Exercice 1 :

- Vérifier que 9325 s'écrit bien $(10010001101101)_2$ en base 2.
- Écrire $(90)_{10}$ et $(97)_{10}$ en base 2, effectuer, en opérations binaires, le produit et la somme des deux nombres puis procéder à la vérification des résultats obtenus.

La vérification peut se faire dans les deux sens. D'une part, nous avons :

$$
\begin{aligned}
9325 &= 2 \times 4662 + 1 \\
4662 &= 2 \times 2331 + 0 \\
2331 &= 2 \times 1165 + 1 \\
1165 &= 2 \times 582 + 1 \\
582 &= 2 \times 291 + 0 \\
291 &= 2 \times 145 + 1 \\
145 &= 2 \times 72 + 1 \\
72 &= 2 \times 36 + 0 \\
36 &= 2 \times 18 + 0 \\
18 &= 2 \times 9 + 0 \\
9 &= 2 \times 4 + 1 \\
4 &= 2 \times 2 + 0 \\
2 &= 2 \times 1 + 0 \\
1 &= 2 \times 0 + 1
\end{aligned}
$$

Donc :

$$9325 = \overline{9325}^{10} = \overline{10010001101101}^{2}$$

D'autre part, la vérification peut se faire aussi de la manière suivante :

$$\overline{10010001101101}^{2} = \underbrace{1}_{\times 2^{13}}\underbrace{0}_{\times 2^{12}}0100011011\underbrace{0}_{\times 2^{1}}\underbrace{1}_{\times 2^{0}}$$

$$\overline{10010001101101}^{2} = \underbrace{1}_{\times 8192}\underbrace{0}_{\times 4096}0100011011\underbrace{0}_{\times 2}\underbrace{1}_{\times 1}$$

$$\overline{10010001101101}^{2} = 1 \times 8192 + 0 \times 4096 + ... + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 9325$$

La transformation d'un nombre en écriture binaire (base 2) se fait à travers les divisions successives puis en notant les restes dans le sens inverse :

$$
\begin{aligned}
90 &= 2 \times 45 + 0 \\
45 &= 2 \times 22 + 1 \\
22 &= 2 \times 11 + 0 \\
11 &= 2 \times 5 + 1 \\
5 &= 2 \times 2 + 1 \\
2 &= 2 \times 1 + 0 \\
1 &= 2 \times 0 + 1
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
97 &= 2 \times 48 + 1 \\
48 &= 2 \times 24 + 0 \\
24 &= 2 \times 12 + 0 \\
12 &= 2 \times 6 + 0 \\
6 &= 2 \times 3 + 0 \\
3 &= 2 \times 1 + 1 \\
1 &= 2 \times 0 + 1
\end{aligned}
$$

Donc :

$$90 = \overline{1011010}^2 \qquad \text{et} \qquad 97 = \overline{1100001}^2$$

On a :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
+ & & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
= & & & & & & & \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Vérification : $90 + 97 = 187$

$$187 = 93 \times 2 + 1$$
$$93 = 46 \times 2 + 1$$
$$46 = 23 \times 2 + 0$$
$$23 = 11 \times 2 + 1$$
$$11 = 5 \times 2 + 1$$
$$5 = 2 \times 2 + 1$$
$$2 = 1 \times 2 + 0$$
$$1 = 0 \times 2 + 1$$

Donc : $90 + 97 = 187 = \overline{10111011}^2$ qui est exactement l'écriture trouvée auparavant. Nous pouvons aussi, vérifier en calculant la valeur de l'écriture binaire trouver auparavant.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 - 2$.

- Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $\overline{x}$ sur l'intervalle $[1, 2]$. Quelle est la valeur exacte de $\overline{x}$?
- Écrire les algorithmes permettant le calcul d'une valeur approchée, de $\overline{x}$ avec une précision $|f(x_k)| \leq 10^{-3}$, en utilisant les méthodes : Dichotomie, Lagrange et Newton.
- Pour chaque méthode, calculer les quatre premières valeurs de la suite récurrente. Comparer et expliquer.

Rappels :

La méthode de la Dichotomie :

Recherche de la racine $\overline{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ ($\overline{x}$ est la seule racine dans $[a, b]$) avec une précision ε.

Initialisation : $a_0 = a$, $b_0 = b$

Tant que $|b_k - a_k| > \varepsilon$ (test d'arrêt) $\rightarrow$ faire $\downarrow$ (une boucle de calcul à refaire tant que la condition est vérifiée) :

Calculer $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et :

Si $f(a_k)f(x_k) < 0$ Alors $a_{k+1} := a_k$ et $b_{k+1} := x_k$

Sinon $a_k := x_k$ et $b_{k+1} := b_k$

Si $|b_n - a_n| \leq \varepsilon \rightarrow$ Fin.

Conclusion : $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ est une valeur approchée de $\overline{x}$ avec une précision ε.

