

Exercice 1 : Construire le polynôme P_3 qui interpole les points $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 3)$ en utilisant successivement les trois méthodes (directe, Lagrange, Newton).

Exercice 2 : En utilisant la méthode la plus rapide répondre aux questions suivantes :

1. Calculer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \cos(x)$ en utilisant les trois points $x_i = \frac{\pi}{2}i$ avec $i = 0, 1, 2$.
2. Calculer ensuite le polynôme d'interpolation de la même fonction en utilisant les quatre points $x_i = \frac{\pi}{2}i$ avec $i = 0, 1, 2, 3$ (c'est à dire en ajoutant le point $x_3 = \frac{3\pi}{2}$).

Exercice 3 : Trouver le polynôme de l'espace vectoriel $Vec\{1 + x^2, x^4\}$ (engendré par les deux vecteurs $1 + x^2$ et x^4) qui interpole les points $(0, 1)$ et $(1, 3)$.

Exercice 4 : 1. Construire le polynôme de Lagrange P_3 qui interpole les points $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 3)$.
2. Soit Q_2 le polynôme de Lagrange qui interpole les points $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que :

$$Q(x) - P(x) = \lambda(x + 1)x(x - 1)$$

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 + x^3$:

1. Calculer le polynôme P_0 qui interpole f au point d'abscisse $x_0 = 0$;
2. Calculer le polynôme P_1 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$;
3. Calculer le polynôme P_2 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$;
4. Calculer le polynôme P_3 qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$;
5. Calculer le polynôme P_n , $n > 3$ qui interpole f aux points d'abscisse $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\dots$, et $x_n = n$.

Exercice 6 : L'espérance de vie dans un pays a évolué dans le temps selon le tableau suivant :

année	1975	1980	1985	1990
espérance de vie	72,8	74,2	75,2	76,4

Utiliser l'interpolation de Lagrange pour estimer l'espérance de vie en 1977, 1983 et 1988.

Exercice 7 : (Interpolation et polynômes de Tchebychev)

1. Rappeler la définition des polynômes de Tchebychev sur $[-1, 1]$;
2. Donner la relation de récurrence entre ces polynômes et calculer T_4 ;
3. Calculer les racines de T_4 dans $[-1, 1]$ puis déduire les meilleurs noeuds d'interpolation sur l'intervalle $[0, 3]$.

Exercice 8 : Soit f la fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

1. Déterminer P_2 le polynôme d'interpolation de f sur les points support : $-1, 0$ et 1 ;
2. Rappeler la formule de l'erreur et donner une majoration de $|E(x)| = |f(x) - P_2(x)|$;
3. Évaluer l'erreur commise en considérant les points support : $-2, -1, 0, 1$ et 2 .

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2$$

1. Calculer la valeur exacte de $I = \int_0^1 f(x)dx$ puis des valeurs approchées en utilisant les méthodes suivantes : rectangle à droit, rectangle à gauche, rectangle au milieu et du trapèze(un) ;
2. Comparer chacune des valeurs approchées avec la valeur exacte et expliquer en utilisant des représentations graphiques.

Exercice 10 : Estimer $\int_0^{5/2} f(x)dx$ à partir des données suivantes :

x	0	1/2	1	3/2	2	5/2
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	2	2	1,6364	1,2500	0,9565

en utilisant :

1. La méthode des rectangles à gauche composite ;
2. La méthode des rectangles à droite composite ;
3. La méthode des trapèzes composite.

Exercice 11 : 1. Estimer $\int_0^\pi \sin(x)dx$ en utilisant la méthode des trapèzes composite avec 8 et puis 16 sous-intervalles ;

2. Estimer $\int_0^\pi \sin(x)dx$ en utilisant la méthode de Newton-cotes ($n = 4$) ;
3. Utiliser la méthode de Newton pour calculer P_3 le polynôme d'interpolation de f , puis déduire une estimation de $\int_0^\pi \sin(x)dx$.

Exercice 12 : On considère l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$

1. Calculer la valeur exacte de I ;
2. Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes avec $m = 3$ sous-intervalles ;
3. Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question précédente est-elle supérieure à $\ln(2)$? Est-ce vrai quelque soit m ? Justifier la réponse (On pourra s'aider par un dessin) ;
4. Quel nombre de sous-intervalles m faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ? On rappelle que l'erreur de quadrature associée s'écrit, si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$:

$$|E_m| = \left| \frac{(b-a)^2}{12m^2} f''(\xi) \right|, \xi \in]a, b[$$

Exercice 13 : (Méthode de Simpson)

1. Sachant que la méthode de Simpson est exactement la méthode de Newton-cotes avec $n = 2$, calculer les poids $\omega_i, i = 0, 1, 2$ liés à cette quadrature ;
2. Utiliser [1.] pour démontrer la formule de Simpson pour l'estimation de $\int_a^b f(x)dx$;
3. Donner la formule de Simpson composite avec $n = 4$ sur l'intervalle $[0, 4]$;

Exercice 14 : Estimer, à l'aide des théorèmes du cours, le nombre de sous-intervalles n nécessaire pour obtenir une approximation de :

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

avec une erreur moindre que 10^{-2} , en utilisant :

1. La méthode du point milieu combinée ;
2. La méthode des trapèzes combinée ;
3. La méthode de Simpson combinée ;

Commenter les résultats trouvés.