75x) + \frac{73.2}{750}(x^3-15x^2+50x)$$
$$P_3'(x) = \frac{1}{750}\left\{x^3(-70.2+210.6-210.9+73.2) + x^2(2106-5265+4218-1098)\right.$$
$$\left.+x(-19305+31590-15817.5+3660)+52650\right\}$$
$$P_3'(x) = \frac{9x^3}{2500} - \frac{13x^2}{250} + \frac{17x}{100} + \frac{351}{5}$$
$$P_3'(x) = 0.0036x^3 - 0.052x^2 + 0.17x + 70.2$$

Estimation des espérances de vie :
Europe ouest :

$$1977 \mapsto P_3(2) \simeq 73,4464$$
$$1983 \mapsto P_3(8) \simeq 74,8096$$
$$1988 \mapsto P_3(13) \simeq 75,8576$$

Estimation des espérances de vie :
Europe Est :

$$1977 \mapsto P_3(2) \simeq 70,3608$$
$$1983 \mapsto P_3(8) \simeq 70,0752$$
$$1988 \mapsto P_3(13) \simeq 71,5312$$

Exercice 5 : Pour calculer le zéro d'une fonction $f(x)$ inversible sur un intervalle $[a, b]$ on peut utiliser l'interpolation : après avoir évalué f sur une discrétisation x_i de $[a, b]$, on interpole l'ensemble $(y_i = f(x_i), x_i)_{i=0}^m$ et on obtient un polynôme $p(y)$ tel que : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = p(0)$.

1) Utiliser cette méthode pour évaluer l'unique racine r de la fonction $f(x) = \exp(x) - 2$ dans l'intervalle $[0, 1]$ avec trois points d'interpolation ;

Localisation de la racine : Soit $f(x) = e^x - 2$, f est une fonction continue croissante (car $f'(x) = e^x > 0$) et $f(0)f(1) = (-1)(e - 2) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\bar{x} \in [0, 1]$

f est inversible (admet une fonction réciproque) car f est une bijection (continue + croissante) de $[0, 1]$ vers $[-1, e - 2]$.

Discrétisation de l'intervalle en trois points ($n = 2$) et $x_i = 0 + i(\frac{1-0}{2}) = \frac{i}{2}$ donc $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$. Le tableau des valeurs de $f(x_i)$:

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
$y_i = f(x_i)$	-1	$e^{\frac{1}{2}} - 2$	$e - 2$

Le tableau inversé (les valeurs $(y_i, f^{-1}(y_i) = x_i)$) :

y_i	-1	$e^{\frac{1}{2}} - 2$	$e - 2$
$x_i = f^{-1}(y_i)$	0	$\frac{1}{2}$	1

Le polynôme d'interpolation $P_2(x)$ sur la base des points y_i et les valeurs $x_i = f^{-1}(y_i)$ est une approximation de $f^{-1}(x)$ (nous pouvons le calculer par n'importe quelle méthode d'interpolation). Par exemple, le tableau des différences divisées est donnée par :

y_i	x_i	DD_1	DD_2
-1	0	$-$	$-$
$e^{\frac{1}{2}} - 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}-0}{e^{\frac{1}{2}}-2+1} = \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}}-1)} \simeq 0,345$	$-$
$e - 2$	1	$\frac{1-\frac{1}{2}}{e-2-(e^{\frac{1}{2}}-2)} = \frac{1}{2(e-e^{\frac{1}{2}})}$	$\frac{\frac{\frac{1}{2}}{e-e^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}-1}}{e-2+1} = \frac{1}{2(e-1)}(\frac{1}{e-e^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}-1}) = \frac{1}{2(e-1)}\frac{2e^{\frac{1}{2}}-1-e}{e^{\frac{3}{2}}-2e+e^{\frac{1}{2}}}$ $= \frac{1}{2(e-1)}\frac{-(e+1-2e^{\frac{1}{2}})}{e^{\frac{1}{2}}(e-2e^{\frac{1}{2}}+1)} = \frac{-1}{2e^{\frac{1}{2}}(e-1)} \simeq -0,176$

Donc le polynôme d'interpolation sur la base des (y_i) est donné par :

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}} - 1)}(x - y_0) - \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}}(e - 1)}(x - y_0)(x - y_1)$$

