

### Exercice 1 :

- Vérifier que 9325 s'écrit bien  $(10010001101101)_2$  en base 2.
- Écrire  $(90)_{10}$  et  $(97)_{10}$  en base 2. Effectuer, en opération binaire, la somme des deux nombres puis procéder à la vérification du résultat obtenu.

### Exercice 2 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = x^2 - 2$ .

- Vérifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet une et une seule solution  $\bar{x}$  sur l'intervalle  $[1, 2]$ . Quelle est la valeur exacte de  $\bar{x}$  ?
- Écrire les algorithmes permettant le calcul d'une valeur approchée, de  $\bar{x}$  avec une précision  $|f(x_k)| \leq 10^{-3}$ , en utilisant les méthodes : Dichotomie, Lagrange et Newton.
- Pour chaque méthode, calculer les quatre premières valeurs de la suite récurrente. Comparer et expliquer.

### Exercice 3 :

Soit  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue strictement décroissante telle que  $f(0) = 1$  et  $f(1) = -1$ .

- Sachant que  $f(0.6) = 0$ , déterminer les quatre premiers termes de la suite récurrente définie par la méthode de la dichotomie sur l'intervalle  $[0; 1]$  pour l'approximation du zéro de  $f$ .
- Combien d'itérations faut-il effectuer pour approcher le zéro de  $f$  à  $2^{-10}$  près ? à  $10^{-10}$  près ?

### Exercice 4 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$ . On s'intéresse à l'étude des racines de l'équation  $f(x) = 0$ . (Les valeurs approchées sont à présenter par défaut avec trois chiffres après la virgule).

- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une et une seule racine  $r$  dans  $[0, 1]$ .
- Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de  $[a, b] = [0, 1]$ , que  $r \in ]0.5, 0.75[$ .
- On souhaite maintenant utiliser la méthode de **Newton** sur  $]0.5, 0.75[$ . La suite de Newton est notée  $x_n$ . Faut-il choisir  $x_0 = 0.5$  ou  $x_0 = 0.75$  ? Expliquer votre choix.  $x_0$  étant choisi, calculer les deux premières valeurs  $x_1$  et  $x_2$ .
- On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée  $\bar{x}_n$ . Choisir convenablement les points de départ  $\bar{x}_0$  et  $\bar{x}_1$  et calculer, en suite, les valeurs suivantes  $\bar{x}_2$  et  $\bar{x}_3$ .
- Quel est le rang de l'erreur commise en considérant  $\bar{x}_3$  comme valeur approchée de  $r$  ?

### Exercice 5 :

À titre de rappel, la méthode de Newton pour résoudre l'équation  $f(x) = 0$  sur  $[a; b]$  définit la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} x_0 & \text{bien choisie} \\ x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

On suppose que cette suite admet une limite sur  $[a; b]$  notée  $\ell$ . Montrer que si  $f$  est 3 fois dérivable sur  $[a; b]$  et que  $f'(\ell) \neq 0$  alors la méthode de Newton est d'ordre 2 au moins.

### Exercice 6 :

On considère l'équation  $(E)$  donnée par :  $(E) \quad x^3 + 10x = 20 - 2x^2$ .

- Écrire  $(E)$  sous forme de  $f(x) = 0$  avec  $f$  une fonction à préciser.
- Vérifier que  $(E)$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[1, 2]$ .
- Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées ( $x_0$ ,  $x_1$  et  $x_2$ ) de la solution de  $(E)$ . En déduire une estimation de l'erreur commise en considérant  $x_3$ .

- d) On considère le schéma itératif suivant :  $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2 + 2x_n + 10} \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$
- e) Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de  $(E)$ .
- f) Étudier la convergence de cette méthode, (on donne  $\sup_{x \in [1, 2]} \left| \frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2} \right| \leq \frac{40}{132}$ ).
- g) Pour  $x_0 = 1$ , calculer  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .

### Exercice 7 :

Soit  $(EF)$  l'équation suivante, dite de Ferrari :  $(EF) \quad x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$ .

