SMP3 : 2017 - 2018
Analyse Numérique et Algorithmique
serie d'exercices N°1

Exercice 1. Ecrire en base 2 les nombres 70 et 123.

Exercice 2.

On veut calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ dans l'intervalle $[0; 2]$, ce qui revient à calculer $\sqrt{2}$

1. Déterminer la suite des premiers 3 itérés de la méthode de dichotomie dans l'intervalle $[0; 2]$. On pourra utiliser le tableau ci-dessous :

k	a_k	x_k	b_k	$f(x_k)$	$signe(f(x_k))$	$signe(f(a_k))$	$\|x_k - \sqrt{2}\| \leq$
0	0	1	2	-1	$-$	-2	1
1	1	1.5	2	0.25	$+$	-1	1/2
2	1	1.25	1.5	- 0.4375	-	-1	1/4
3	1.25	1.375	1.5	- 0.109375	-	-	1/8
4	1.375	1.4375	1.5	0.0664063	$+$	- 0.109375	1/16

2. On applique la méthode de Lagrange : écrire l'algorithme et l'utiliser pour remplir le tableau (on s'arrêtera au plus petit k qui vérifie $|f(x_k)| < 10^{-4}$).Les points x_0 et x_1 sont donnés On pourra utiliser le tableau ci-dessous :

k	x_k	$f(x_k)$	$\|f(x_k)\| \leq$
0			
1			
$\vdots$			

3. On applique la méthode de Newton : écrire l'algorithme et l'utiliser pour remplir le tableau (on s'arrêtera au plus petit k qui vérifie $|f(x_k)| < 10^{-2}$). Le point de départ $x_0 = 1$ est donné. On pourra utiliser le tableau ci-dessous :

k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_{k+1} - x_k\| \leq$
0			
1			
$\vdots$			

Exercice 3. Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement décroissante telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$.

1. Sachant que $f(0.6) = 0$, déterminer la suite des premiers quatre itérés de la méthode de la dichotomie dans l'intervalle $[0; 1]$ pour l'approximation du zéro de f. On pourra utiliser le tableau ci-dessous :

k	a_k	x_k	b_k	$signe(f(A_k))$	$signe(f(x_k))$	$signe(f(b_k))$
0	0		2			
1						
2						
3						
4						

2. Combien d'itérations faut-il effectuer pour approcher le zéro de f à 2^{-10} près ?

Exercice 4 Une modification de la méthode de Newton. Dans la méthode de Newton, ayant à disposition les points $x_0, ..., x_n$,on construit x_{n+1} en prenant l'intersection de la tangente au graphe de f en x_n avec l'axe des abcisses. Dans la méthode de Newton modifiée, ayant construit $x_0, ..., x_n$, on construit x_{n+1} en prenant l'intersection avec l'axe des abscisses de la droite passant par x_n et parallèle à la tangente au graphe de f en x_0.

(a) On suppose que la fonction F est strictement croissante et strictement convexe sur $[a; b]$ avec une racine dans $]a; b[$. On prend $x_0 = b$. Faites un dessin faisant apparaître les quatre premières valeurs données par la méthode de Newton modifiée. Comparer avec le schéma correspondant pour la méthode de Newton ordinaire.

(b) Donner l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n.

(c) Selon vous quels sont les avantages pratiques de cette modification ? Ses inconvénients ?

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = x^4+6x^2-60x+36$ (dite fonction de Ferrari)

1.Montre que la dérivée f' admet une zéro unique dans $[0, 4]$ et déduire que f a une racine unique dans $[0, 1]$ et une racine unique dans $[2, 4]$.

2. Transformer l'équation $f(x) = 0$ en problèmes de recherche de points fixes, sous les formes suivantes :

(P_1) $g_1(x) = x$ avec g_1 est un polynôme;

(P_2) $g_2(x) = x$ avec g_2 est une fonction rationnelle;

$(P\prime)$ $g_3(x) = x$ avec g_3 une autre fonction à déterminer;

3. Soit $x^* \in [0; 1]$ une racine de f, Écrire les schémas numériques pour calculer x^* en utilisant (P_1) puis (P_2). Exécuter les calculs des quatres premieres itérations de chacun des schémas ;

4. Étudier la convergence des deux schémas relatifs à (P_1) et à (P_2). Évaluer l'erreur commise lorsque le schéma converge.

Exercice 6

Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Pour approcher la racine $r \in]a, b[$ de l'équation $f(x) = 0$, on construit une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante $x_0 = a$, $x_1 = b$ et, pour $k \geq 2$, x_{k+1} est l'abcisse de l'intersection de la droite joignant les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k-1}, f(x_{k-1})$ avec le droite $y = 0$.

(a) Construire sur une figure les quatre premiers points de la suite lorsque f est une fonction convexe.

La construction vous parait-elle judicieuse lorsque f est décroissante convexe ?

(b) Donner l'équation exprimant x_{k+1} en fonction de x_k et x_{k-1}.

(c) Dans une autre variante, on construit x_{k+1} non à partir de x_k et x_{k-1} mais à partir de x_k et $x_{k'}$ où k' est le plus grand indice ($< k$) tel que $f(x_k)$ et $f(x_{k'})$ soient de signes opposés. Donner un exemple pour lequel cette nouvelle suite ne coïncide pas avec la précédente.

Ecrire un algorithme calculant les n premières valeurs de la suite x_k.