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}} - 1)}(x + 1) - \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}}(e - 1)}(x + 1)(x - e^{\frac{1}{2}} + 2)$$

On a :

$$f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = f^{-1}(0) \sim P_2(0) = \frac{1}{2(e^{\frac{1}{2}}-1)} - \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}}(e-1)}(-e^{\frac{1}{2}}+2) = \frac{e^{\frac{3}{2}}+e-4e^{\frac{1}{2}}+2}{2e^{\frac{1}{2}}(e^{\frac{1}{2}}-1)(e^1-1)}$$

Soit :

$$\bar{x} \sim 0,708$$

2) Comparer ensuite le résultat obtenu avec l'approximation du zéro de f obtenue par la méthode de Newton en 3 itérations à partir de $x_0 = 0$.
D'abord, vérifiant les conditions de convergence : f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ par contre $f(x_0) = f(0) = -2$ calculons x_1 : $x_1 = x_0 - \frac{f(x_k)-2}{f'(x_k)} = 0 - \frac{1-2}{1} = 1$ et $f(x_1) = e - 2 > 0$ de même signe que $f''(x)$. On en déduit que la méthode de Newton converge vers $\overline{x}$ et une valeur approchée après trois itérations est donnée par x_3 avec :

$$x_2 = 1 - \frac{e-2}{e} \sim 0.736 \text{ et } x_3 = x_2 - \frac{e^{x_2}-2}{e^{x_2}} \sim 0.694$$

Exercice 6 : La division euclidienne d'un polynôme V par un polynôme W non nul consiste à écrire (d'une manière unique) V sous la forme $V = Wq+r$ où q et r sont deux polynômes, le second vérifiant $deg(r) < deg(W)$; q est le quotient de la division euclidienne de V et W et r le reste de cette division.

1) Montrer que si $W(x) = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_d)$ alors r est le polynôme d'interpolation de V aux points $(a_0,\ a_1, ..., a_d)$;
Soit $P_d(x)$ le polynôme d'interpolation de $V(x)$ par rapport au points a_0, a_1,...,a_d alors, on a :

$$P_d(a_i) = V(a_i) = q(a_i)W(a_i) + r(a_i) \qquad i = 0, 1, ..., d$$

Or,

$$W(a_i) = (a_i - a_0)...(a_i - a_i)...(a_i - a_d) = 0 \qquad i = 0, 1, ..., d$$

On en déduit :

$$P_d(a_i) = r(a_i) \qquad i = 0, 1, ..., d \Rightarrow (P_d - r)(a_i) = 0 \qquad i = 0, 1, ..., d$$

Remarquons que le polynôme d'interpolation $P_d(x)$ est de degré au plus égal à d et le reste de la division euclidienne est strictement inférieur au degré de $V(x)$ (qui égal à $d+1$). Donc, le degré du polynôme $(P_d - r)(x)$ est de degré au plus égal à d et ayant $d+1$ racines (a_0,...,a_d), on en déduit que ce polynôme est le polynôme identiquement nul : $(P_d - r)(x) = 0$ et $P_d(x) = r(x)$. (Un polynôme non identiquement nul de degré n ne peut pas avoir plus de n racines).

2) Utiliser une division euclidienne pour calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange de $V(x) = x^5 - 3x^4 + x - 3$ aux points $-1,\ 0,\ 1,\ 2$. Vérifier le résultat obtenu.
Il suffit d'effectuer la division euclidienne de $V(x)$ par $W(x)$ avec

$$W(x) = (x+1)(x-0)(x-1)(x-2) = (x^3 - x)(x-2) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

On a :

$$V(x) = (x-1)W(x) + (-x^3 - 3x^2 + 3x - 3)$$

Donc :

$$P_3(x) = -x^3 - 3x^2 + 3x - 3$$

Pour vérifier le résultat, il suffit qu comparer les images des points x_i utilisant $V(x)$ et $P_3(x)$:

$$P_3(0) = -3 = V(0), \quad P_3(1) = -4 = V(1), \quad P_3(-1) = -8 = V(-1), ...$$

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2 - 3x^2$:

