

Exercice 1 :

- Vérifier que 9325 s'écrit bien $(10010001101101)_2$ en base 2.
- Écrire $(90)_{10}$ et $(97)_{10}$ en base 2, effectuer, en opérations binaires, le produit et la somme des deux nombres puis procéder à la vérification des résultats obtenus.

La vérification peut se faire dans les deux sens. D'une part, nous avons :

$$9325 = 2 \times 4662 + 1$$

$$4662 = 2 \times 2331 + 0$$

$$2331 = 2 \times 1165 + 1$$

$$1165 = 2 \times 582 + 1$$

$$582 = 2 \times 291 + 0$$

$$291 = 2 \times 145 + 1$$

$$145 = 2 \times 72 + 1$$

$$72 = 2 \times 36 + 0$$

$$36 = 2 \times 18 + 0$$

$$18 = 2 \times 9 + 0$$

$$9 = 2 \times 4 + 1$$

$$4 = 2 \times 2 + 0$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

$$1 = 2 \times 0 + 1$$

Donc :

$$9325 = 9325^{10} = \overline{10010001101101}^2$$

D'autre part, la vérification peut se faire aussi de la manière suivante :

$$\overline{10010001101101}^2 = \underbrace{1}_{\times 2^{13}} \underbrace{0}_{\times 2^{12}} 0100011011 \underbrace{0}_{\times 2^1} \underbrace{1}_{\times 2^0}$$

$$\overline{10010001101101}^2 = \underbrace{1}_{\times 8192} \underbrace{0}_{\times 4096} 0100011011 \underbrace{0}_{\times 2} \underbrace{1}_{\times 1}$$

$$\overline{10010001101101}^2 = 1 \times 8192 + 0 \times 4096 + \dots + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 9325$$

La transformation d'un nombre en écriture binaire (base 2) se fait à travers les divisions successives puis en notant les restes dans le sens inverse :

$$90 = 2 \times 45 + 0$$

$$45 = 2 \times 22 + 1$$

$$22 = 2 \times 11 + 0$$

$$11 = 2 \times 5 + 1$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

$$1 = 2 \times 0 + 1$$

$$97 = 2 \times 48 + 1$$

$$48 = 2 \times 24 + 0$$

$$24 = 2 \times 12 + 0$$

$$12 = 2 \times 6 + 0$$

$$6 = 2 \times 3 + 0$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

$$1 = 2 \times 0 + 1$$

Donc :

$$90 = \overline{1011010}^2 \quad \text{et} \quad 97 = \overline{1100001}^2$$

On a :

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ + \\ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\ = \\ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Vérification : $90 + 97 = 187$

$$187 = 93 \times 2 + 1$$

$$93 = 46 \times 2 + 1$$

$$46 = 23 \times 2 + 0$$

$$23 = 11 \times 2 + 1$$

$$11 = 5 \times 2 + 1$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

$$1 = 0 \times 2 + 1$$

Donc : $90 + 97 = 187 = \overline{10111011}^2$ qui est exactement l'écriture trouvée auparavant. Nous pouvons aussi, vérifier en calculant la valeur de l'écriture binaire trouver auparavant.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 - 2$.

- Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $\bar{x}$ sur l'intervalle $[1, 2]$. Quelle est la valeur exacte de $\bar{x}$?

- Écrire les algorithmes permettant le calcul d'une valeur approchée, de $\bar{x}$ avec une précision $|f(x_k)| \leq 10^{-3}$, en utilisant les méthodes : Dichotomie, Lagrange et Newton.

- Pour chaque méthode, calculer les quatre premières valeurs de la suite récurrente. Comparer et expliquer.

Rappels :

La méthode de la Dichotomie :

Recherche de la racine $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ ($\bar{x}$ est la seule racine dans $[a, b]$) avec une précision ε .

Initialisation : $a_0 = a, b_0 = b$

Tant que $|b_k - a_k| > \varepsilon$ (test d'arrêt) $\rightarrow$ faire $\downarrow$ (une boucle de calcul à refaire tant que la condition est vérifiée) :

Calculer $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et :

Si $f(a_k)f(x_k) < 0$ Alors $a_{k+1} := a_k$ et $b_{k+1} := x_k$

Sinon $a_k := x_k$ et $b_{k+1} := b_k$

Si $|b_n - a_n| \leq \varepsilon \rightarrow$ Fin.

Conclusion : $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ est une valeur approchée de $\bar{x}$ avec une précision ε .

Méthode de Lagrange (utilisant la droite qui passe par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ au lieu du centre de l'intervalle $[a_k, b_k]$) :

Recherche de la racine $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ ($\bar{x}$ est la seule racine dans $[a, b]$) avec une précision ε .

La méthode est une généralisation de la méthode de dichotomie : la valeur de x_k est déterminée comme intersection de la droite qui passe par les deux points $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ et l'axe des abscisses.

La méthode est à différencier avec les autres méthodes utilisant une sécante notamment la variante de la méthode de Newton qui consiste à remplacer $f'(x_{k+1})$ par $\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ ou, autrement dit, on remplace la tangente par la sécante.

Initialisation : $a_0 = a, b_0 = b$

Tant que $|b_k - a_k| > \varepsilon$ (test d'arrêt) $\rightarrow$ faire $\downarrow$ (une boucle de calcul à refaire tant que la condition est vérifiée) :

Calculer $x_k = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(a_k) = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$ et :

Si $f(a_k) f(x_k) < 0$ Alors $a_{k+1} := a_k$ et $b_{k+1} := x_k$

Sinon $a_k := x_k$ et $b_{k+1} := b_k$

Si $|b_n - a_n| \leq \varepsilon \rightarrow$ Fin.

Conclusion : $x_n = a_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} f(a_n) = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$ est une valeur approchée de $\bar{x}$ avec une précision ε .

Les tests d'arrêt peuvent être différents d'une méthode à l'autre et suivant la précision cherchée, généralement, nous pouvons distinguer trois type de conditions d'arrêt :

- 1) Majoration de l'erreur absolue par une quantité qui ne dépend pas de la racine recherchée $\bar{x}$ ni de x_k , par exemple, dans les méthodes de Dichotomie et de la Lagrange on a :

$$|x_k - \bar{x}| \leq |b_k - a_k|$$

Il st suffisant de choisir $|b_k - a_k| \leq \varepsilon$ pour obtenir la précision recherchée

- 2) Test basé sur le résidu : $|f(x_k)| \leq \varepsilon$

- 3) Test basé sur l'incrément : $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$

Suivant la situation et les conditions initiales, chaque test peut être considéré comme satisfaisant ou trop restrictif.