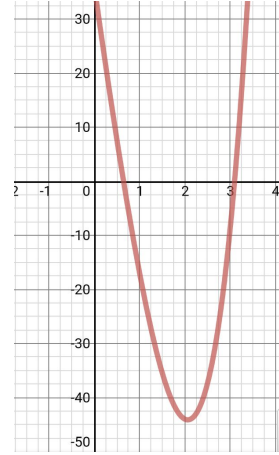
- a) Soit  $f$  la fonction telle que  $f(x) = x^4 + 6x^2 - 60x + 36$ . Utiliser la représentation graphique de  $f$ , ci-jointe, pour localiser deux racines de  $(EF)$  dans l'intervalle  $[0; 4]$  ;
- b) Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour localiser les deux racines  $x^*$  et  $\bar{x}$  de  $(EF)$  respectivement dans  $[0; 2]$  et  $[2; 4]$
- c) Transformer l'équation  $(EF)$  en trois problèmes de recherche de points fixes :

$$(PF1) \quad g_1(x) = x \text{ avec } g_1 \text{ est un polynôme,}$$

$$(PF2) \quad g_2(x) = x \text{ avec } g_2 \text{ est une fonction rationnelle,}$$

$$(PF3) \quad g_3(x) = x \text{ avec } g_3 \text{ une autre fonction à déterminer;}$$

- d) Soit  $x^* \in [0; 2]$  une racine de  $(EF)$ . Écrire les schémas numériques pour calculer  $x^*$  en utilisant  $(PF1)$  puis  $(PF2)$ . Exécuter les calculs des quatre premières itérations de chacun des schémas ;
- e) Étudier la convergence des deux schémas relatifs à  $(PF1)$  et à  $(PF2)$ . Évaluer l'erreur commise lorsque le schéma converge.



### Exercice 8 : Une modification de la méthode de Newton.

Dans la méthode de Newton, ayant à disposition les points  $x_0; \dots, x_n$  ; on construit  $x_{n+1}$  en prenant l'intersection de la tangente au graphe de  $f$  en  $x_n$  avec l'axe des abscisses. Dans la méthode de Newton modifiée, ayant construit  $x_0; \dots, x_n$  ; on construit  $x_{n+1}$  en prenant l'intersection avec l'axe des abscisses avec la droite passant par  $x_n$  et parallèle à la tangente au graphe de  $f$  en  $x_0$  :

- a) On suppose que la fonction  $f$  est strictement croissante et strictement convexe sur  $[a; b]$  avec une racine dans  $]a; b[$ . On prend  $x_0 = b$  : Faites un dessin faisant apparaître les quatre premières valeurs données par la méthode de Newton modifiée. Comparer avec le schéma correspondant pour la méthode de Newton ordinaire ;
- b) Donner l'expression de  $x_{n+1}$  en fonction de  $x_n$  ;
- c) Selon vous quels sont les avantages pratiques de cette modification ? Ses inconvénients ?

### Exercice 9 :

Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  strictement croissante telle que  $f(a) < 0$  et  $f(b) > 0$ . Pour approcher la racine  $r \in ]a; b[$  de l'équation  $f(x) = 0$  ; on construit une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de la manière suivante  $x_0 = a$  ;  $x_1 = b$  et, pour  $k \geq 2$  ;  $x_{k+1}$  est l'abscisse de l'intersection de la droite joignant les points  $(x_k; f(x_k))$  et  $(x_{k-1}; f(x_{k-1}))$  avec la droite d'équation  $y = 0$  ;

- a) Construire sur une figure les quatre premiers points de la suite lorsque  $f$  est une fonction convexe. La construction vous paraît-elle judicieuse lorsque  $f$  est décroissante convexe ?
- b) Donner l'expression de  $x_{n+1}$  en fonction de  $x_n$  et  $x_{n-1}$  ;
- c) Dans une autre variante, on construit  $x_{k+1}$  non pas à partir de  $x_k$  et  $x_{k+1}$  mais à partir de  $x_k$  et  $x_{k_0}$  où  $k_0$  est le plus grand indice ( $< k$ ) tel que  $f(x_k)$  et  $f(x_{k_0})$  soient de signes opposés. Donner un exemple pour lequel cette nouvelle suite ne coïncide pas avec la précédente ;
- d) Écrire un algorithme calculant les  $n$  premières valeurs de la suite  $(x_k)_k$ .