1) Calculer le polynôme P_0 qui interpole f au point d'abscisse $x_0 = 0$;
Le polynôme P_0 est de degré zéro donc égal à une constante et il prend la même valeur que f au point $x_0 = 0$:

$$P_0(x) = P_0(x_0) = f(x_0) = f(0) = 2$$

2) Calculer le polynôme P_1 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$;
Utilisant, par exemple, la méthode de Newton :

x_i	$f(x_i)$	$DD1$
0	2	$-$
1	-1	$\frac{-1-2}{1-0} = -3$

Donc :

$$P_1(x) = 2 - 3(x - x_0) = 2 - 3x$$

3) Calculer le polynôme P_2 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$;
Complétant le tableau précédent en ajoutant la ligne $x_2 = 2$:

x_i	$f(x_i)$	$DD1$	$DD2$
0	2	$-$	$-$
1	-1	$\frac{-1-2}{1-0} = -3$	$-$
2	-10	$\frac{-10+1}{2-1} = -9$	$\frac{-9+3}{2-0} = -3$

Donc :

$$P_2(x) = 2 - 3(x - x_0) - 3(x - x_0)(x - x_1) = 2 - 3x - 3x(x - 1) = 2 - 3x^2 = f(x)$$

Le résultat précédent est tout à fait normal car f est un polynôme de degré 2 et on ne peut pas trouver une meilleur approximation de f par un autre polynôme de degré 2.

4) Calculer le polynôme P_n, $n \geq 3$ qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\cdots$, et $x_n = n$. Est-ce que le résultat est vrai pour une fonction f quelconque.
Remarquons que nous ne pouvons pas faire des calculs (car le nombre de points n'est pas fini !), par contre, on a :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \Rightarrow (P_n - f)(x_i) = 0 \quad i = 0, 1, ..., n$$

$f(x)$ est un polynôme de degré 2 et $P_n(x)$ est un polynôme de degré $n \geq 3$ donc $(P_n - f)(x)$ est un polynôme de degré n ayant $n + 1$ racines (x_0, x_1,...,x_n). On en déduit que :

$$(P_n - f)(x) = 0 \quad \text{et} \quad P_n(x) = f(x)$$

Exercice 8 : 1) Rappeler la définition des polynômes de Tchebychev sur $[-1, 1]$; Les polynôme de Tchebychev sont définis comme les polynômes vérifiant l'égalité suivant :

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Avec un changement de variable, pour tout $x \in [-1, 1]$, nous pouvons obtenir la définition suivante :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

2) Donner la relation de recurrence entre ces polynômes et calculer T_5 ; En utilisant les formule de transformation de $\cos$, nous pouvons obtenir la relation de recurrence suivante :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \text{Pour } n \geq 1. \end{cases}$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

3) Calculer les racines de T_5 dans $[-1, 1]$ puis déduire les meilleurs noeuds d'interpolation, utilisant 5 points, sur l'intervalle $[0, 3]$.
Nous pouvons utiliser la formule du cours donnant les n racines du polynômes T_n de Tchebychev :

$$x_k = \cos(\frac{(2k + 1)\pi}{2n}) \qquad k = 0, ..., n - 1$$

Donc, les racines de T_5 sont : $x_0 = -\cos(\frac{\pi}{10})$, $x_1 = -\cos(\frac{3\pi}{10})$, $x_2 = 0$, $x_3 = \cos(\frac{3\pi}{10})$ et $x_3 = \cos(\frac{\pi}{10})$

Deuxième méthode (calcul direct) :

$$T_5(x) = 0 \Rightarrow x(16x^4 - 20x^3 + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 16x^4 - 20x^3 + 5 = 0$$

La deuxième équation est une équations bicarrée, il suffit de poser $X = x^2$ pour obtenir $X_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $X_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$,

On en déduit que les racines de T_5 sont données par : $x_0 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $x_1 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ et $x_4 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Pour obtenir la famille des meilleurs noeuds d'interpolation sur un intervalle $[a, b]$, il suffit de déterminer les images des $(x_i)_{i=0,\ldots,4}$ par les transformation affine de $[-1, 1] \to [a, b]$ donnée par :

$$x \in [-1, 1] \mapsto \theta = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x \in [a, b]$$

Donc, les meilleurs noeuds sont :

$$\theta_i = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_i \qquad \text{avec } x_i,\ i = 0, ..., 4 \text{ sont les racines du polynôme} T_5 \text{ dans } [-1, 1]$$

Exercice 9 : Soit f une fonction de classe C^3, définie sur $[0, 3]$ et à valeurs réelles.