Méthode de Newton : Cette méthode définit une suite récurrente $(x)_k$ qui converge (sous des conditions) vers la solution de l'équation.

Pour déterminer x_{k+1} , la méthode consiste à remplacer localement la courbe de la fonction par la tangente qui passe pas x_k et d'équation : $T_k : y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$

La valeur x_{k+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite T_k avec l'axe des abscisses (l'intersection n'existe que si $f'(x_k) \neq 0$), on a :

$$0 = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = x_{k+1}f'(x_k) - x_k f'(x_k) + f(x_k) \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

car $f'(x_k) \neq 0$.

L'algorithme pour une convergence à ε près ; x_0 donnée, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Tant que $|x_{k+1} - x_k| > \varepsilon$ (ou tant que $|f(x_k)| > \varepsilon$) $\downarrow$ Faire (une boucle de calcul) :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Le dernier terme de la suite est une approximation de $\bar{x}$ à ε près.

Conditions suffisantes de convergence de la suite x_n vers la racine $\bar{x}$:

- 1) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$
- 2) $f(a)f(b) < 0$
- 3) $f'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$ (c'est à dire strictement positive ou strictement négative sur l'intervalle ouvert)
- 4) $f''(x) \neq 0$ sur $]a, b[$ (c'est à dire strictement positive ou strictement négative sur l'intervalle ouvert)
- 5) $f(x_0)f''(x) > 0$ sur $[a, b]$ ($f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ sur l'intervalle)

REMARQUE :

1) Si $f(x_0)f''(x) < 0$ on calcule x_1 et si $f(x_1)f''(x) > 0$ et $x_1 \in [a, b]$ nous avons aussi la convergence.

On veut calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ dans l'intervalle $[1; 2]$.

Localisation de la racine : On a : $f(1) = -1$ et $f(2) = 2$ donc : $f(1)f(2) < 0$ et on déduit, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que $f(x) = 0$ admet **au moins une solution**. En plus, nous avons $f'(x) = 2x > 0$ sur $[1, 2[$ donc la fonction est strictement croissante et elle admet **une solution unique** dans $[1, 2]$ cette solution (positive) est donnée par : $x = \sqrt{2}$.

Algorithmes :

Dichotomie :

$a_0 = 1, b = 2$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$

Tant que $|f(x_k)| > 10^{-3}$ faire :

Si $f(a_k)f(x_k) > 0$ alors $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ sinon $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$

$$x_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$$

Lagrange :

$a_0 = 1, b = 2$ et $x_0 = \frac{a_0f(b_0)-b_0f(a_0)}{f(b_0)-f(a_0)}$

Tant que $|f(x_k)| > 10^{-4}$ faire :

Si $f(a_k)f(x_k) > 0$ alors $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ sinon $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$

$$x_{k+1} = \frac{a_kf(b_k)-b_kf(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}$$

Newton

Lorsque les conditions de convergence sont vérifiées :

$x_0 = 2$ (ou toute valeur telle que $f(x_0)$ positive comme $f''(x)$).

Tant que $|f(x)| > 10^{-3}$ faire :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de dichotomie dans l'intervalle $[1; 2]$.

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	$f(x_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	1	1.5	2	-	0.25	+	+
1	1	1.25	1.5	-	-0.4375	-	+
2	1.25	1.375	1.5	-	-0.1093	-	+
3	1.375	1.4375	1.5	-	0.0664	+	+
4	1.375	1.40625	1.4375				

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de Lagrange dans l'intervalle $[1; 2]$.

(Les résultats sont présentés avec plusieurs chiffres après la virgule pour permettre les comparaisons, nous pouvons présenter les valeurs tronquées à un certain nombre de chiffres après la virgule).

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	1	1.333333333	2	-1	-0,2222222222222222	2
1	1.333333333	1.4	2	-0,2222222222222222	-0,04000000000000003	2
2	1.4	1.411764706	2	-0,04000000000000003	-0,00692041522491316	2
3	1.411764706	1.413793103	2	-0,00692041522491316	-0,00118906064209301	2
4	1.413793103	1,4141414141414141	2	-0,00118906064209301	-0,000204060810122142	2

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de Newton dans l'intervalle $[1; 2]$.

$$x_0 = 2 \quad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$$

k	x_k
0	2
1	1,5
2	1,416666666666667
3	1,41421568627451
4	1,41421356237469

(Les résultats sont présentés avec plusieurs chiffres après la virgule pour permettre les comparaisons, nous pouvons présenter les valeurs tronquées à un certain nombre de chiffres après la virgule).

Les valeurs obtenues avec les trois méthodes sont, respectivement : 1.41375, 1,4141414141414141 et 1,41421356237469

Nous pouvons évaluer, avec une calculatrice, l'erreur en calculant $|x_4 - \sqrt{2}|$

$$|1.41375 - \sqrt{2}| = 0.0004$$

$$|1,41414141414141 - \sqrt{2}| = 0.0007$$

$$|1,41421356237469 - \sqrt{2}| = 0.00000000004$$

On en déduit que la meilleure précision est donnée par la méthode de Newton. Cette remarque est toute à fait normale car la méthode de Newton est d'ordre 2 alors que les autres sont des méthodes d'ordre 1.

Exercice 3 :

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement décroissante telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$.

- Sachant que $f(0.6) = 0$, déterminer les quatre premières termes de la suite récurrente définie par la méthode de la dichotomie sur l'intervalle $[0; 1]$ pour l'approximation du zéro de f .

- Combien d'itérations faut-il effectuer pour approcher le zéro de f à 2^{-10} près ? à 10^{-10} près ?

Les conditions de l'application du théorème des valeurs intermédiaires sont vérifiées, nous pouvons en déduire qu'il existe une seule racine ($\bar{x} = 0.6$) dans l'intervalle $[0; 1]$.

Méthode de la dichotomie dans l'intervalle $[0; 1]$

On applique successivement les étapes de la méthode de Dichotomie en remarquons que $f(x) > 0$ sur $[0, 0.6[$ et $f(x) < 0$ sur $]0.6, 1]$.

$a_0 = 0, b_0 = 1, x_0 = 0.5, f(x_0) > 0, f(a_0)f(x_0) > 0$, donc $a_1 = x_0$ et $b_1 = 0_0$ et ainsi de suite :

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	0	0.5	1	+	+	-
1	0.5	0.75	1	+	-	-
2	0.5	0,625	0.75	+	-	-
3	0.5	0,5625	0,625	+	+	-
4	0,5625	0,59375	0,625	+	+	-

Combien d'itérations faut-il effectuer pour approcher le zéro de f à 2^{-10} près ?

