SMC3 - M20: MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE
SÉRIE N^0 2
CORRECTION

- **Exercice 1:** Pour chaque ensemble muni de loi de composition précisée, on a
  - $(\mathbb{N},+)$: N'est pas un groupe car 2, par exemple, n'a pas de symétrique pour la somme (habituellement appelé opposé). Si x est le symétrique de 2 alors: $x+2=2+x=0 \Longrightarrow x=-2 \notin \mathbb{N}$;
  - $(\mathbb{Z},+)$: est un groupe car:
    - **-:** La loi est interne car la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif,
    - **-:** La loi $+$ est associative: $(n+m)+p=n+(m+p)=n+m+p$;
    - **-:** $0 \in \mathbb{Z}$ est l'élément neutre de la loi $+$;
    - **-:** Tout élément $n \in \mathbb{Z}$ admet un symétrique: $n+(-n)=0$;
  - $(\mathbb{Z},\times)$: N'est pas un groupe car 0 n'est pas de symétrique pour le produit (habituellement appelé inverse);
  - $(\mathbb{Z}\backslash\{0\},\times)$: N'est pas un groupe car 2, par exemple, n'a pas de symétrique pour le produit (habituellement appelé inverse). Si x est le symétrique de 2 alors: $x\times 2=2\times x=1 \Longrightarrow x=\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$;
  - $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\times)$: est un groupe,
    - **-:** La loi est interne: le produit de deux nombres réels non nuls est non nul;
    - **-:** La loi est associative, $(x\times y)\times z=x\times(y\times z)=x\times y\times z$;
    - **-:** 1 est l'élément neutre de la loi: $x\times 1=1\times x=x$;
    - **-:** Chaque élément x admet un symétrique: $x\times y=y\times x=1 \Longrightarrow y=\frac{1}{x}$.

- **Exercice 2:** Soit $f_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par: $f_{a,b}(x)=ax+b$. Montrons que l'ensemble $\mathcal{F}=\{f_{a,b}|a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\}$ muni de la composition des applications "$\circ$" est un groupe non commutatif:

  -: Soient $f_{a,b}$ et $f_{c,d}$ deux éléments de $\mathcal{F}$ et $g=f_{a,b}\circ f_{c,d}$: On a:

$$g(x)=f_{a,b}[f_{c,d}(x)]=f_{a,b}(cx+d)=a(cx+d)+b=acx+ad+b=(ac)x+(ad+b)=f_{(ac),(ad+b)}(x)$$

  donc: $g=f_{(ac),(ad+b)}\in\mathcal{F}$ est la loi est interne;

  -: On a:

$$(f_{a,b}\circ f_{c,d})\circ f_{a',b'}=f_{(ac),(ad+b)}\circ f_{a',b'}=f_{(aca'),(acb'+ad+b)}$$

  et:

$$f_{a,b}\circ(f_{c,d}\circ f_{a',b'})=f_{a,b}\circ(f_{(ca'),(cb'+d)})=f_{(aca'),(acb'+ad+b)}$$

  et la loi est associative

$$(f_{a,b}\circ f_{c,d})\circ f_{a',b'}=f_{a,b}\circ(f_{c,d}\circ f_{a',b'})=f_{(aca'),(acb'+ad+b)}$$

  -: On a:

$$f_{a,b}\circ f_{1,0}=f_{(a\times 1),(a\times 0+b)}=f_{a,b}$$

et
$$f_{1,0}\circ f_{a,b}=f_{(1\times a),(1\times b+0)}=f_{a,b}$$
donc $f_{1,0}\in\mathcal{F}$ est l'élément neutre;

-: Soit $f_{a,b}\in\mathcal{F}$, $f_{c,d}$ est le symétrique de $f_{a,b}$ si:
$$f_{a,b}\circ f_{c,d}=f_{(ac),(ad+b)}=f_{1,0}\Longrightarrow ac=1 \text{ et } ad+b=0\Longrightarrow c=\frac{1}{a} \text{ et } d=\frac{-b}{a}$$
et:
$$f_{c,d}\circ f_{a,b}=f_{(ca),(cb+d)}=f_{1,0}\Longrightarrow ca=1 \text{ et } cb+d=0\Longrightarrow c=\frac{1}{a} \text{ et } d=-cb=-\frac{1}{a}b=\frac{-b}{a}$$
Donc, si $a\neq 0$, le symétrique de $f_{a,b}$ est $f_{\frac{1}{a},\frac{-b}{a}}\in\mathcal{F}$

Remarque: Il faut rectifier $\mathcal{F}$ comme suit: $\mathcal{F}=\{f_{a,b}|a\in\mathbb{R}^*,b\in\mathbb{R}\}$ pour que $(\mathcal{F},\circ)$ soit un groupe.
On a:
$$f_{1,1}\circ f_{2,2}=f_{2,3} \text{ et } f_{2,2}\circ f_{1,1}=f_{2,4}$$
Donc $(\mathcal{F},\circ)$ est un groupe con commutatif.