1) Déterminer le polynôme d'interpolation d'ordre 2 de f, noté $P_2(.)$, qui prend les même valeurs que $f(.)$ en $x = 0, 1, 3$;

On a :

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}\frac{-1}{2}(x^2 - 3x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}(x^2 - x)$$

Donc :

$$P_2(x) = f(0)L_0(x) + f(1)L_1(x) + f(2)L_2(x)$$

2) Déterminer la méthode de quadrature élémentaire obtenue en remplaçant l'intégrale de $f(.)$ sur $[0, 3]$ par celle de $P_2(.)$;

$$\int_0^3 f(x)dx \sim \int_0^3 P_2(x) = \int_0^3 (f(0)L_0(x) + f(1)L_1(x) + f(2)L_2(x))dx$$

$$= f(0)\int_0^3 L_0(x)dx + f(1)\int_0^3 L_1(x)dx + f(2)\int_0^3 L_2(x)dx$$

On a :

$$\int_0^3 L_0(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{3x}{2}\right]_0^3 = 0$$

$$\int_0^3 L_1(x)dx = \int_0^3 \frac{-1}{2}(x^2 - 3x) = -12\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{4}$$

$$\int_0^3 L_2(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{6}(x^2 - x) = 16\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3}{4}$$

Donc, on obtient la quadrature suivante :

$$P_2(x) = f(0) \times 0 + f(1) \times \frac{9}{4} + f(2) \times \frac{3}{4} = 3(0 \times f(0) + \frac{3}{4} \times f(1) + \frac{1}{4} \times f(2)$$

avec $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \frac{3}{4}$ et $\omega_2 = \frac{1}{4}$

Remarque : cette quadrature est différente de celle obtenue avec la méthode de Simpson (Newton-cotes, $n = 2$) car la répartition des points dans l'intervalle n'est pas uniforme : $2 - 1 = 1 \neq 2 = 2 - 0$

3) Montrer que l'ordre de la méthode est égal à 2.

Si f est un polynôme de degré 0, 1 ou 2 alors $P_2(x) = f(x)$ et la quadrature est exacte :

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 P_2(x)$$

Donc, l'ordre de cette méthode est au moins égale à 2. Il suffit maintenant de trouver un exemple d'un polynôme de degré 3 telle que la quadrature ne soit pas exacte : Si $f(x) = x^3$, on a :

$$\int_0^3 f(x)dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{4}$$

$$3(0 \times f(0) + \frac{3}{4} \times f(1) + \frac{1}{4} \times f(2)) = 3(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times 8) = \frac{33}{4} \neq \int_0^3 f(x)dx$$

Donc la méthode est d'ordre 2.

Exercice 10 : On se place sur l'intervalle $[-1, +1]$:

1) Calculer les polynômes de base de degré 3 associés aux points $\left\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right\}$;

$$L_0(x) = \frac{(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(-1+\frac{1}{3})(-1-\frac{1}{3})(-1-1)} = \frac{-1}{16}(9x^2-1)(x-1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{-1}{3}+1)(\frac{-1}{3}-\frac{1}{3})(\frac{-1}{3}-1)} = \frac{9}{16}(3x-1)(x^2-1)$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{1}{3}+1)(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-1)} = \frac{-9}{16}(x^2-1)(3x+1)$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})}{(1+1)(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3})} = \frac{1}{16}(x+1)(9x^2-1)$$

2) En déduire le polynôme d'interpolation, P_3, de degré inférieur ou égal à 3 d'une fonction f définie sur $[-1, +1]$, associé aux points $\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$;

$$P_3(x) = f(-1)L_0(x) + f(-\frac{1}{3})L_1(x) + f(\frac{1}{3})L_2(x) + f(1)L_3(x)$$

3) Décrire la méthode de quadrature sur $[-1, +1]$ obtenue en remplaçant l'intégrale de f par celle de P_3. Quel est l'ordre de cette méthode ?