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 2^{-10} \Rightarrow -n \ln(2) \leq -10 \ln(2) \Rightarrow n \geq 10 \Rightarrow n = 10$$

Autre méthode.

$$n \geq \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2-1) - \ln(2^{-10})}{\ln(2)} = 10 \Rightarrow n = 10$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. On s'intéresse à l'étude des racines de l'équation $f(x) = 0$. (Les valeurs approchées sont à présenter par défaut avec trois chiffres après la virgule).

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$.
- Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$.
- On souhaite maintenant utiliser la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n . Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix. x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2 .
- On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\bar{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\bar{x}_0$ et $\bar{x}_1$ et calculer, en suite, les valeurs suivantes $\bar{x}_2$ et $\bar{x}_3$.
- Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\bar{x}_3$ comme valeur approchée de r ?

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$;
 f est un polynôme continu, $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$ alors $f(0).f(1) < 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine dans $[0, 1]$.
D'autre part, $f'(x) = 4x(x^2 + 1) > 0$ sur $]0, 1[$ donc f est strictement croissante et l'équation admet une et une seule solution $r \in [0, 1]$.

Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$;
 $r \in [0, 1]$ $x_0 = \frac{0+1}{2} = 0,5$ et $f(x_0) = f(0,5) = -0,44$ on a $f(0).f(0,5) > 0$ donc $r \in]0,5; 1[$
 $r \in]0,5; 1[$ $x_1 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$, $f(0,75) = 0.44$ on a $f(0,5).f(0,75) < 0$ donc $r \in]0,5; 0,75[$.

On souhaite maintenant affiner l'approximation en utilisant la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n . Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix ;
On a $f(x) = 4x(x^2 + 1) > 0$ sur $]0.5, 0.75[$, $f''(x) = 12x^2 + 4 > 0$ sur $]0.5, 0.75[$ et $f(0,5) = -0,44 < 0$ alors que $f(0,75) = 0.44 > 0$ pour que la méthode converge il faut choisir x_0 tel que $f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ donc : $x_0 = 0,75$.
 x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2 ;

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^4 + 2x_k^2 - 1}{4x_k^3 + 4x_k} = \frac{4x_k^4 + 4x_k^2 - (x_k^4 + 2x_k^2 - 1)}{4x_k^3 + 4x_k} = \frac{3x_k^4 + 2x_k^2 + 1}{4x_k^3 + 4x_k}$$
$$x_1 = \frac{3x_0^4 + 2x_0^2 + 1}{4x_0^3 + 4x_0} \simeq 0,655$$
$$x_2 = \frac{3x_1^4 + 2x_1^2 + 1}{4x_1^3 + 4x_1} \simeq 0,643$$

On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\bar{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\bar{x}_0$ et $\bar{x}_1$ et calculer, en suite, les deux valeurs suivantes $\bar{x}_2$ et $\bar{x}_3$;

D'après la question 2) on a : $r \in]0.5, 0.75[$ on peut choisir $\bar{x}_0 = 0,5$ et $\bar{x}_1 = 0,75$ nous avons $f(0.5) \simeq -0.437$ et $f(0.75) \simeq 0.441$.

On a :

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \frac{\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}}{f(\bar{x}_k) - f(\bar{x}_{k-1})} f(\bar{x}_k) = \frac{\bar{x}_{k-1} f(\bar{x}_k) - \bar{x}_k f(\bar{x}_{k-1})}{f(\bar{x}_k) - f(\bar{x}_{k-1})}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\bar{x}_0 f(\bar{x}_1) - \bar{x}_1 f(\bar{x}_0)}{f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_0)} \simeq 0,624 \quad \text{et} \quad f(\bar{x}_2) \simeq -0.069$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\bar{x}_1 f(\bar{x}_2) - \bar{x}_2 f(\bar{x}_1)}{f(\bar{x}_2) - f(\bar{x}_1)} \simeq 0,641$$

Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\bar{x}_3$ comme valeur approchée de r ?

On a :

$$|\bar{x}_3 - \bar{x}_2| \simeq |0,641 - 0,624| = 0,017$$

Donc la précision est à 10^{-2} près.

Exercice 5 :

A titre de rappel, la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[a; b]$ définit la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} x_0 & \text{bien choisie} \\ x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

On suppose que cette suite admet une limite sur $[a; b]$ notée ℓ . Montrer que si f est 3 fois dérivable sur $[a; b]$ et que $f'(\ell) \neq 0$ alors la méthode de Newton est d'ordre 2 au moins.

Si la racine ℓ est telle que $f'(\ell) \neq 0$ et si la suite $x_n \rightarrow \ell$ la convergence est au moins quadratique ($p = 2$). En effet :

$$x_{n+1} - \ell = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \ell$$

Ou encore (en rappelant que $f(\ell) = 0$) :

$$(1) \quad x_{n+1} - \ell = \frac{(x_n - \ell)f'(x_n) - f(x_n) + f(\ell)}{f'(x_n)}$$

D'autre part, par application de la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 2, il existe ξ_n compris entre x_n et ℓ tel que :

$$\begin{aligned} f(\ell) &= f(x_n) + (\ell - x_n)f'(x_n) + \frac{(\ell - x_n)^2 f''(\xi_n)}{2} \\ \Rightarrow f(\ell) - f(x_n) &= (\ell - x_n)f'(x_n) + \frac{(\ell - x_n)^2 f''(\xi_n)}{2} \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$x_{n+1} - \ell = \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \frac{(\ell - x_n)^2}{2} \Rightarrow e_{n+1} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} e_n^2$$

On en déduit (on peut supposer que $f'(\bar{x}) > 0$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|f''(\ell)|}{2|f'(\ell)|} > 0 \quad \text{finie}$$

En effet, on a :

$$x_n \rightarrow \ell$$

ξ_n est comprise entre x_n et $\ell \Rightarrow \xi_n \rightarrow \ell$

f' et f'' sont continues (f de classe $\mathcal{C}^2$) alors : $f''(\xi_n) \rightarrow f''(l)$ et $f'(x_n) \rightarrow f'(l)$.

Donc, la méthode de Newton est d'ordre 2 (quadratique) au moins.

Exercice 6 :

On considère l'équation (E) donnée par : $(E) \quad x^3 + 10x = 20 - 2x^2$.

- Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser.

- Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$.

- Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0 , x_1 et x_2) de la solution de (E) . En déduire une estimation de l'erreur commise en considérant x_3 .