Méthode de Lagrange (utilisant la droite qui passe par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ au lieu du centre de l'intervalle $[a_k, b_k]$) :
Recherche de la racine $\overline{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ ($\overline{x}$ est la seule racine dans $[a, b]$) avec une précision ε.
La méthode est une généralisation de la méthode de dichotomie : la valeur de x_k est déterminée comme intersection de la droite qui passe par les deux points $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ et l'axe des abscisses.
La méthode est à différencier avec les autres méthodes utilisant une sécante notamment la variante de la méthode de Newton qui consiste à remplacer $f'(x_{k+1})$ par $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k+1}}$ ou, autrement dit, on remplace la tangente par la sécante.
Initialisation : $a_0 = a$, $b_0 = b$
Tant que $|b_k - a_k| > \varepsilon$ (test d'arrêt) $\rightarrow$ faire $\downarrow$ (une boucle de calcul à refaire tant que la condition est vérifiée) :
Calculer $x_k = a_k - \frac{b_k-a_k}{f(b_k)-f(a-k)} f(a_k) = \frac{a_k f(b_k)-b_k f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}$ et :
Si $f(a_k)f(x_k) < 0$ Alors $a_{k+1} := a_k$ et $b_{k+1} := x_k$
Sinon $a_k := x_k$ et $b_{k+1} := b_k$
Si $|b_n - a_n| \leq \varepsilon \rightarrow$ Fin.
Conclusion : $x_n = a_n - \frac{b_n-a_n}{f(b_n)-f(a_n)} f(a_n) = \frac{a_n f(b_n)-b_n f(a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$ est une valeur approchée de $\overline{x}$ avec une précision ε.
Les tests d'arrêt peuvent être différents d'une méthode à l'autre et suivant la précision cherchée, généralement, nous pouvons distinguer trois type de conditions d'arrêt :

1) Majoration de l'erreur absolue par une quantité qui ne dépends pas de la racine recherchée $\overline{x}$ ni de x_k, par exemple, dans les méthodes de Dichotomie et de la Lagrange on a :
$$|x_k - \overline{x}| \leq |b_k - a_k|$$
Il st suffisant de choisir $|b_k - a_k| \leq \varepsilon$ pour obtenir la précision recherchée
2) Test basé sur le résidu : $|f(x_k)| \leq \varepsilon$
3) Test basé sur l'incrément : $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$
Suivant la situation et les conditions initiales, chaque test peut être considéré comme satisfaisant ou trop restrictif.

Méthode de Newton : Cette méthode définit une suite récurrente $(x)_k$ qui converge (sous des conditions) vers la solution de l'équation.

Pour déterminer x_{k+1}, la méthode consiste à remplacer localement la courbe de la fonction par la tangente qui passe pas x_k et d'équation : $T_k : y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$

La valeur x_{k+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite T_k avec l'axe des abscisses (l'intersection n'existe que si $f'(x_k) \neq 0$), on a :

$$0 = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = x_{k+1}f'(x_k) - x_k f'(x_k) + f(x_k) \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
car $f'(x_k) \neq 0$.

L'algorithme pour une convergence à ε près; x_0 donnée, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
Tant que $|x_{k+1} - x_k| > \varepsilon$ (ou tant que $|f(x_k)| > \varepsilon$) $\downarrow$ Faire (une boucle de calcul) :
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
Le dernier terme de la suite est une approximation de $\overline{x}$ à ε près.
Conditions suffisantes de convergence de la suite x_n vers la racine $\overline{x}$:

1) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$
2) $f(a)f(b) < 0$
3) $f'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$ (c'est à dire strictement positive ou strictement négative sur l'intervalle ouvert)
4) $f''(x) \neq 0$ sur $]a, b[$ (c'est à dire strictement positive ou strictement négative sur l'intervalle ouvert)
5) $f(x_0)f''(x) > 0$ sur $[a, b]$ ($f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ sur l'intervalle)

REMARQUE :
1) Si $f(x_0)f''(x) < 0$ on calcule x_1 et si $f(x_1)f''(x) > 0$ et $x_1 \in [a, b]$ nous avons aussi la convergence.

On veut calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ dans l'intervalle $[1; 2]$.
Localisation de la racine : On a : $f(1) = -1$ et $f(2) = 2$ donc : $f(1)f(2) < 0$ et on déduit, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que $f(x) = 0$ admet **au moins une solution**. En plus, nous avons $f'(x) = 2x > 0$ sur $[1, 2[$ donc la fonction est strictement croissante et elle admet **une solution unique** dans $[1, 2]$ cette solution (positive) est donnée par : $x = \sqrt{2}$.
Algorithmes :
Dichotomie :
$a_0 = 1, b = 2$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$
Tant que $|f(x_k)| > 10^{-3}$ faire :
Si $f(a_k)f(x_k) > 0$ alors $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ sinon $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$
$x_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$

Lagrange :
$a_0 = 1, b = 2$ et $x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$
Tant que $|f(x_k)| > 10^{-4}$ faire :
Si $f(a_k)f(x_k) > 0$ alors $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ sinon $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$
$x_{k+1} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$

Newton
Lorsque les conditions de convergence sont vérifiées :
$x_0 = 2$ (ou toute valeur te que $f(x_0)$ positive comme $f''(x)$).
Tant que $|f(x)| > 10^{-3}$ faire :
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de dichotomie dans l'intervalle $[1; 2]$.

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	$f(x_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	1	1.5	2	-	0.25	+	+
1	1	1.25	1.5	-	-0.4375	-	+
2	1.25	1.375	1.5	-	-0.1093	-	+
3	1.375	1.4375	1.5	-	0.0664	+	+
4	1.375	1.40625	1.4375				

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de Lagrange dans l'intervalle $[1; 2]$.
(Les résultats sont présentés avec plusieurs chiffres après la virgule pour permettre les comparaisons, nous pouvons présenter les valeurs tronquées à un certain nombre de chiffres après la virgule).

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	1	1.333333333	2	-1	-0,222222222222222	2
1	1.333333333	1.4	2	-0,222222222222222	-0,0400000000000003	2
2	1.4	1.411764706	2	-0,0400000000000003	-0,00692041522491316	2
3	1.411764706	1.413793103	2	-0,00692041522491316	-0,00118906064209301	2
4	1.413793103	1,41414141414141	2	-0,00118906064209301	-0,000204060810122142	2

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de Newton dans l'intervalle $[1; 2]$.

$$x_0 = 2 \quad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$$

k	x_k
0	2
1	1,5
2	1,41666666666667
3	1,41421568627451
4	1,41421356237469

(Les résultats sont présentés avec plusieurs chiffres après la virgule pour permettre les comparaisons, nous pouvons présenter les valeurs tronquées à un certain nombre de chiffres après la virgule).