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq f(-1)\int_{-1}^1 L_0(x)dx + f(-\frac{1}{3})\int_{-1}^1 L_1(x)dx + f(\frac{1}{3})\int_{-1}^1 L_2(x)dx + f(1)\int_{-1}^1 L_3(x)dx$$

On a :

$$\int_{-1}^1 L_0(x)dx = \frac{-1}{16}\int_{-1}^1 (9x^2-1)(x-1)dx = \frac{1}{4}$$

$$\int_{-1}^1 L_1(x)dx = \frac{9}{16}\int_{-1}^1 (3x-1)(x^2-1)dx = \frac{3}{4}$$

$$\int_{-1}^1 L_2(x)dx = \frac{-9}{16}\int_{-1}^1 (x^2-1)(3x+1)dx = \frac{3}{4}$$

$$\int_{-1}^1 L_3(x)dx = \frac{1}{16}\int_{-1}^1 (x+1)(9x^2-1)dx = \frac{1}{4}$$

D'ou :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 2(\frac{1}{8}f(-1) + \frac{3}{8}f(\frac{-1}{3}) + \frac{3}{8}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{8}f(1))$$

Cette quadrature (méthode de Simpson $\frac{3}{8}$) est donnée sur un intervalle $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}(f(a)+f(a+\frac{b-a}{3})+f(a+2\frac{b-a}{3})+f(a+3\frac{b-a}{3})+f(b))$$

Cette méthode est d'ordre au moins égal à 3 (si f est un polynôme de degré 3 alors $f(x)=P_3(x)$ et au plus égal à 4 (résultat général de la méthode de Newton-cotes).

Soit f est le polynôme de degré 4 tel que $f(x)=x^4$, on a :

$$I=\int_{-1}^{1} f(x)dx = [\frac{x^5}{5}]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} = \frac{14}{35}$$

$$\widetilde{I}_2 = (\frac{1}{8}f(-1)+\frac{3}{8}f(\frac{-1}{3})+\frac{3}{8}f(\frac{1}{3})+\frac{1}{8}f(1)) = \frac{1}{4}(1+\frac{1}{17}+\frac{1}{27}+1) = \frac{14}{27} \neq I$$

Donc, la méthode est d'ordre 3.

Exercice 11 : Soit f une fonction $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On se donne les points $\{x_i\}_{i=0}^m$ de subdivision uniforme de l'intervalle $[a,b]$ définis par $x_i = a+ih$ avec $h=\dfrac{b-a}{m}$. Le but de l'exercice est de trouver une formule de quadrature composite pour approcher l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$:

1) Écrire le polynôme $P(.)$ qui interpole f aux points 0 et 1 ;

$$L_0(x) = \frac{x-1}{0-1} = 1-x \quad \text{et} \quad L_1(x) = \frac{x-0}{1-0} = x$$

Donc :

$$P_1(x) = f(0)(1-x)+f(1)(x) = (f(1)-f(0))x+f(0)$$

2) En déduire une formule de quadrature basée sur l'approximation : $\int_0^1 f(x)dx \simeq \int_0^1 p(x)dx$ et étudier le degré de précision de cette formule de quadrature ;

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \int_0^1 P_1(x)dx = \int_0^1((f(1)-f(0))x+f(0))dx$$
$$= (f(1)-f(0))\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + f(0)\,[x]_0^1 = \frac{f(1)-f(0)}{2}+f(0) = \frac{f(1)+f(0)}{2}$$

3) A l'aide d'un changement de variable affine, déduire une formule de quadrature pour l'intégrale $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$;

On pose $X = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$ $(x = x_i+(x_{i+1}-x_i)X)$ donc $dx = (x_{i+1}-x_i)dX$

D'autre part : $x=x_i \to X=0$ et $x=x_{i+1}\to X=1$ donc :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_0^1 f(x_i+(x_{i+1}-x_i)X)(x_{i+1}-x_i)dX$$

$$=(x_{i+1}-x_i)\int_0^1 f(x_i+(x_{i+1}-x_i)X)dX = (x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_i+(x_{i+1}-x_i)\times 0)+f(x_i+(x_{i+1}-x_i)\times 1)}{2}$$

$$=(x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

4) En utilisant le résultat au point précédent, proposer une formule de quadrature composite pour le calcul approché de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. Quelle méthode de quadrature reconnaît-on ?