- On considère le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2 + 2x_n + 10} \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E) .

- Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x \in [1, 2]} \left| \frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2} \right| \leq \frac{40}{132}$).

- Pour $x_0 = 1$, calculer x_1 , x_2 et x_3 .

Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser ;

On a :

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + 10x = 20 - 2x^2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ avec } f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$;

Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires, f est continue sur $\mathbb{R}$ (Polynôme) et on a :

$$f(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 + 10 \times 1 - 20 = -7 \text{ et } f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 + 10 \times 2 - 20 = 16$$

Donc, l'équation $f(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$. D'autre part :

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 > 0 \text{ car } \Delta = 16 - 120 = -104 < 0$$

On en déduit que f est croissante sur l'intervalle $[1, 2]$ et par conséquent, l'équation $f(x)$ admet au seule solution $\bar{x}$ dans cet intervalle.

Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0 , x_1 et x_2) de la solution de (E) . En déduire l'erreur commise en considérant x_3 (comme solution approchée) ;

$f(x)$ admet au seule solution dans l'intervalle $[1, 2]$:

On a :

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1,5 \text{ et } f(1,5) = 2,875 \text{ avec } f(1) \times f(1,5) < 0 \Rightarrow \text{la solution est dans } [1; 1,5]$$

et :

$$x_1 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25 \text{ et } f(1,25) = -2,422 \text{ avec } f(1,25) \times f(1,5) < 0 \Rightarrow \text{la solution est dans } [1,25; 1,5]$$

ensuite :

$$x_2 = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375 \text{ et } f(1,375) = 0,130 \text{ avec } f(1,25) \times f(1,375) < 0 \Rightarrow \text{la solution est dans } [1,25; 1,375]$$

La valeur exacte $\bar{x}$ et valeur approchée x_3 sont dans l'intervalle $[1,25; 1,375]$ donc

$$|\bar{x} - x_3| \leq 1,375 - 1,25 = 0,125$$

On peut aussi utiliser la formule du cours $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow |\bar{x} - x_3| \leq \frac{2-1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$

On considère le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2 + 2x_n + 10} \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E) ;

La méthode s'écrit :

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \text{ avec } g(x) = \frac{20}{x^2 + 2x + 10} \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Il s'agit d'une méthode de point fixe de fonction g et on a (remarquons que $x^2 + 2x + 10 > 0$) :

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{20}{x^2 + 2x + 10} = x \Leftrightarrow 20 = x^3 + 2x^2 + 10x \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (E)$$

Autre méthode :

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 10) = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{x^2 + 2x + 10} = g(x)$$

b. Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x \in [1, 2]} \left| \frac{-40(x+1)}{(x^2 + 2x + 10)^2} \right| \leq \frac{40}{132}$) ;

On a :

$$g(x) = \frac{20}{x^2 + 2x + 10} \Rightarrow g'(x) = -20 \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 10)^2} = \frac{-40(x + 1)}{(x^2 + 2x + 10)^2} < 0 \text{ pour } x \in [1, 2]$$

g est décroissante et on a :

$$g(1) = \frac{20}{13} = 1,538 \text{ et } g(2) = \frac{20}{18} = 1,111$$

On en déduit que

$$g([1, 2]) \subset [1, 2]$$

D'autre part, d'après le théorème de Accroissements finis (la fonction g est continue dérivable), on a :

$$\text{pour tous } x, y \in [1, 2], \text{ il existe } c \in]1, 2[\text{ tel que } |g(x) - g(y)| = |g'(c)| |x - y| \leq \sup_{x \in [1, 2]} |g'(x)| |x - y| \leq \frac{40}{132} |x - y|$$

On en déduit que g est contractante.

On conclusion, g vérifie les conditions de convergence et par conséquent la méthode de point fixe converge vers la solution de (E).

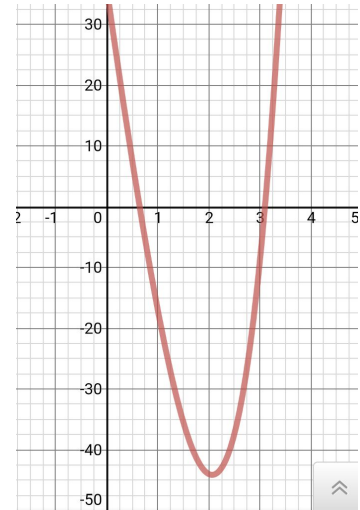
Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3 ;

On a :

$$\begin{aligned} x_0 = 1 &\Rightarrow x_1 = g(1) = \frac{20}{13} = 1,538 \\ x_1 = \frac{20}{13} = 1,538 &\Rightarrow x_2 = g(x_1) = \frac{20}{\left(\frac{20}{13}\right)^2 + 2\frac{20}{13} + 10} = \frac{338}{261} = 1,295 \text{ ou } x_2 = g(1,538) = 1,295 \\ x_2 = \frac{338}{261} = 1,295 &\Rightarrow x_3 = g\left(\frac{338}{261}\right) = \frac{20}{\left(\frac{338}{261}\right)^2 + 2\frac{338}{261} + 10} = \frac{136242}{97189} \text{ ou } x_3 = g(1,295) = 1,401 \end{aligned}$$

Exercice 7 : Soit (EF) l'équation suivante, dite de Ferrari :

$$(EF) \quad x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$



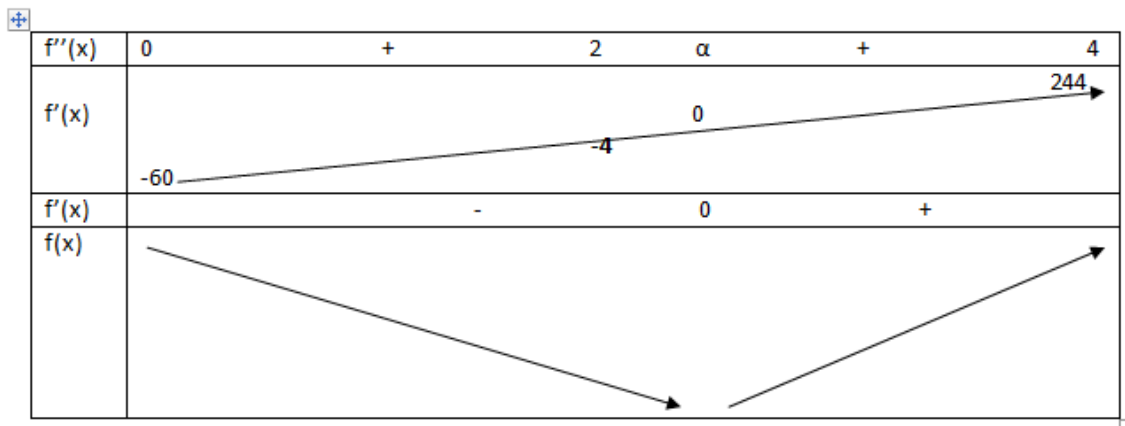
- Utiliser la représentation graphique, ci-jointe, de la fonction
1. $f(x) = x^4 + 6x^2 - 60x + 36$ pour localiser deux racines de (EF) dans l'intervalle $[0; 4]$;