- **Exercice 3:** On considère la loi $\star$ définie sur $\mathbb{R}$ par $a\star b=a+b-ab$.
  - Vérifiant que la loi $\star$ est interne sur $\mathbb{R}$;
    Le produit, la somme et la soustraction sont des lois internes dans $\mathbb{R}$, si a et b sont deux réels alors ab, $a+b$ et $(a+b)-ab\in\mathbb{R}$. Donc la loi $\star$ est interne;
  - Vérifiant que la loi $\star$ est associative sur $\mathbb{R}$:
$$(a\star b)\star c=(a+b-ab)\star c=a+b-ab+c-(a+b-ab)c=a+b-ab+c-(ac+bc-abc)=a+b+c-ab-ac-bc+abc$$
    et
$$a\star(b\star c)=a\star(b+c-bc)=a+b+c-bc-a(b+c-bc)=a+b+c-bc-ab-ac+abc=a+b+c-ab-ac-bc+abc$$
    Donc $a\star(b\star c)=(a\star b)\star c$ et $\star$ est associative;
  - Montrons que $\star$ à un élément neutre sur $\mathbb{R}$.
    Si e est un élément de $\star$ alors:
    $a\star e=a\Longrightarrow a+e-ae=a\Longrightarrow e(1-a)=0\Longrightarrow e=0$ si $a\neq 1$;
    $e\star a=a\Longrightarrow e+a-ea=a\Longrightarrow e(1-a)=0\Longrightarrow e=0$ si $a\neq 1$;
    On a: $0\star a=a\star 0=a$ pour tout $a\in\mathbb{R}$ donc 0 est un élément neutre de $\star$.
    Si e' est un autre élément neutre alors $e'\star 0=0\Longrightarrow e'+0-e'\times 0=0\Longrightarrow e'=0$ et l'élément neutre est unique.
  - Vérifiant si tout $a\in\mathbb{R}$ admet un symétrique: Soit b le symétrique de a, alors:
    $a*b=a+b-ab=0\Longrightarrow a+b(1-a)=0\Longrightarrow b=\frac{a}{a-1}$ si $1-a\neq 0$.
    En particulier, si b est le symétrique de 1 alors $1\star b=0\Longrightarrow 1+b-1\times b=0\Longrightarrow 1=0$ ce qui est impossible et 1 n'a pas de symétrique et $(\mathbb{R},\star)$ n'est pas un groupe.
- **Exercice 4:** Soit $\mathcal{M}_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}|a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.
  - Montrons que $(\mathcal{M}_2,+)$ est un groupe Abélien:
    -: La somme de deux matrices carrées de dimension deux est encore une matrice carrée de dimension deux est la loi $+$ est interne sur $\mathcal{M}_2$;
    -: L'addition matricielle est généralement associative:
$$\left(\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix} a'' & b''\\ c'' & d''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+a'+a'' & b+b'+b''\\ c+c'+c'' & d+d'+d''\end{pmatrix}$$
    et
$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a'' & b''\\ c'' & d''\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a+a'+a'' & b+b'+b''\\ c+c'+c'' & d+d'+d''\end{pmatrix}$$

-: La matrice nulle est l'élément neutre de l'addition matricielle:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

-: Existence du symétrique, on a:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc le symétrique de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

-: On a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

Donc $(\mathcal{M}_2, +)$ est un groupe Abélien.

- Donnons un exemple d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2$ telle que $DetM = 0$.

