

SMP3 : 2017 - 2018
Analyse Numérique et Algorithmique
serie d'exercices N°1

Exercice 1. Ecrire en base 2 les nombres 70 et 123.

Exercice 2.

On veut calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ dans l'intervalle $[0; 2]$, ce qui revient à calculer $\sqrt{2}$

1). Déterminer la suite des premiers 3 itérés de la méthode de dichotomie dans l'intervalle $[0; 2]$. On pourra utiliser le tableau ci-dessous :

k	a_k	x_k	b_k	$f(x_k)$	$signe(f(x_k))$	$f(a_k)$	$ x_k - \sqrt{2} \leq$
0	0	1	2	-1	-	-2	1
1	1	1.5	2	0.25	+	-1	1/2
2	1	1.25	1.5	-0.4375	-	-1	1/4
3	1.25	1.375	1.5	-0.109375	-	-	1/8
4	1.375	1.4375	1.5	0.0664063	+	-0.109375	1/16
5	1.375	1.40625	1.4375	-0.0224609	-	-0.109375	1/32
6	1.40625	1.421875	1.4375	0.0217285	+	-0.0224609	1/64
7	1.40625	1.4140625	1.421875	-0.0004272	-	-0.0224609	1/128

2). On applique la méthode de Lagrange : écrire l'algorithme et l'utiliser pour remplir le tableau (on s'arrêtera au plus petit k qui vérifie $|f(x_k)| < 10^{-4}$). Les points x_0 et x_1 sont donnés, On utilise la formule $x_k = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(b_k)$, et on vérifie le signe $f(a_k)f(x_k)$ pour remplir le tableau ci-dessous :

k	a_k	x_k	b_k	$f(x_k)$
0	0	1.3333333	2	-0.2222223
1	1.3333333	1.4	2	-0.04
2	1.4	1.4117647	2	-0.0069204
3	1.4117647	1.4137931	2	-0.0011891
4	1.4137931	1.4141414	2	-0.0002041
5	1.4141414	1.4142012	2	-0.0000350

3). On applique la méthode de Newton : on écrit l'algorithme et on l'utilise pour remplir le tableau (on s'arrêtera au plus petit k qui vérifie $|f(x_k)| < 10^{-4}$). Le point de départ x_0 est donné.

Avant de commencer à calculer les éléments de la suite, on doit se mettre dans les conditions de convergence : choix de $[a, b]$ où la dérivée f' ne s'annule pas et choisir x_0 suivant le signe de f'' ..(Comme $f'' = 2$) et $f(2) = 2$, donc on

prend $[a, b] = [1; 2]$ et $x_0 = b = 2$ et la suite $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow |x_{k+1} - x_k| =$
 $\left| \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right| \leq \frac{|f(x_k)|}{\min_{[1;2]} |f'|} = \frac{|f(x_k)|}{2}$

k	x_k	$f(x_k)$	$ x_{k+1} - x_k \leq$
0	2	2	
1	1.5	0.25	1
2	1.4166667	0.0069444	0.125
3	1.4142157	0.0000060	0.0034722

Exercice 3. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement décroissante telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$.

1. Sachant que $f(0.6) = 0$, déterminer la suite des premiers quatre itérés de la méthode de la dichotomie dans l'intervalle $[0; 1]$ pour l'approximation du zéro de f . On pourra utiliser le tableau ci-dessous :

k	a_k	x_k	b_k	$\text{signe}(f(A_k))$	$\text{signe}(f(x_k))$	$\text{signe}(f(b_k))$	$ x_k - \hat{x} \leq$
0	0	1/2	1	+	+	-	1/2
1	1/2	0.75	1	+	-	-	1/4 = $\frac{1}{2^2}$
2	1/2	0.675	0.75	+	-	-	1/8 = $\frac{1}{2^3}$
3	1/2	0.5875	0.675	+	+	-	$\frac{1}{2^4}$
4	0.5875	0.63125	0.675	+	-	-	$\frac{1}{2^5}$