La représentation graphique C_f permet de localiser "approximativement" les racines en lisant les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses (OX). Nous pouvons remarquer deux racines dans l'intervalle $[0, 4]$ et nous pouvons aussi raffiner la localisation en disant que une racine est dans l'intervalle $[0, 2]$ et l'autre est dans l'intervalle $[2, 4]$.

2. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour localiser les deux racines x^* et $\bar{x}$ de (EF) respectivement dans $[0; 2]$ et $[2; 4]$; On a :

$$f'(x) = 4x^3 + 12x - 60 \quad \text{et} \quad f''(x) = 12x^2 + 12 > 0$$

Signe de $f'(x)$: On a $f'(x)$ est croissante ($f''(x) > 0$) et comme $f'(0)f'(4) < 0$, il existe



$\alpha \in [0, 4]$ tel que $f'(\alpha) = 0$. Donc :

$f'(x) \leq 0$ sur $[0, \alpha]$ et f est décroissante sur cet intervalle ;

$f'(x) \geq 0$ sur $[\alpha, 4]$ et f est croissante sur cet intervalle ;

On a sur $[0, 2]$:

$$\begin{cases} f \text{ et continue (pôlynome)} \\ f(0)f(2) = 36 \times (-44) < 0 \\ f \text{ est décroissante sur } [0, 2] \subset [0, \alpha] \end{cases} \Rightarrow (EF) \text{ admet une solution unique dans } [0, 2]$$

$$\begin{cases} f \text{ et continue (pôlynome)} \\ f(2)f(4) = (-44) \times 148 < 0 \end{cases} \Rightarrow (EF) \text{ admet au moins une solution dans } [2, 4]$$

Or : $f(\alpha) < f(2) < 0$ donc (EF) n'admet pas de racine dans $[2, \alpha]$ et par conséquent si une racine existe elle est dans $[\alpha, 4]$.

Rappelons que f est croissante sur cet même intervalle.

En résumé :

$$\begin{cases} f \text{ admet au moins une racine dans } [2, 4] \\ f \text{ n'admet pas de racine dans } [2, \alpha] \\ f \text{ et croissante sur } [\alpha, 4] \end{cases} \Rightarrow (EF) \text{ admet une solution unique dans } [\alpha, 4] \text{ et dans } [2, 4]$$

3. Transformer l'équation (EF) en problèmes de recherche de points fixes, sous les formes suivantes :

$$(PF1) \quad g_1(x) = x \text{ avec } g_1 \text{ est un polynôme,}$$

On a :

$$(EF) \quad x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0 \Rightarrow 60x = x^4 + 6x^2 + 36 \Rightarrow x = \frac{1}{60}(x^4 + 6x^2 + 36) = g_1(x)$$

$$(PF2) \quad g_2(x) = x \text{ avec } g_2 \text{ est une fonction rationnelle,}$$

On a :

$$(EF) \quad x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0 \Rightarrow x(x^3 + 6x - 60) = -36 \Rightarrow x = \frac{-36}{x^3 + 6x - 60} = g_2(x)$$

$$(PF3) \quad g_3(x) = x \text{ avec } g_3 \text{ une autre fonction à déterminer;}$$

On a :

$$(EF) \quad x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0 \Rightarrow x^4 = -6x^2 + 60x - 36 \Rightarrow x = (-6x^2 + 60x - 36)^{\frac{1}{4}} = g_3(x)$$

4. Soit $x^* \in [0; 2]$ une racine de (EF) . Écrire les schémas numériques pour calculer x^* en utilisant $(PF1)$ puis $(PF2)$. Exécuter les calculs des quatres premieres itérations de chacun des schémas ;

$$(PF1) \begin{cases} x_0 \\ x_{k+1} = g_1(x_k) = \frac{1}{60}(x_k^4 + 6x_k^2 + 36) \end{cases} \quad \text{donnée}$$

x_0	1	
x_1	0,716666667	
x_2	0,655757717	
x_3	0,646083746	
x_4	0,64464647	

$$(PF2) \begin{cases} x_0 \\ x_{k+1} = g_2(x_k) = \frac{-36}{x_k^3 + 6x_k - 60} \end{cases} \quad \text{donnée}$$

x_0	1	
x_1	0,679245283	
x_2	0,647352287	
x_3	0,644645994	
x_4	0,644419521	

5. Étudier la convergence des deux schémas relatifs à (PF1) et à (PF2). Évaluer l'erreur commise lorsque le schéma converge.

Conditions suffisantes de convergence d'un schéma point fixe de fonction g définie sur $[a, b]$:

- g continue et contractante ;
- $g([a, b]) \subset [a, b]$

Concernant (PF1) : g_1 est continue (polynôme) sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$g_1'(x) = \frac{1}{60}(4x^3 + 12x) \geq 0 \text{ et } g_1''(x) = \frac{12}{60}(x^2 + 1) > 0 \text{ sur } [0, 2]$$

Donc :

- g_1 est croissante sur $[0, 2]$ et on a

$$g_1([0, 2]) = [g_1(0), g_1(2)] = \left[\frac{36}{60}, \frac{76}{60}\right] \subset [0, 2]$$

- g_1' est croissante sur $[0, 2]$ et on a :

$$g_1'(0) \leq g_1'(x) \leq g_1'(2) \Rightarrow 0 \leq g_1'(x) \leq \frac{56}{60} \Rightarrow g_1 \text{ est contractante}$$

Concernant (PF2) : g_2 est continue (rationnelle) sur son domaine. Résolution de $h(x) = x^3 + 6x - 60 = 0$:

On a $h'(x) = 3x^2 + 6 > 0$ donc h est continue et croissante, et on a $h(0) = -60$ et $h(2) = 8 + 12 - 60 = -40$ donc $x^3 + 6x - 60 \neq 0$ sur $[0, 2]$ et g_2 est continue sur $[0, 2]$.