Les valeurs obtenues avec les trois méthodes sont, respectivement : 1.41375, 1,41414141414141 et 1,41421356237469
Nous pouvons évaluer, avec une calculatrice, l'erreur en calculant $|x_4 - \sqrt{2}|$
$|1.41375 - \sqrt{2}| = 0.0004$
$|1, 41414141414141 - \sqrt{2}| = 0.0007$
$|1, 41421356237469 - \sqrt{2}| = 0.0000000004$
On en déduit que la meilleure précision est donnée par la méthode de Newton. Cette remarque est toute à fait normale car la méthode de Newton est d'ordre 2 alors que les autres sont des méthodes d'ordre 1.

Exercice 3 :

Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement décroissante telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$.
- Sachant que $f(0.6) = 0$, déterminer les quatre premières termes de la suite récurrente définie par la méthode de la dichotomie sur l'intervalle $[0; 1]$ pour l'approximation du zéro de f.
- Combien d'itérations faut-il effectuer pour approcher le zéro de f à 2^{-10} près ? à 10^{-10} près ?

Les conditions de l'application du théorème des valeurs intermédiaires sont vérifiées, nous pouvons en déduire qu'il existe une seule racine ($\overline{x} = 0.6$) dans l'intervalle $[0; 1]$.
Méthode de la dichotomie dans l'intervalle $[0; 1]$
On applique successivement les étapes de la méthode de Dichotomie en remarquons que $f(x) > 0$ sur $[0, 0.6[$ et $f(x) < 0$ sur $]0.6, 1]$.

$a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $x_0 = 0.5$, $f(x_0) > 0$, $f(a_0)f(x_0) > 0$, donc $a_1 = x_0$ et $b_1 = 0_0$ et ainsi de suite :

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	0	0.5	1	+	+	-
1	0.5	0.75	1	+	-	-
2	0.5	0,625	0.75	+	-	-
3	0.5	0,5625	0,625	+	+	-
4	0.5625	0.59375	0.625	+	+	-

Combien d'itérations faut-il effectuer pour approcher le zéro de f à 2^{-10} près ?

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 2^{-10} \Rightarrow -n\ln(2) \leq -10\ln(2) \Rightarrow n \geq 10 \Rightarrow n = 10$$

Autre méthode.

$$n \geq \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2-1) - \ln(2^{-10})}{\ln(2)} = 10 \Rightarrow n = 10$$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. On s'interesse à l'étude des racines de l'équation $f(x) = 0$. (Les valeurs approchées sont à présenter par défaut avec trois chiffres après la virgule).

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$.
- Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$.
- On souhaite maintenant utiliser la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n. Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix. x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2.
- On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\overline{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ et calculer, en suite, les valeurs suivantes $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$.
- Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\overline{x}_3$ comme valeur approchée de r ?

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$;
f est un polynôme continu, $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$ alors $f(0).f(1) < 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine dans $[0, 1]$.
D'autre part, $f'(x) = 4x(x^2 + 1) > 0$ sur $]0, 1[$ donc f est strictement croissante et l'équation admet une et une seule solution $r \in [0, 1]$.

Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$;
$r \in [0, 1]$ $x_0 = \frac{0+1}{2} = 0,5$ et $f(x_0) = f(0,5) = -0,44$ on a $f(0).f(0,5) > 0$ donc $r \in]0,5; 1[$
$r \in]0,5; 1[$ $x_1 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$, $f(0,75) = 0.44$ on a $f(0,5).f(0,75) < 0$ donc $r \in]0,5; 0,75[$.

On souhaite maintenant affiner l'approximation en utilisant la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n. Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix ;
On a $f(x) = 4x(x^2 + 1) > 0$ sur $]0.5, 0.75[$, $f''(x) = 12x^2 + 4 > 0$ sur $]0.5, 0.75[$ et $f(0,5) = -0,44 < 0$ alors que $f(0,75) = 0.44 > 0$ pour que la méthode converge il faut choisir x_0 tel que $f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ donc : $x_0 = 0,75$.
x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2 ;

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^4 + 2x_k^2 - 1}{4x_k^3 + 4x_k} = \frac{4x_k^4 + 4x_k^2 - (x_k^4 + 2x_k^2 - 1)}{4x_k^3 + 4x_k} = \frac{3x_k^4 + 2x_k^2 + 1}{4x_k^3 + 4x_k}$$

$$x_1 = \frac{3x_0^4 + 2x_0^2 + 1}{4x_0^3 + 4x_0} \simeq 0,655$$

$$x_2 = \frac{3x_1^4 + 2x_1^2 + 1}{4x_1^3 + 4x_1} \simeq 0,643$$

On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\overline{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ et calculer, en suite, les deux valeurs suivantes $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$;

D'après la question 2) on a : $r \in]0.5, 0.75[$ on peut choisir $\overline{x}_0 = 0,5$ et $\overline{x}_1 = 0,75$ nous avons $f(0,5) \simeq -0,437$ et $f(0,75) \simeq 0,441$

On a :

$$\overline{x}_{k+1} = \overline{x}_k - \frac{\overline{x}_k - \overline{x}_{k-1}}{f(\overline{x}_k) - f(\overline{x}_{k-1})} f(\overline{x}_k) = \frac{\overline{x}_{k-1} f(\overline{x}_k) - \overline{x}_k f(\overline{x}_{k-1})}{f(\overline{x}_k) - f(\overline{x}_{k-1})}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{\overline{x}_0 f(\overline{x}_1) - \overline{x}_1 f(\overline{x}_0)}{f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)} \simeq 0,624 \qquad \text{et} \qquad f(\overline{x}_2) \simeq -0.069$$

$$\overline{x}_3 = \frac{\overline{x}_1 f(\overline{x}_2) - \overline{x}_2 f(\overline{x}_1)}{f(\overline{x}_2) - f(\overline{x}_1)} \simeq 0,641$$

Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\overline{x}_3$ comme valeur approchée de r ?
On a :

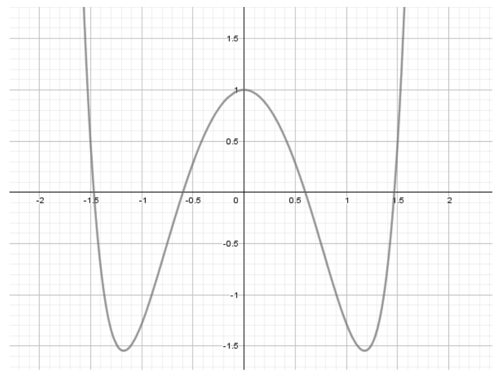
$$|\overline{x}_3 - \overline{x}_2| \simeq |0,641 - 0,624| = 0,017$$

Donc la précision est à 10^{-2} près.

Exercice 5 :

Soit (E) l'équation suivante : $(E) \quad e^{x^2} - 4x^2 = 0$.

- Utiliser la représentation graphique, ci-jointe, de la fonction $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$ pour localiser les quatres racines de (E) dans quatre intervalles d'amplitude 1 chacun et qui contient une seule racine.
- Montrer qu'il y a une seule racine $\overline{x}$ de (E) dans $[0; 1]$.



- Transformer l'équation (E) en problèmes de recherche de points fixes, sous les formes suivantes :
$(PF1)$: $g_1(x) = x$ tel que g_1 est une fonction définie par une racine carrée et la fonction exceptionnelle,
$(PF2)$: $g_2(x) = x$ tel que g_2 est une fonction définie par la fonction exponentielle et un polynôme de degré 2,
$(PF3)$: $g_3(x) = x$ tel que g_3 une autre fonction à déterminer.
- Écrire les schémas numériques pour calculer $\overline{x}$ en utilisant $(PF1)$ puis $(PF2)$. Exécuter les calculs des quatres premières itérations de chacun des deux schémas.
- Étudier la convergence des deux schémas relatifs à $(PF1)$ et à $(PF2)$. Évaluer l'erreur commise lorsque le schéma converge.
- Écrire la méthode de Newton pour déterminer la racine $\overline{x}$ de (E). Quel est son ordre ? Quel est le meilleur choix parmi les deux méthodes ? Justifier la réponse.

La lecture graphique permet de localiser les racines (changement de la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses) dans les intervalles : $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, 2]$.

Montrer qu'il y a une seule racine $\overline{x}$ de (E) dans $[0; 1]$; On a :

$f(0) = 1$ et $f(1) = e - 4 < 0$ donc $f(0)f(1) < 0$
f est continue (fonction exponentielle et polynôme sont continues) f est strictement croissante : $f'(x) = 2xe^{x^2} - 8x = 2x(e^{x^2} - 4) < 0$ car $0 < x < 1$ et la fonction exponentielle est croissante impliquent : $0 < x^2 < 1 \Rightarrow 1 < e^{x^2} < e < 4$.
On en déduit, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $[0; 1]$

Transformer l'équation (E) en problèmes de recherche de points fixes, sous les formes suivantes :
$(PF1)$: $g_1(x) = x$ tel que g_1 est une fonction définie par une racine carrée et la fonction exceptionnelle,

$f(x)=0 \Rightarrow e^{x^2}-4x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{e^{x^2}}{4} \Rightarrow x=\mp\frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2}$ et comme la racine recherchée est positive, nous choisissons :

$$x=\frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2}=g_1(x)$$

$(PF2)$: $g_2(x)=x$ tel que g_2 est une fonction définie par la fonction exponentielle et un polynôme de degré 2,
$f(x)=0 \Rightarrow f(x)+x=x \Rightarrow e^{x^2}-4x^2+x=x \Rightarrow g_2(x)=e^{x^2}-4x^2+x=x$ $(PF3)$: $g_3(x)=x$ tel que g_3 une autre fonction à déterminer ;

$f(x)=0 \Rightarrow e^{x^2}-4x^2=0 \Rightarrow e^{x^2}=4x^2 \Rightarrow x^2=\ln(4x^2) \Rightarrow x=g_3(x)=\sqrt{\ln(4x^2)}$ pour $x>\frac{1}{2}$.
Écrire les schémas numériques pour calculer $\overline{x}$ en utilisant $(PF1)$ puis $(PF2)$. Exécuter les calculs des quatres premières itérations de chacun des deux schémas ;

$$(PF1)\begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_{k+1}=g_1(x_k)=\frac{\sqrt{e^{x_k^2}}}{2} & \end{cases}$$

k	x_k	g(x_k)	|g(x_k)-x_k|	|x_{k+1}-x_k|
0	0,5	0,56657	0,06657	
1	0,56657	0,58705	0,02048	0,06657
2	0,58705	0,59403	0,00697	0,02048
3	0,59403	0,59648	0,00245	0,00697
4	0,59648	0,59735	0,00087	0,00245

$$(PF2)\begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_{k+1}=g_2(x_k)=e^{x_k^2}-4x_k^2+x_k & \end{cases}$$

k	x_k	g(x_k)	|g(x_k)-x_k|	|x_{k+1}-x_k|
0	0,5	0,78403	0,28403	
1	0,78403	0,17434	0,60969	0,28403
2	0,17434	1,08362	0,90929	0,60969
3	1,08362	-0,37765	1,46128	0,90929
4	-0,37765	0,20515	0,58281	1,46128