2. Combien d'itérations faut-il effectuer pour approcher le zéro de f à 2^{-10} près ?

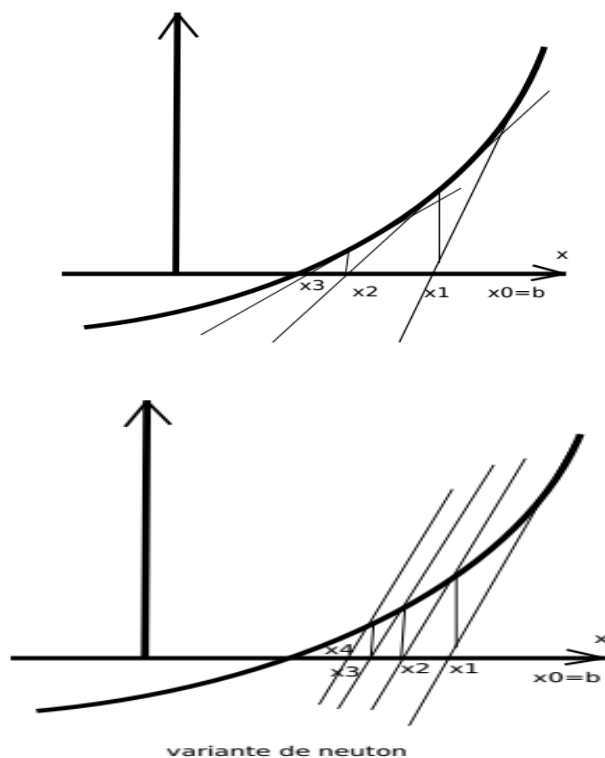
Il suffit que le nombre d'itération m vérifie la relation $\frac{1}{2^{m+1}} \leq 2^{-10} \Leftrightarrow 2^{m+1} \geq 2^{10}$

$\Leftrightarrow (m+1) \log(2) \geq 10 \log(2) \Leftrightarrow m \geq 9$

Il faut donc 9 itérations

Exercice 4 Une modification de la méthode de Newton. Dans la méthode de Newton, ayant à disposition les points $x_0, \dots, x_n$, on construit x_{n+1} en prenant l'intersection de la tangente au graphe de f en $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des abscisses. Dans la méthode de Newton modifiée, ayant construit $x_0, \dots, x_n$, on construit x_{n+1} en prenant l'intersection avec l'axe des abscisses de la droite passant par $(x_n, f(x_n))$ et parallèle à la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$.

(a) On suppose que la fonction f est strictement croissante et strictement convexe sur $[a; b]$ avec une racine dans $]a; b[$. On prend $x_0 = b$. Faites un dessin faisant apparaître les quatre premières valeurs données par la méthode de Newton modifiée. Comparer avec le schéma correspondant pour la méthode de Newton ordinaire.



- (b) Donner l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n .
(c) Selon vous quels sont les avantages pratiques de cette modification ? Ses inconvénients ?

Solution

a) puisque f est convexe on a f'' est positive on prend donc $x_0 = b$

méthode de Newton

b) En fait x_{n+1} est l'intersection de la droite qui passe par $(x_n, f(x_n))$ et parallèle à la tangente à la courbe au point $(x_0, f(x_0))$

l'équation de la tangente en $(x_0, f(x_0))$ est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

l'équation de la droite passant par $(x_n, f(x_n))$ et parallèle à la tangente en $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_n) + f(x_n)$$

On obtient x_{n+1} en résolvant

$$y = f'(x_0)(x - x_n) + f(x_n) = 0$$

ce qui donne

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

c) L'avantage de cette méthode : On n'a pas besoin que f' soit non nulle sur tout l'intervalle, et il y a moins de calculs,

Son inconvénient elle converge moins vite que la méthode de Newton, voir les schémas en question a).