On a :

$$g_2'(x) = \frac{108(x^2 + 2)}{(x^3 + 6x - 60)^2} > 0$$

Donc :

- g_2 est croissante sur $[0, 2]$ et on a

$$g_2([0, 2]) = [g_2(0), g_2(2)] = \left[\frac{36}{60}, \frac{36}{40}\right] \subset [0, 2]$$

- D'autre part :

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 216 \leq 108(x^2 + 2) \leq 648$$

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1600 \leq (x^3 + 6x - 60)^2 \leq 3600 \Rightarrow \frac{1}{3600} \leq \frac{1}{(x^3 + 6x - 60)^2} \leq \frac{1}{1600}$$

On en déduit :

$$\frac{216}{3600} \leq g_2'(x) \leq \frac{648}{1600} \Rightarrow g_2 \text{ est contractante.}$$

L'erreur :

$$|x_n - x^*| = |g(x_{n-1}) - g(x^*)| \leq l|x_{n-1} - x^*| \leq \dots \leq l^n|x_0 - x^*| \leq l^n|b - a| \leq 2l^n$$

Pour (PF1), on a :

$$|e_n| \leq 2\left(\frac{56}{60}\right)^n$$

Pour (PF2), on a :

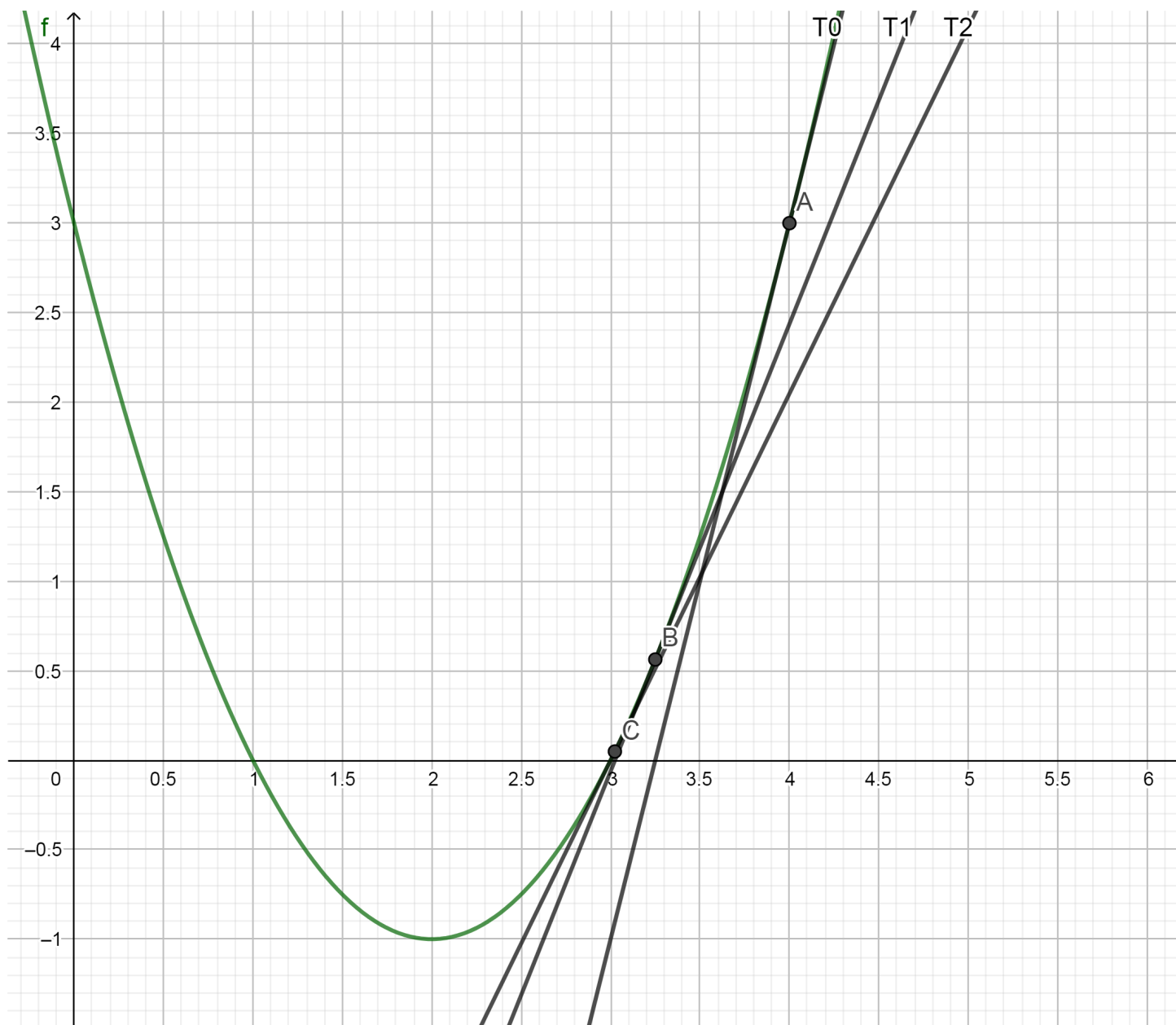
$$|e_n| \leq 2\left(\frac{648}{1600}\right)^n$$

Remarques. - Pour la méthode du point fixe et si nous utilisons le test d'arrêt basé sur la majoration de l'erreur absolue, nous pouvons déterminer le nombre d'itérations à affecter pour obtenir une précision donnée.