Étudier la convergence des deux schémas relatifs à $(PF1)$ et à $(PF2)$. Évaluer l'erreur commise lorsque le schéma converge ;
Conditions suffisantes de convergence d'un schéma point fixe de fonction g définie sur $[a,b]$:

- g est contractante ;
- $g([a,b])\subset[a,b]$

On a $g_1(x)=\frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2}$ et

$$0\leq x\leq 1 \Rightarrow 0\leq x^2\leq 1 \Rightarrow 1\leq e^{x^2}\leq e \Rightarrow \frac{1}{2}\leq g_1(x)\leq\frac{\sqrt{e}}{2}\simeq 0,82$$

Donc :

$$g_1([0,1])\subset[0,1]$$

Noter qu'il faut montrer que $0\leq f(x)\leq 1$ pour tout $x\in[0,1]$ et il ne suffit pas de montrer que $f(0)>0$ et $f(1)<1$.

D'autre part : $g_1'(x) = \frac{xe^{x^2}}{2\sqrt{e^{x^2}}} = \frac{x\sqrt{e^{x^2}}}{2}$ et

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^{x^2} \leq e \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2} \leq \frac{\sqrt{e}}{2} \Rightarrow 0 \leq g_1'(x) \leq \frac{\sqrt{e}}{2} \simeq 0,82$$

On en déduit que :

$$|g_1'(c)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |g_1'(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$$

En utilisant le théorème des accroissements finies pour x et y dans $[0,1]$, il existe $c \in]0,1[$ telle que :

$$|g_1(x) - g_a(y)| = |g_1'(c)||x-y| \leq \frac{\sqrt{e}}{2}|x-y|$$

et g_1 est $\frac{\sqrt{e}}{2}-$ contractante.

On déduit que la méthode de point fixe converge vers la solution $\overline{x}$ de l'équation telle que $g_1(\overline{x}) = \overline{x}$

Concernant le méthode point fixe avec $g_2(x) = e^{x^2} - 4x^2 + x$ on a $g_2(0,3) \simeq 1,03 > 1$ (ou $g_2(1) = e - 3 < 0$) donc $g_2([0,1])$ n'est pas incluse dans $[0,1]$, les conditions suffisantes de convergence ne sont pas vérifiées et ne pouvons rien déduire dans ce cas.

Écrire la méthode de Newton pour déterminer la racine $\overline{x}$ de (E). Quel est son ordre ? Quel est le meilleur choix parmi les deux méthodes ? Justifier la réponse.

Utilisant la méthode de Newton pour trouver une solution approchée de l'equation $f(x) = e^{x^2} - 4x^2 = 0$ dans l'intervalle $[0,1]$ (une seule racine telle que localiser dans une question précédente). La méthode de Newton définie une suite $(x_n)_n$ telle que :

$$\begin{cases} x_0 & \text{bien choisie} \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k^2} - 4x_k^2}{2x_k e^{x_k^2} - 8x_k} = x_k - \frac{e^{x_k^2} - 4x_k^2}{2x_k(e^{x_k^2} - 4)} & \end{cases}$$

On a $f'(x) = 2x(e^{x^2} - 4) < 0$ sur $]0,1]$ donc la méthode de Newton est d'ordre deux tandis que la méthode de point fixe est d'ordre un. La méthode de Newton, lorsqu'elle vérifiée les conditions de convergence, est le meilleur choix pour cet exemple.

Exercice 6 :

A titre de rappel, la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[a;b]$ définie la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} x_0 & \text{bien choisie} \\ x_{n+1} == g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} & \end{cases}$$

On suppose que cette suite admet une limite sur $[a;b]$ notée ℓ. Montrer que si f est 3 fois derivable sur $[a;b]$ et que $f'(\ell) \neq 0$ alors la méthode de Newton est d'ordre 2 au moins.

Si la racine l est telle que $f'(l) \neq 0$ et si la suite $x_n \to l$ est la convergence est au moins quadratique ($p = 2$). En effet :

$$x_{n+1} - l = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - l$$

Ou encore (en rappelant que $f(l) = 0$) :

$$(1) \qquad x_{n+1} - l = \frac{(x_n - l)f'(x_n) - f(x_n) + f(l)}{f'(x_n)}$$

D'autre part, par application de la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 2, il existe ξ_n compris entre x_n et l tel que :

$$f(l) = f(x_n) + (l - x_n)f'(x_n) + \frac{(l - x_n)^2 f''(\xi_n)}{2}$$
$$\Rightarrow f(l) - f(x_n) = (l - x_n)f'(x_n) + \frac{(l - x_n)^2 f''(\xi_n)}{2}$$

En replaçant dans (1), on obtient :

$$x_{n+1} - l = \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \frac{(l - x_n)^2}{2} \Rightarrow e_{n+1} = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} e_n^2$$

On en déduit (on peut supposer que $f'(\overline{x}) > 0$) :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|f''(l)|}{2|f'(l)|} > 0 \qquad \text{finie}$$

En effet, on a :

$x_n \to l$

ξ_n est comprise entre x_n et $l \Rightarrow \xi_n \to l$

f' et f'' sont continues (f de classe $\mathcal{C}^2$) alors : $f''(\xi_n) \to f''(l)$ et $f'(x_n) \to f'(l)$.

Donc, la méthode de Newton est d'ordre 2 (quadratique) au moins.

Exercice 7 :

On considère l'équation (E) donnée par : $(E) \qquad x^3 + 10x = 20 - 2x^2$.

- Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser.
- Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$.
- Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0, x_1 et x_2) de la solution de (E). En déduire une estimation de l'erreur commise en considérant x_3.
- On considère le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2 + 2x_n + 10} & \qquad n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$

- Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E).

- Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x \in [1,2]} |\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}| \leq \frac{40}{132}$).

- Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3.

Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser;

On a :

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + 10x = 20 - 2x^2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ avec } f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$;

Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires, f est continue sur $\mathbb{R}$ (Polynôme) et on a :

$$f(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 + 10 \times 1 - 20 = -7 \text{ et } f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 + 10 \times 2 - 20 = 16$$

Donc, l'équation $f(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$. D'autre part :

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 > 0 \text{ car } \Delta = 16 - 120 = -104 < 0$$

On en déduit que f est croissante sur l'intervalle $[1, 2]$ et par conséquent, l'équation $f(x)$ admet au seule solution $\overline{x}$ dans cet intervalle.

Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0, x_1 et x_2) de la solution de (E). En déduire l'erreur commise en considérant x_3 (comme solution approchée) ;
$f(x)$ admet au seule solution dans l'intervalle $[1, 2]$:
On a :

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1,5 \text{ et } f(1,5) = 2,875 \text{ avec } f(1) \times f(1,5) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1; 1,5]$$

et :

$$x_1 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25 \text{ et } f(1,25) = -2,422 \text{ avec } f(1,25) \times f(1,5) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1,25; 1,5]$$

ensuite :

$$x_2 = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375 \text{ et } f(1,375) = 0,130 \text{ avec } f(1,25) \times f(1,375) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1,25; 1,3$$

La valeur exacte $\overline{x}$ et valeur approchée x_3 sont dans l'intervalle $[1,25; 1,375]$ donc

$$|\overline{x} - x_3| \leq 1,375 - 1,25 = 0,125$$

On peut aussi utiliser la formule du cours

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow |\overline{x} - x_3| \leq \frac{2-1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

On considère le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2+2x_n+10} & n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$

Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E) ;
La méthode s'écrit :

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \text{ avec } g(x) = \frac{20}{x^2+2x+10} & n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$

Il s'agit d'une méthode de point fixe de fonction g et on a (remarquons que $x^2 + 2x + 10 > 0$) :

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{20}{x^2+2x+10} = x \Leftrightarrow 20 = x^3 + 2x^2 + 10x \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (E)$$

Autre méthode :

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 10) = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{x^2+2x+10} = g(x)$$

b. Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x\in[1,2]} |\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}| \leq \frac{40}{132}$) ;
On a :

$$g(x) = \frac{20}{x^2+2x+10} \Rightarrow g'(x) = -20\frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2} = \frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2} < 0 \text{ pour } x \in [1, 2]$$

g est décroissante et on a :

$$g(1) = \frac{20}{13} = 1,538 \text{ et } g(2) = \frac{20}{18} = 1,111$$

On en déduit que

$$g([1, 2]) \subset [1, 2]$$

D'autre part, d'après le théorème de Accroissements finis (la fonction g est continue derivable), on a :

$$\text{pour tous } x, y \in [1, 2], \text{ il existe } c \in]1, 2[\text{ tel que } |g(x)-g(y)| = |g'(c)||x-y| \leq \sup_{x\in[1,2]} |g'(x)||x-y| \leq \frac{40}{132}|x-y|$$

On en déduit que g est contractante.
On conclusion, g vérifie les conditions de convergence et par conséquent la méthode de point fixe converge vers la solution de (E).

Pour $x_0=1$, calculer x_1, x_2 et x_3 ;

On a :

$$x_0=1\Rightarrow x_1=g(1)=\frac{20}{13}=1,538$$

$$x_1=\frac{20}{13}=1,538\Rightarrow x_2=g(x_1)=\frac{20}{(\frac{20}{13})^2+2\frac{20}{13}+10}=\frac{338}{261}=1,295 \text{ ou } x_2=g(1,538)=1,295$$

$$x_2=\frac{338}{261}=1,295\Rightarrow x_3=g(\frac{338}{261})=\frac{20}{(\frac{338}{261})^2+2\frac{338}{261}+10}=\frac{136242}{97189} \text{ ou } x_3=g(1,295)=1,401$$

Exercice 8 :

- Construire le polynôme d'interpolation P_2 basé sur le système de trois points : $(0,2)$, $(1,1)$ et $(2,2)$, en utilisant successivement les trois méthodes (directe, Lagrange, Newton).

Méthode directe : $P_2(x)=ax^2+bx+c$ et donc :

$$\begin{cases} P_2(0)=2\\ P_2(1)=1\\ P_2(2)=2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c=2,\\ a+b+c=1\\ 4a+2b+c=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c=2,\\ a=1\\ b=-2 \end{cases}$$

Soit :

$$P_2(x)=ax^2+bx+c=x^2-2x+2$$

Les polynômes de base de Lagrange sont donnés par :

$$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}=\frac{1}{2}(x^2-3x+2)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(2-1)}=2x-x^2$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=\frac{1}{2}(x^2-x)$$

et :

$$P_2(x)=2L_0(x)+L_1(x)+2L_2(x)=2\frac{1}{2}(x^2-3x+2)+2x-x^2+2\frac{1}{2}(x^2-x)=x^2-2x+2$$

Méthode de Newton : Calculons d'abord les différences divisées :

0	2			
1	1	$\frac{1-2}{1-0}=-1$		
2	2	$\frac{2-1}{2-1}=1$	$\frac{1-(-1)}{2-0}=1$	

et :

$$P_2(x)=2\times 1+(-1)\times(x-0)+1\times(x-0)(x-1)=2-x+x^2-x+1=x^2-2x+2$$

- Déterminer le polynôme d'interpolation P_3 basé sur le système de points : $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,2)$ et $(3,3)$.