  Soit $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ On a: $DetM_0 = 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0.$
- La matrice $M_0 \in (\mathcal{M}_2, \times)$ et M_0 n'admet pas de symétrique pour le produit (appelé habituellement inverse) car de déterminant nul. On en déduit que $(\mathcal{M}_2, \times)$ n'est pas un groupe;
- Soit $\mathcal{M}_2^* = \{M \in \mathcal{M}_2 | DetM = ad - bc \neq 0\}$, Montrons que $(\mathcal{M}_2^*, \times)$ est un groupe:

  -: Le produit de deux matrices carrées de dimensions deux est encore une matrice carrée de dimension deux et en plus:

  $$Det(A \times B) = DetA \times DetB \neq 0 \text{ Si } A \text{ et } B \in \mathcal{M}_2$$

  Donc la loi $\times$ est interne sur $\mathcal{M}_2$;

  -: Le produit de matrices est en général associatif: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;

  -: On a $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$ car $DetI_2 = 1.$

  La loi $\times$ admet I_2 comme élément neutre sur $\mathcal{M}_2$.

  -: Soit $A \in \mathcal{M}_2$ alors $DetA \neq 0$ et A admet une matrice inverse A^{-1} telle que $A * A^{-1} = A^{-1} * A = I_2$, or A^{-1} est une matrice carrée de dimension deux et en plus A^{-1} est inversible avec $(A^{-1})^{-1} = A$ ce que implique que $A^{-1} \in \mathcal{M}_2$. On en déduit que tout élément de $\mathcal{M}_2$ admet un symétrique (matrice inverse).

  -: 0n a:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

  et

  $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  ce que montre que a loi $\times$ n'est pas commutative sur $\mathcal{M}_2$ et:
  $(\mathcal{M}_2, \times)$ un groupe non commutatif.
- Montrons que $\mathcal{M}_2^1 = \{M \in \mathcal{M}_2^* | DetM = ad - bc = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2^*, \times)$:

  -: On a $DetI_2 = 1 \Longrightarrow I_2 \in \mathcal{M}_2^*$, l'élément neutre appartient à $\mathcal{M}_2^*$;

  -: Soit A et B dans $\mathcal{M}_2^*$, on a: $Det(A \times B) = DetA \times DetB = 1 \times 1 = 1$ donc $A \times B \in \mathcal{M}_2^*$;

  -: Soit $A \in \mathcal{M}_2^*$, on a $Det(A * A^{-1}) = I_2$ donc:
  $Det(A * A^{-1}) = DetA \times Det(A^{-1}) = 1 \Longrightarrow Det(A^{-1}) = 1$ et $A^{-1} \in \mathcal{M}_2^*$. On en déduit que $(\mathcal{M}_2^*, \times)$ est un sous groupe de $(\mathcal{M}_2, \times)$
- On a $\mathcal{M}_2^* \subset \mathcal{M}_2$ or, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ l'élément neutre de $(\mathcal{M}_2, +)$ n'appartient pas à $\mathcal{M}_2^*$.

  Donc: $(\mathcal{M}_2^*, +)$ n'est pas un sous groupe de $(\mathcal{M}_2, +)$

De la même manière $(\mathcal{M}_2^1, +)$ n'est pas un sous groupe de $(\mathcal{M}_2, +)$ (lélément neutre n'appartient pas à $\mathcal{M}_2^1$).

- $\mathcal{M}_2^\bullet = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} | a, c \in \mathbb{R} \right\}$ n'est pas un sous ensemble de $\mathcal{M}_2^*$ car $Det \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = 0$.
  par conséquent $\mathcal{M}_2^\bullet$ ne peut pas être un sous groupe $(\mathcal{M}_2^*, \times)$.

  $\mathcal{M}_2^\bullet$ est un sous Groupe de $(\mathcal{M}_2, +)$, i suffit de vérifier les trois propriétés.

- **Exercice 5:** Soit ABC un triangle équilatéral du plan.
  - Déterminons l'ensemble des rotations (dans le plan) qui laissent invariants $\{A, B, C\}$:
    Soit G le centre de gravité (intersection des droites remarquables: médianes, bissectrices et médiatrices, les rotations laissant invariants les sommets du triangle sont: - $S_1(G, +\frac{2\pi}{3})$;
    - $S_2(G, -\frac{2\pi}{3})$;
    - $S(G, 2\pi) = Id$.

  - Montrons que cet ensemble muni de la composition des applications "$\circ$" est un groupe. On a:

$\circ$	Id	S_1	S_2
Id	Id	S_1	S_2
S_1	S_1	S_2	Id
S_2	S_2	Id	S_1

  - Faire le même travail pour un carré $ABCD$:
    Soit O le centre du carrée, les rotations laissant invariants les sommets A, B, C et D:
    - $S_1(O, +\frac{\pi}{2})$;
    $S_2(O, -\frac{\pi}{2})$;
    $S_3(O, +\pi)$;
    $S_3(O, +2\pi) = Id$;

  - Déterminer l'ensemble des transformations (dans le plan ou non) qui laissent invariants $\{A, B, C\}$ et dresser la table du groupe des transformations (voir cours)

- **Exercice 6:**
  - $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ est un groupe d'après les propriíés du cours.
    $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe (0 n'a pas d'inverse).
    $(\mathbb{Z}_3^*, \times)$ est un groupe en utilisant les propriétés su cours.