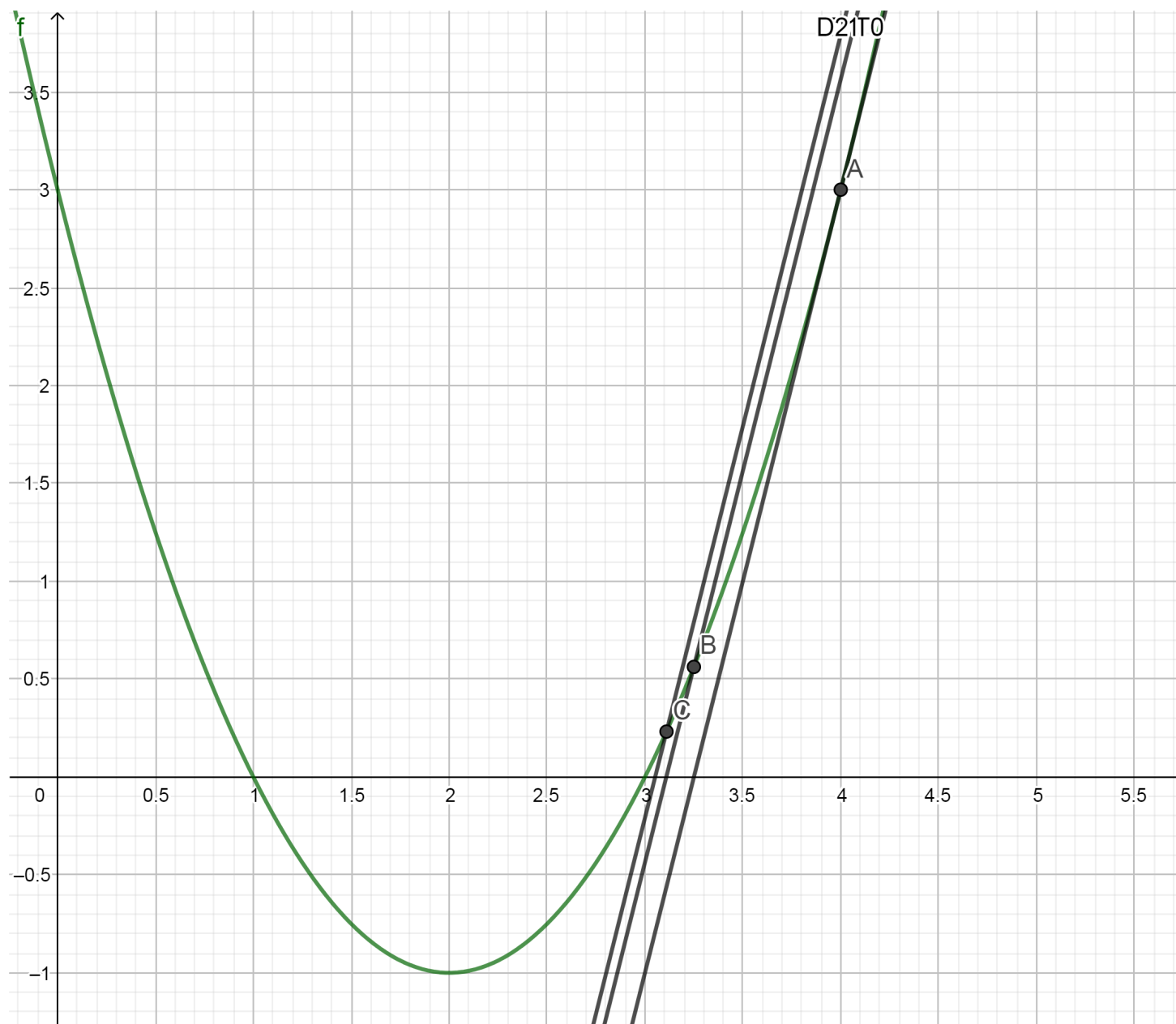
- Le nombre d'itérations et la "rapidité" de la convergence dépend de la valeur de l , la convergence est "bonne" lorsque l prend des valeurs beaucoup sensiblement plus petites que 1 par contre la convergence est "lente" et la suite x_n à tendance à être stationnaire si l est plus proche de 1.

Exercice 8 :

Exemple de la construction de la méthode de Newton classique : T_0 , T_1 et T_2 sont respectivement les tangentes à la courbe de f aux points x_0 , x_1 et x_2 .



Présentation de premiers termes avec la méthode de Newton modifiée : en utilisant la tangente T_0 puis les droites D_1 et D_2 parallèles à la première tangente T_0 (au lieu des tangentes T_1 et T_2) aux points x_0, x_1 et x_2 .



x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite parallèle à T_0 et qui passe par le point $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des abscisses (OX). On a :

$D_n : y = f'(x_0)x + p$ et $(x_n, f(x_n)) \in D_n$ donc : $p = f(x_n) - f'(x_0)x_n$ et on en déduit :

$$D_n : y = f'(x_0)x + f(x_n) - f'(x_0)x_n$$

Par conséquent :

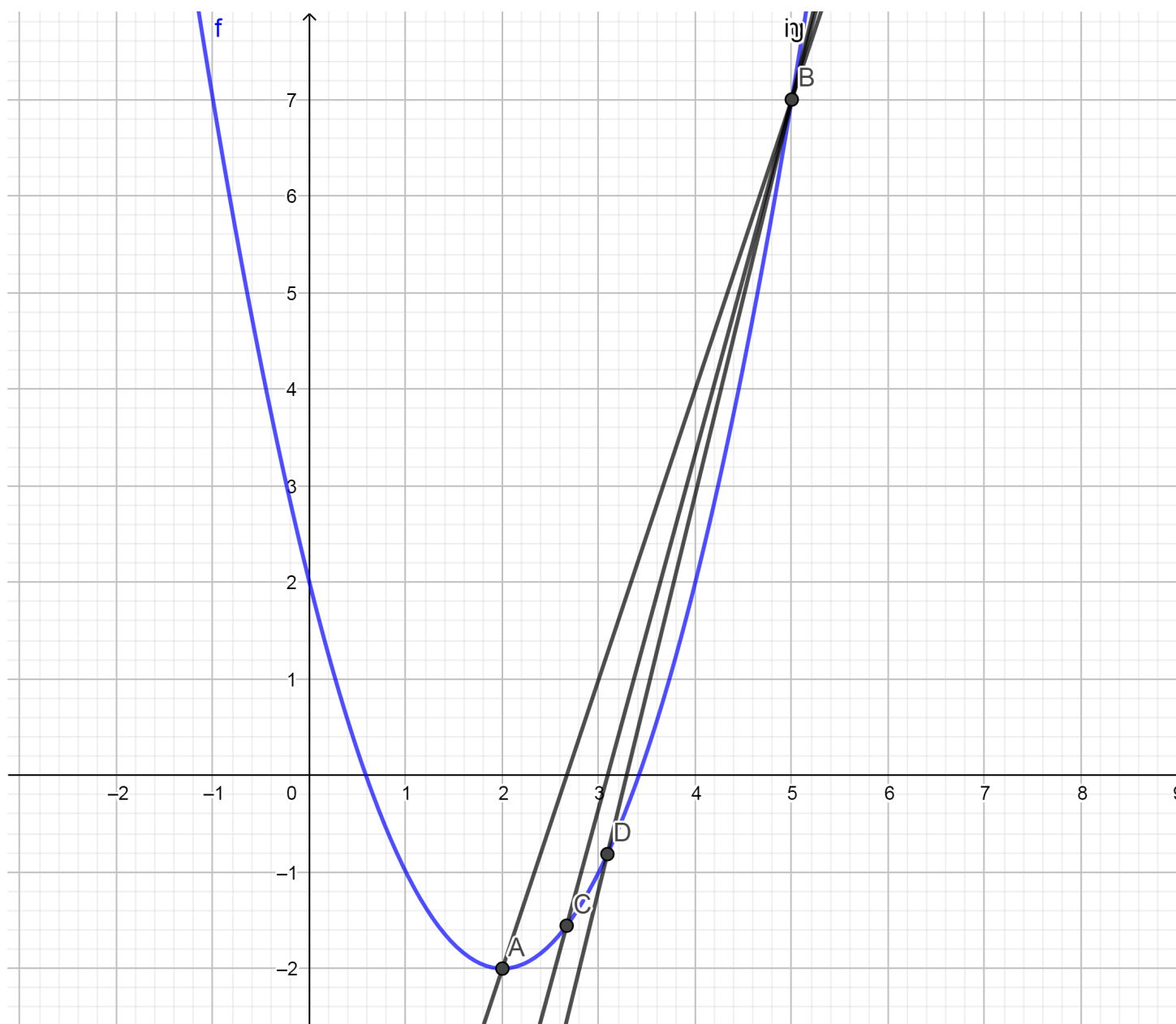
$$(x_{n+1}, 0) \in D_n \implies f'(x_0)x_{n+1} = -f(x_n) + f'(x_0)x_n$$

