Exercice 1 :

- Vérifier que 9325 s'écrit bien $(10010001101101)_2$ en base 2.
- Écrire $(90)_{10}$ et $(97)_{10}$ en base 2, effectuer, en opérations binaires, le produit et la somme des deux nombres puis procéder à la vérification des résultats obtenus.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 - 2$.

- Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $\overline{x}$ sur l'intervalle $[1, 2]$. Quelle est la valeur exacte de $\overline{x}$?
- Écrire les algorithmes permettant le calcul d'une valeur approchée, de $\overline{x}$ avec une précision $|f(x_k)| \leq 10^{-3}$, en utilisant les méthodes : Dichotomie, Lagrange et Newton.
- Pour chaque méthode, calculer les quatre premières valeurs de la suite récurrente. Comparer et expliquer.

Exercice 3 :

Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement décroissante telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$.

- Sachant que $f(0.6) = 0$, déterminer les quatre premières termes de la suite récurrente définie par la méthode de la dichotomie sur l'intervalle $[0; 1]$ pour l'approximation du zéro de f.
- Combien d'itérations faut-il effectuer pour approcher le zéro de f à 2^{-10} près ? à 10^{-10} près ?

Exercice 4 :

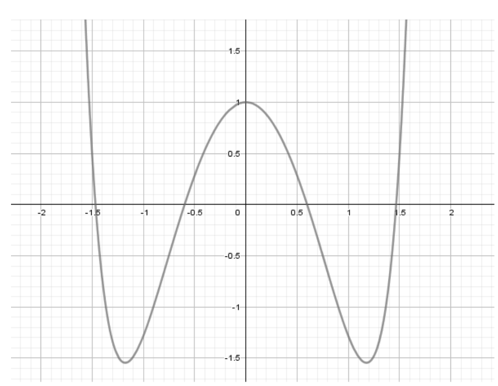
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. On s'interesse à l'étude des racines de l'équation $f(x) = 0$. (Les valeurs approchées sont à présenter par défaut avec trois chiffres après la virgule).

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$.
- Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$.
- On souhaite maintenant utiliser la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n. Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix. x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2.
- On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\overline{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ et calculer, en suite, les valeurs suivantes $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$.
- Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\overline{x}_3$ comme valeur approchée de r ?

Exercice 5 :

Soit (E) l'équation suivante : $(E)\quad e^{x^2} - 4x^2 = 0$.

- Utiliser la représentation graphique, ci-jointe, de la fonction $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$ pour localiser les quatres racines de (E) dans quatre intervalles d'amplitude 1 chacun et qui contient une seule racine.
- Montrer qu'il y a une seule racine $\overline{x}$ de (E) dans $[0; 1]$.



- Transformer l'équation (E) en problèmes de recherche de points fixes, sous les formes suivantes :
$(PF1)$: $g_1(x) = x$ tel que g_1 est une fonction définie par une racine carrée et la fonction exceptionnelle,
$(PF2)$: $g_2(x) = x$ tel que g_2 est une fonction définie par la fonction exponentielle et un polynôme de degré 2,
$(PF3)$: $g_3(x) = x$ tel que g_3 une autre fonction à déterminer.
- Écrire les schémas numériques pour calculer $\overline{x}$ en utilisant $(PF1)$ puis $(PF2)$. Exécuter les calculs des quatres premières itérations de chacun des deux schémas.
- Étudier la convergence des deux schémas relatifs à $(PF1)$ et à $(PF2)$. Évaluer l'erreur commise lorsque le schéma converge.
- Écrire la méthode de Newton pour déterminer la racine $\overline{x}$ de (E). Quel est son ordre ? Quel est le meilleur choix parmi les deux méthodes ? Justifier la réponse.

Exercice 6 :

A titre de rappel, la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[a; b]$ définie la suite récurrente suivante :

$$\begin{cases} x_0 & \text{bien choisie} \\ x_{n+1} == g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} & \end{cases}$$

On suppose que cette suite admet une limite sur $[a; b]$ notée ℓ. Montrer que si f est 3 fois derivable sur $[a; b]$ et que $f'(\ell) \neq 0$ alors la méthode de Newton est d'ordre 2 au moins.

Exercice 7 :

On considère l'équation (E) donnée par : $(E) \qquad x^3 + 10x = 20 - 2x^2$.
- Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser.
- Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$.
- Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0, x_1 et x_2) de la solution de (E). En déduire une estimation de l'erreur commise en considérant x_3.
- On considère le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2 + 2x_n + 10} & n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] & \end{cases}$$

- Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E).
- Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x\in[1,2]} |\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}| \leq \frac{40}{132}$).
- Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3.

Exercice 8 :

- Construire le polynôme d'interpolation P_2 basé sur le système de trois points : $(0, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 2)$, en utilisant successivement les trois méthodes (directe, Lagrange, Newton).
- Déterminer le polynôme d'interpolation P_3 basé sur le système de points : $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(3, 3)$.

Exercice 9 :

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_2(x)$ de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ par rapport aux points 0; $\frac{3}{4}$; 1.
- Représenter sur un même graphique le polynôme et la fonction interpolée.
- Comparer, à l'aide d'une calculatrice, $f(\frac{1}{2})$ et $P_2(\frac{1}{2})$.
- Rappeler la formule de l'erreur et donner une majoration de $|E(x)| = |f(x) - P_2(x)|$.
- Évaluer l'erreur commise en considérant les points support : 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et 1.