Le meilleur choix et d'appliquer la méthode de Newton, en complétant le tableau précédent avec le point (3.3). Méthode de Newton : Calculons d'abord les différences divisées :

0	2			
1	1	$\frac{1-2}{1-0}=-1$		
2	2	$\frac{2-1}{2-1}=1$	$\frac{1-(-1)}{2-0}=1$	
3	3	$\frac{3-2}{3-2}=1$	$\frac{1-1}{3-1}=0$	$\frac{0-1}{3-0}=\frac{-1}{3}$

$$P_3(x)=2-(x-x_0)+1(x-x_0)(x-x_1)-\frac{1}{3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)=2-x+x(x-1)-\frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$

$$P_3(x)=\frac{-1}{3}x^3+2x^2+\frac{-8}{3}x+2$$

Méthode directe : Le polynôme P_3 s'écrit :

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

On a :

$$\begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow d = 2 \\ f(1) = 1 \Rightarrow a+b+c+d = 1 \\ f(2) = 2 \Rightarrow 8a+4b+2c+d = 2 \\ f(3) = 3 \Rightarrow 27a+9b+3c+d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a+b+c = -1 \\ 8a+4b+2c = 0 \\ 27a+9b+3c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a+b+c = -1 \\ 6a+2b = 2 & \text{E3-2E2} \\ 24a+6b = 4 & \text{E3-3E2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} d = 2 \\ a+b+c = -1 \\ 6a+2b = 2 \\ 24a+6b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a+b+c = -1 \\ 6a+2b = 2 \\ 6a = -2 & \text{E4-3E3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = \frac{-8}{3} \\ b = 2 \\ a = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

Donc :

$$P_3(x) = \frac{-1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{-8}{3}x + 2$$

Méthode de Lagrange : Calculons d'abord les polynômes caractéristiques de Lagrange :

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = \frac{-1}{6}(x^3-6x^2+11x-6)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x^3-5x^2+6x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = \frac{-1}{2}(x^3-4x^2+3x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x)$$

D'où :

$$P_3(x) = 2L_0(x) + 1L_1(x) + 2L_2(x) + 3L_3(x)$$

$$P_3(x) = \frac{-1}{3}(x^3-6x^2+11x-6) + \frac{1}{2}(x^3-5x^2+6x) - (x^3-4x^2+3x) + \frac{1}{2}(x^3-3x^2+2x) = \frac{-1}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{-8}{3}x + 2$$

Exercice 9 :

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ par rapport aux points 0; $\frac{3}{4}$; 1.

- Représenter sur un même graphique le polynôme et la fonction interpolée.
- Comparer, à l'aide d'une calculatrice, $f(\frac{1}{2})$ et $P_2(\frac{1}{2})$.
- Rappeler la formule de l'erreur et donner une majoration de $|E(x)| = |f(x) - P_2(x)|$.
- Évaluer l'erreur commise en considérant les points support : 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et 1.

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ par rapport aux points 0; $\frac{3}{4}$; 1.

Polynômes caractéristiques de Lagrange par rapport aux points 0; $\frac{3}{4}$ et 1 :

$$L_0(x) = \frac{(x-\frac{3}{4})(x-1)}{(0-\frac{3}{4})(0-1)} = \frac{4}{3}\left(x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{3}{4}\right)$$

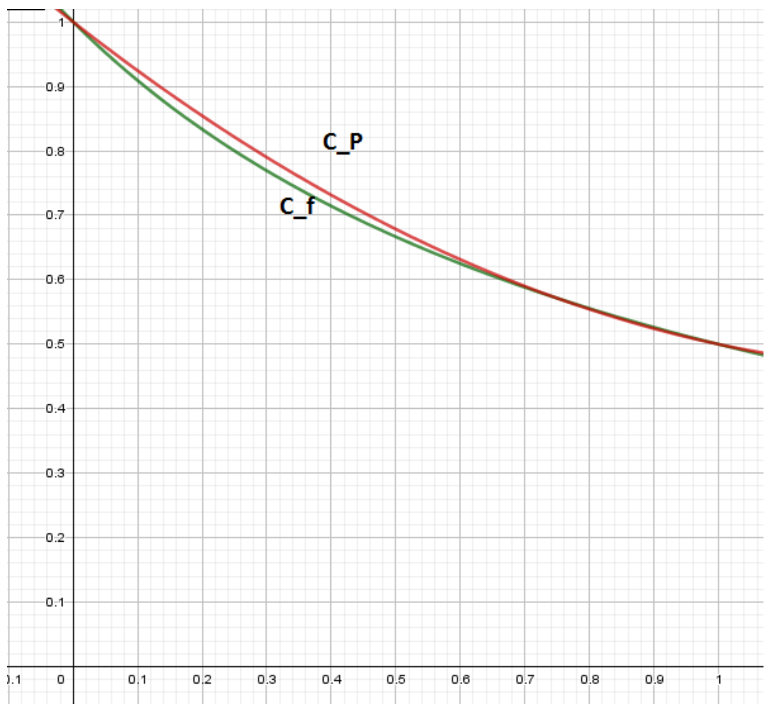
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(\frac{3}{4}-0)(\frac{3}{4}-1)} = \frac{-16}{3}\left(x^2 - x\right)$$