Soit :

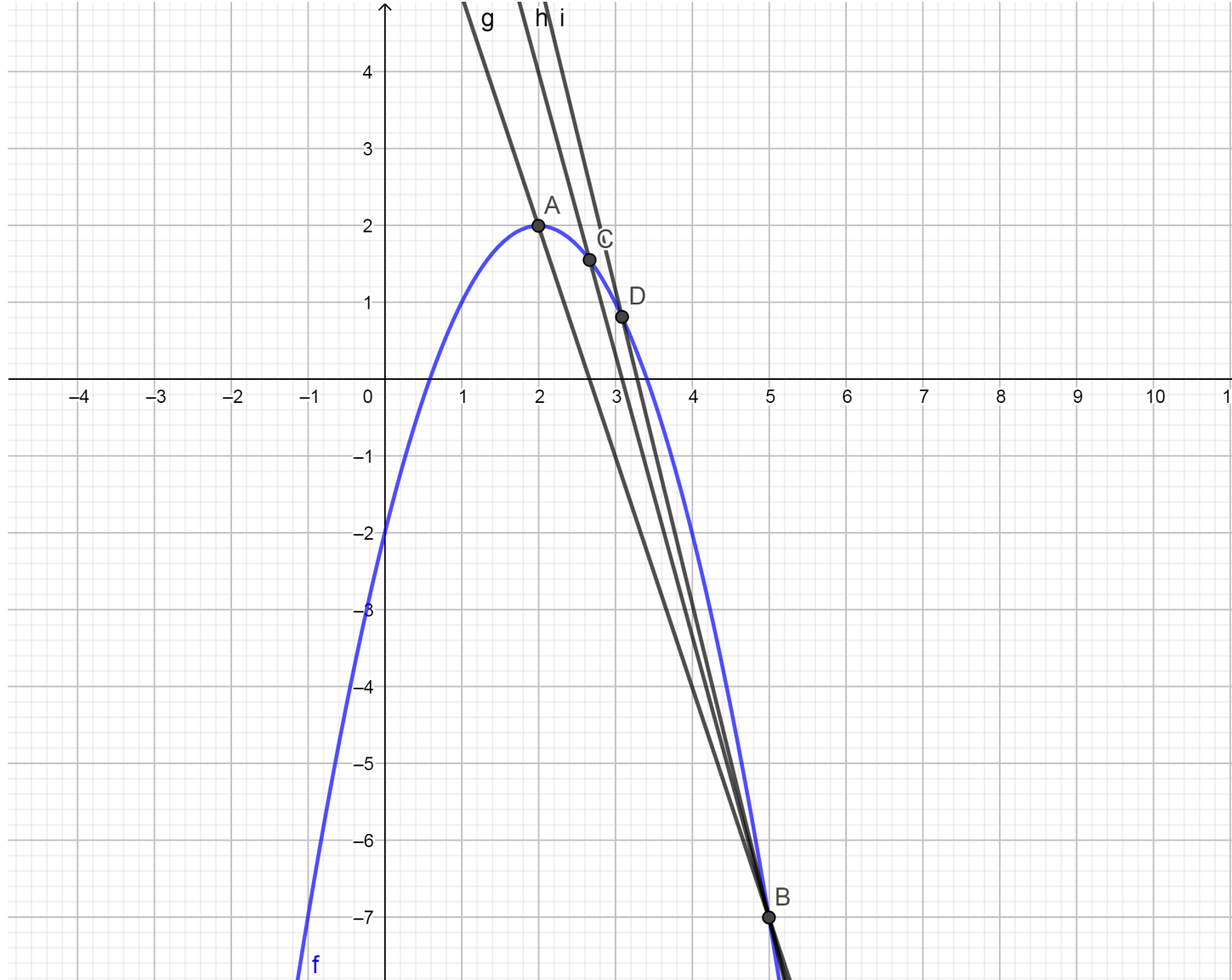
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Exercice 9 :

Exemple de construction d'une fonction croissante convexe sur l'intervalle $[2, 5]$:



Exemple de construction d'une fonction décroissante concave sur l'intervalle $[2, 5]$:



Equation de la droite D_k qui passe par $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ a pour équation :

$$D_n : y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k+1}}(x - f(x_k))$$

et par conséquent :

$$0 = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k+1}}(x_{k+1} - f(x_k))$$

Soit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}f(x_k)$$

Remarquons que cette méthode est une variante de la méthode de Newton, la dérivée $f'(x_k)$ est remplacée par le taux de variation : $\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k+1}}$

L'algorithme de cette méthode s'écrit :

x_0 donnée

Tant que $|f(x_k)| > \varepsilon$ faire :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}f(x_k)$$

Concernant la 2ème variante, il faut d'abord déterminer k' puis utiliser la même méthode en remplaçant x_k par $x_{k'}$

L'algorithme s'écrit (avec test sur la précision) :

x_0 donnée

Tant que $|f(x_k)| > \varepsilon$ faire :

$i = 1$

Tant que $f(x_k)f(x_{k-i}) > 0$ faire $i = i + 1$

$k' = k - i$ (cette boucle détermine k' en commençant par $k - 1$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k'}}{f(x_k) - f(x_{k'})} f(x_k)$$