Commençant par répartir l'intervalle $[a,b]$ en n sous intervalles de même amplitude : $h=\frac{b-a}{n}$ et $x_i = a+ih$ pour $i=0,...,n$ on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x^n} f(x)dx$$

En utilisant la question précédente pour chaque intégrale et en remarquons que $(x_{i+1}-x_i)=h=\frac{b-a}{n}$ on a :

$$\int_a^b f(x)dx = h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + ... + h\frac{f(x_{i-1})+f(x_n)}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\frac{f(x_0)}{2} + hf(x_1) + ... + hf(x_{n-1}) + h\frac{f(x_n)}{2} = h\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)\right)$$

On reconnaît donc la méthode des trapèzes qui est une méthode composite contrairement à la méthode du trapèze (un) qui est une méthode simple.

Exercice 12 : On souhaite calculer une valeur approchée de $ln(2)$ à partir de la relation $ln(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$. Nous considérerons la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$:

1) Montrer que pour tout $(a,b)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et pour tout $t\in[0,1]$ on a :

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b) \quad (E)$$

On a :

$$f(ta+(1-t)b)-(tf(a)+(1-t)f(b)) = \frac{1}{ta+(1-t)b} - (\frac{t}{a}+\frac{1-t}{b})$$

$$f(ta+(1-t)b)-(tf(a)+(1-t)f(b)) = \frac{ab-(tb(ta+(1-t)b)+(1-t)(ta+(1-t)b))}{ab(ta+(1-t)b)}$$

$$f(ta+(1-t)b)-(tf(a)+(1-t)f(b)) = \frac{ab-(t^2ab+t(1-t)b^2+t(1-t)a^2+(1-t)^2ab)}{ab(ta+(1-t)b)}$$

$$f(ta+(1-t)b)-(tf(a)+(1-t)f(b)) = \frac{2t(1-t)ab-t(1-t)(a^2+b^2)}{ab(ta+(1-t)b)} = -\frac{t(1-t)(b-a)^2}{ab(ta+(1-t)b)} \leq 0$$

Donc (E) est vérifiée.

2) On suppose $0<a<b<+\infty$ et soit $x\in[a,b]$. Montrer que $\frac{b-x}{b-a}\in[0,1]$;

On a $0<a<b$ et $x\in[a,b]$ donc $b-x\geq 0$ et $b-a>0$ soit $\frac{b-x}{b-a}\geq 0$. D'autre part :

$$x\geq a \Rightarrow -x\leq -a \Rightarrow 0<b-x\leq b-a \Rightarrow \frac{b-x}{b-a}\leq 1$$

Donc :

$$\frac{b-x}{b-a}\in[0,1]$$

3) Soit $P_1(x)$ le polynôme d'interpolation pour f aux points a et b Montrer en prenant $t=\frac{b-x}{b-a}$ dans (E) que $f(x)\leq P_1(x)$;

On a :

$$L_0(x)=\frac{x-b}{a-b} \quad L_1(x)=\frac{x-a}{b-a} \quad P_1(x)=\frac{x-b}{a-b}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

On a :

$$t=\frac{b-x}{b-a} \Rightarrow 1-t=\frac{x-a}{b-a}$$

et :

$$f(ta+(1-t)b)\leq tf(a)+(1-t)f(b)$$

$$f(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b)\leq \frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

$$f(\frac{ab-ax+bx-ba}{b-a})\leq P_1(x) \Rightarrow f(x)\leq P_1(x)$$

4) Trouver une approximation de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ en appliquant la méthode des trapèzes combinée avec 2 sous-intervalles. Faire un schéma illustrant le calcul ;