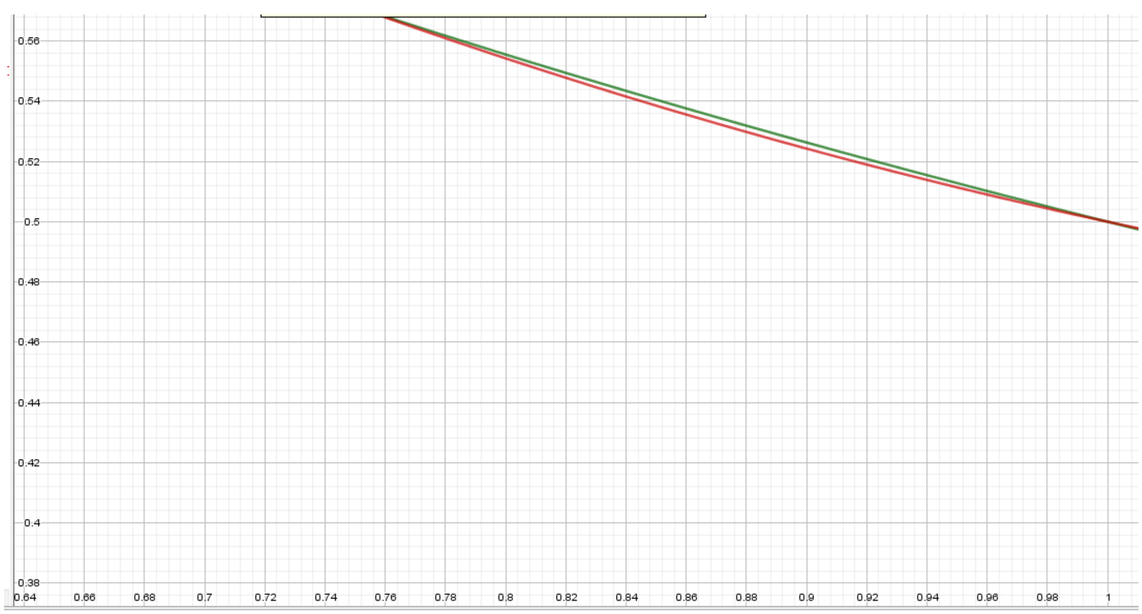
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-\frac{3}{4})}{(1-0)(1-\frac{3}{4})} = 4\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)$$

Donc le polynômes d'interpolation par rapport aux points $(0,1)$, $(\frac{3}{4}, \frac{4}{7})$ et $(1, \frac{1}{2})$ est donné par :

$P_2(x) = L_0(x) + \frac{4}{7}L_1(x) + \frac{1}{2}L_2(x) = \frac{2}{7}x^2 - \frac{11}{14}x + 1$

Représenter sur un même graphique le polynôme et la fonction interpolée ;
Les deux courbes passent pas les trois points $(0,1)$, $(\frac{3}{4},\frac{4}{7})$ et $(1,\frac{1}{2})$ mais elles ne sont pas confondues, il faut ajouter d'autres points (par exemple, 0.1, 0.2, 0.3,...) pour pouvoir ajuster la représentation. Il faut bien choisir l'échelle sur l'axe des ordonnées pour pouvoir distinguer les deux courbes ? elles ont trois points en commun mais leurs différence est réduite (égale à l'erreur !).
Agrandissement de la représentation dans la partie $[0.8,1]$





Comparer, à l'aide d'une calculatrice, $f(\frac{1}{2})$ et $P_2(\frac{1}{2})$;

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} \sim 0,666667 \text{ et } P_2(\frac{1}{2}) = \frac{19}{28} \sim 0,678571$$

La différence entre les deux valeurs est d'ordre $0,01$ on peut dire qu'elles sont égales à 10^{-2} près ;

Rappeler la formule de l'erreur et donner une majoration de $|E(x)| = |f(x) - P_2(x)|$;
Formule générale : Il existe ξ entre compris entre le plus petit et le plus grand points d'interpolation (si les points sont ordonnés du plus petit au plus grand, en peut écrire $\xi \in [x_0, x_n]$) tel que :

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n)|\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$$

Concernant f et P_2, il existe $\xi \in [0,1]$ tel que :

$$|E_2(x)| = |f(x) - P_2(x)| = |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|\frac{|f^{(3)}(\xi)|}{(3)!} = |x(x-\frac{3}{4})(x-1)|\frac{|f^{(3)(\xi)}|}{6}$$

On a :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad f^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} > 0$$

On en déduit que $f^{(3)}$ est croissante et pour $x \in [0,1]$ on a $f^{(3)}(0) \leq f^{(3)}(x) \leq f^{(3)}(1)$ soit $-6 \leq f^{(3)}(x) \leq \frac{-6}{16}$

Finalement,

$$|f^{(3)}(\xi)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| = 6$$

et,

$$|E_2(x)| \leq |x(x-\frac{3}{4})(x-1)|$$

A titre d'exemple, $|E_2(\frac{1}{2})| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{16} \sim 0,0625$ qui est une majoration de la valeur exacte donnée par $|E_2(\frac{1}{2})| = |f(\frac{1}{2}) - P_2(\frac{1}{2})| \sim 0,01$.

4) Évaluer l'erreur commise en considérant les points support : 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et 1. D'après la formule du cours, il existe $\xi \in [0,1]$ tel que :

$$|E_4(x)| = |f(x) - P_4(x)| = |x(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})(x-1)|\frac{|f^{(5)}(\xi)|}{5!}$$

On a :

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \quad f^{(5)}(x) = \frac{-120}{(1+x)^6}$$

et avec un calcul d'encadrement, nous avons successivement :

$$0 \leq x \leq 1 \quad 1 \leq 1+x \leq 2 \quad 1 \leq (1+x)^6 \leq 2^6 \quad \frac{1}{64} \leq \frac{1}{(1+x)^6} \leq 1 \quad -120 \leq f^{(5)}(x) \leq \frac{-120}{64}$$

et

$$|f^{(5)}(\xi)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f^{(5)}(x)| = 120$$

Finalement,

$$|E_4(x)| = |f(x) - P_4(x)| \leq |x(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})(x-1)|$$