  - $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ est un groupe, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \times)$ n'est pas un groupe et $(\mathbb{Z}_4^*, \times)$ est un groupe

- **Exercice 7:** Groupes de Permutations.
  - Donnons les éléments de $\mathbb{S}_2$: $Id(a \to a, b \to b)$ et $p(a \to b, b \to a)$ avec $p \circ p = Id$ La table de ce groupe est immédiate
  - Donner les éléments de $\mathbb{S}_3$ et construire la table de ce groupe. (voir cours)
- **Exercice 8:** Sous-groupes.
  - Montrons que $H = \{2^n | n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \times)$:
    -: $1 = 2^0 \in H$, l'élément neutre appartient à H;
    -: $2^n \times 2^m = 2^{n+m} \in H$, le produit de deux éléments de H est encore dans H;
    -: $\frac{1}{2^n} = 2^{-n} \in H$, l'inverse de tout élément de H est dans H; Donc H est un sous groupe de $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \times)$.

- Montrer que si H et H' sont deux sous-groupes de G alors $H \cap H'$ est aussi un sous-groupe de G:

  -: $e \in H$ et $\in H' \Longrightarrow e \in H \cap H'$,

  -: Soit x et y dans $H \cap H'$, les deux éléments sont dans H donc $x * y \in H$ et aussi sont dans H' donc $x * y \in H' \Longrightarrow x * y \in H \cap H'$;

  -: Soit $x \in H \cap H'$, le symétrique de x est dans H (car sous groupe) et dans H' (pour la même raison) donc: $x \in H \cap H'$
  en déduit que $H \cap H'$ est un sous groupe de G.

- Montrons que $8\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$:
  On a $8 \in 8\mathbb{Z}$ et $5 \in 5\mathbb{Z}$ donc 8 et 5 appartient à $8\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$ mais $8 + 5 = 13$ est ni multiple de 8 ni multiple de 5 donc $8 + 5$ n'appartient pas à $8\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$ et donc $8\mathbb{Z} \cup 5\mathbb{Z}$ n'est pas un sous groupe.
- Déterminons les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ engendrés par: 8: $8\mathbb{Z}$
  20: $20\mathbb{Z}$
  $\{8, 20\}$: $PGCD(20, 8)\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z}$

- **Exercice 9:** Morphisme de groupes.
  - Soit $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \times)$ l'application telle que: $f(n) = 2^n$. Montrons que f est un morphisme de groupes:
    On a $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, \times)$ sont deux groupes et:
    $f(0_{\mathbb{Z})} = 2^0 = 1 = 1_{\mathbb{Q}^*}$
    $f(n + m) = 2^{n+m} = 2^n \times 2^m = f(n) \times f(m)$
    Donc f est un morphisme de Groupe.
    On a: $Kerf = \{n\mathbb{Z} | f(n) = 1\} = \{0\}$ est f est injectif;
    et $Imf = \{2^n | n \in \mathbb{Z}\} \neq \mathbb{Q}^*$ donc f n'est pas surjectif.
  - Montrons qu'il n'existe pas de morphisme $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ tel que $f(2) = 3$
    Supposons que f vérifie cette propriété: $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1) = 3$ donc $f(1) = \frac{3}{2}$ ce que contredit que f à images dans $\mathbb{Z}$.
  - Montrons que $f, g : (\mathbb{R}^*, \times) \to (\mathbb{R}^*, \times)$ deux applications telles que: $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ sont des isomorphisme de groupes.
    $f(0) = g(0) = 0$
    $f(x \times y) = (x \times y)^2 = x^2 \times y^2 = f(x) \times f(y)$
    $g(x \times y) = (x \times y)^3 = x^3 \times y^3 = f(x) \times f(y)$
    Donc f et g sont des morphismes de groupes.
    f n'est pas un isomorphisme car n'est pas injectif ($kerf = \{-1, 1\} \neq \{1\}$)
    g est un isomorphisme car $kerf = \{1\}$ et $Img = \{y \in \mathbb{R} | \exists x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R} : y = f(x)\} = \mathbb{R}$