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = x^4 + 6x^2 - 60x + 36$ (dite fonction de Ferrari)

1). Montre que la dérivée f' admet une zéro unique dans $[0, 4]$ et déduire que f a une racine unique dans $[0, 1]$ et une racine unique dans $[2, 4]$.

2). Transformer l'équation $f(x) = 0$ en un problèmes de recherche de points fixes, sous les formes suivantes :

(P_1) $g_1(x) = x$ avec g_1 est un polynôme;

(P_2) $g_2(x) = x$ avec g_2 est une fonction rationnelle;

3). Soit $x^* \in [0, 1]$ une racine de f , Écrire les schémas numériques pour calculer x^* en utilisant (P_1) puis (P_2). Exécuter les calculs des quatres premières itérations de chacun des schémas ;

4). Étudier la convergence des deux schémas relatifs à (P_1) et à (P_2). Évaluer l'erreur commise lorsque le schéma converge.

Solution

1)

$$f(x) = x^4 + 6x^2 - 60x + 36 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 12x - 60 \text{ et } f''(x) = 12x^2 + 12 > 0$$

$\Rightarrow f'$ est strictement croissante, de plus $f'(0) = -60$ et $f'(4) = 244$ donc f' admet une racine unique x_0 dans $[0, 4]$. $\Rightarrow f' < 0$ sur $] -\infty, x_0[$ et $f' > 0$ sur $]x_0, +\infty[$ on déduit que $f(x_0)$ réalise le minimum de f sur $\mathbb{R}$ (faire un tableau)

De plus $f'(1) = 4 + 12 - 60 = -44$ donc $x_0 > 1$.

$f(0) = 36 > 0$ et $f(1) = -23 < 0 \Rightarrow f$ admet une racine unique sur $[0, 1]$

On a aussi $f'(2) = -4 < 0$ donc $x_0 < 2$

$f(2) = -44 < 0$ et $f(4) = 148 > 0 \Rightarrow f$ admet une racine unique sur $[2, 4]$

2) on va s'intéresser à la racine de f dans $[0, 1]$ en appliquant la méthode de point fixe.

(p_1) g_1 polynôme tel que $f(x) = 0 \Leftrightarrow g_1(x) = x$

il suffit de prendre $g_1(x) = x^4 + 6x^2 - 59x + 36$

$g_1'(x) = 4x^3 + 12x - 59$ et $g_2''(x) = 12x^2 + 12 = 12(x^2 + 1) > 0$

g_1' est strictement croissante, comme $g_1'(1) = -43 < 0$ on a g_1 strictement décroissante donc

$$g_1([0, 1]) = [g_1(1), g_1(0)] = [16, 36]$$

avec ce choix de g_1 la méthode de point fixe ne peut pas avoir de point fixe sur $[0, 1]$.

k	x_k	$g_1(x_k)$
0	1	17
1	-16	68068
2	68052	$2.145D + 19$
3	$2.145D + 19$	$2.116D + 77$
4	$2.116D + 77$	Inf

(p_2) g_2 fraction rationnelle telle que

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 36 = -6x^2 + 60x \Leftrightarrow x = \frac{x^4 + 36}{60 - 6x}$$

d'où on a $g_2(x) = \frac{x^4 + 36}{60 - 6x}$,

k	x_k	$g_2(x_k)$
0	1	17
1	0.6851852	2.0738284
2	0.6480789	0.1882918
3	0.6447232	0.0166062
4	4.0.6444274	0.0014608
5	0.6444014	0.0001285
6	0.6443991	0.0000113

3) Vérifions les hypothèses de convergence de la méthode de point fixe pour g_2 .