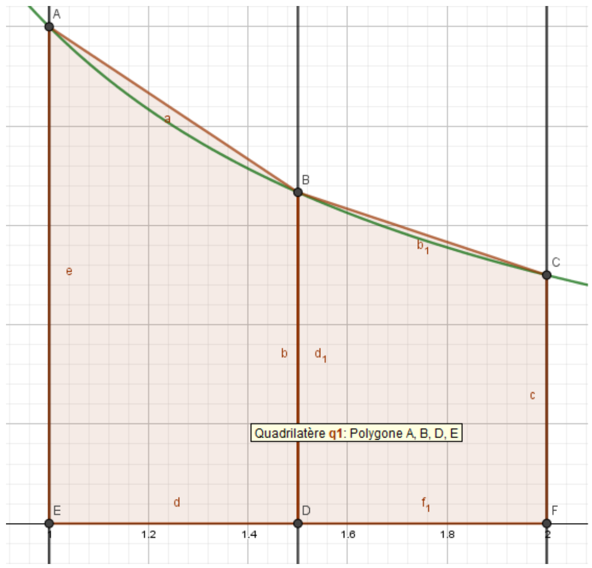
On a :

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f(x)dx \simeq (\frac{3}{2}-1)\frac{f(1)+f(\frac{3}{2})}{2} + (2-\frac{3}{2})\frac{f(\frac{3}{2})+f(2)}{2}$$

$$\int_1^2 f(x)dx \simeq \frac{1}{4}(1+\frac{2}{3}) + \frac{1}{4}(\frac{2}{3}+\frac{1}{2})$$

$$\int_1^2 f(x)dx \simeq \frac{1}{4}(1+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}) = \frac{17}{24}$$

Illustration graphique :



5) Expliquer pourquoi quel que soit le nombre de sous-intervalles, le nombre trouvé par la méthode des trapèzes combinée fournira toujours une approximation par excès (c'est-à-dire supérieure à la valeur exacte $ln(2)$) ;

La méthode composite consiste à subdiviser l'intervalle $[1,2]$ en plusieurs sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ d'amplitude h et d'appliquer la méthode du trapèze (un) sur cet intervalle, or on a :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)d(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}f(x_i) + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}f(x_{i+1}))dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq \frac{f(x_i)}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)dx + \frac{f(x_{i+1})}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq \frac{f(x_i)}{h}(x_{i+1}(x_{i+1}-x_i) - \frac{1}{2}(x_{i+1}^2-x_i^2)) + \frac{f(x_{i+1})}{h}(\frac{1}{2}(x_{i+1}^2-x_i^2) - x_i(x_{i+1}-x_i))$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq \frac{f(x_i)}{h}(x_{i+1}(h) - \frac{h}{2}(x_{i+1}+x_i)) + \frac{f(x_{i+1})}{h}(\frac{h}{2}(x_{i+1}+x_i) - x_i(h))$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq f(x_i)(x_{i+1} - \frac{1}{2}(x_{i+1}+x_i)) + f(x_{i+1})(\frac{1}{2}(x_{i+1}+x_i) - x_i)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq (x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)d(x) \leq h\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$$

On en déduit que que l'aire du trapèze déterminée par les points x_i et x_{i+1} est supérieure à la valeur exacte de l'intégrale, le résultat s'obtient par la somme des valeurs sur tous les intervalles.

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\int_1^2 f(x)dx \leq h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + ... + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

$$\ln(2) = \int_1^2 f(x)dx \leq \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i))$$

6) On approche maintenant $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ en utilisant la méthode Simpson combinée. Combien de sous-intervalles faut-il utiliser pour commettre une erreur inférieure ou égale à 10^{-10} ?

On a :

$$E_n = \frac{2}{180}(\frac{2}{4n})^4|^{(4)}(\eta)|$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f^{(3)} = \frac{-6}{x^4} \quad f^{(4)} = \frac{24}{x^5}$$

Remarquons que :

$$|f^{(4)}(\eta)| \leq \sup_{x\in[1,2]} |f^{(4)}(x)| = 24$$

$$E_n \leq 24 \times \frac{1}{180}(\frac{1}{4n})^4$$

il suffit de prendre n tel que :

$$24 \times \frac{1}{180}(\frac{1}{4})^4\frac{1}{n^4} \leq 10^{-10}$$

Soit :

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{24\times 10^{10}}{180\times 4^4}} \simeq 47,77$$

et :

$$n = 48$$

Équipe pédagogique : M. Benaouda, M. Ferrahi et M. Hjiaj

Les documents relatifs à ce cours sont disponibles sur : www.ferrahi.ma

Faculté des Sciences de Tétouan, BP. 2121 M'Hannech II, 93030 Tétouan Maroc.