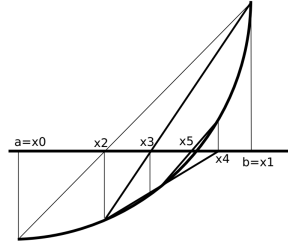
$$g'(x) = \left(\frac{x^4 + 36}{60 - 6x} \right)' = \frac{-18x^4 + 240x^3 + 216}{(60 - 6x)^2} > 0$$

donc g_2 est strictement croissante

$$\Rightarrow g_2([0, 1]) = [g_2(0), g_2(1)] = [0.6 ; 0.68]$$

pour avoir la convergence de la suite définie par $x_{n+1} = g_2(x_n)$, il suffit que $|g'(x)|$ soit strictement inférieur à 1.

$$\begin{aligned} 0 < g'_2(x) &= \frac{4x^3(60 - 6x) + 6(x^4 + 36)}{(60 - 6x)^2} < 1 \text{ pour tout } x \in [0, 1], \text{ en effet} \\ \frac{4x^3(60 - 6x) + 6(x^4 + 36)}{(60 - 6x)^2} &= \frac{-18x^4 + 240x^3 + 216}{(60 - 6x)^2} \\ &\leq \frac{240x^3 + 216}{(60 - 6x)^2} \leq \frac{240 + 216}{(60 - 6)^2} = 0.15638 \end{aligned}$$



ce qui montre que g_2 est contractante et donc la méthode de point fixe converge pour g_2 .

Remarque D'après le cours, les méthodes de newton, corde 1 et corde 2 sont des méthodes de point fixe

Exercice 6

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Pour approcher la racine $r \in]a, b[$ de l'équation $f(x) = 0$, on construit une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante $x_0 = a$, $x_1 = b$ et, pour $k \geq 2$, x_{k+1} est l'abscisse de l'intersection de la droite joignant les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ avec la droite $y = 0$.

(a) Construire sur une figure les quatre premiers points de la suite lorsque f est une fonction convexe.

La construction vous parait-elle judicieuse lorsque f est décroissante convexe ?

(b) Donner l'équation exprimant x_{k+1} en fonction de x_k et x_{k-1} .

(c) Dans une autre variante, on construit x_{k+1} non à partir de x_k et x_{k-1} mais à partir de x_k et $x_{k'}$ où k' est le plus grand indice ($< k$) tel que $f(x_k)$ et $f(x_{k'})$ soient de signes opposés. Donner un exemple pour lequel cette nouvelle suite ne coïncide pas avec la précédente.

Ecrire un algorithme calculant les n premières valeurs de la suite x_k .

a) voir la figure (en fait ici c'est la méthode de la secante qui est inspirée de la méthode de Lagrange)

b) L'équation de la droite qui passe par les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ est

$$y = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$$

On calcule x_{k+1} en résolvant l'équation $y = 0$ ce qui donne :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_{k-1})$$

c)

//programme pour calculer les n premières valeurs de la suite x_k .

n=16;

```

a=zeros(7,3);
a(1,1)=0; a(1,2)=1;
a(2,1)=1; a(2,2)=0;
function [y]=smp(s)
    y=s^4+6*s^2-60*s+36;
endfunction;
a(1,3)=abs(smp(a(1,2)));
a(2,3)=abs(smp(a(2,2)))
function [y]=smp3(t,s)
    y=s-(t-s)/(smp(t)-smp(s))*smp(s);
endfunction;
for k=2:n
    i=1;
    while smp(a(k-i,2))*smp(a(k,2))>0
        i=i+1;
    end;
    a(k+1,1)=k;
    a(k+1,2)=smp3(a(k,2),a(k-i,2));
    a(k+1,3)=abs(smp(a(k+1,2)));
end;

```

En executant ce script on obtient le tableau

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	17
1	0	36
2	0.6792453	1.7736059
3	0.6473523	0.1511318
4	0.6446460	0.0126518
5	0.6444195	0.0010575
6	0.6444006	0.0000884
7	0.6443990	0.0000074
8	0.6443989	0.0000006
9	0.6443989	$5.160D - 08$