SMC3 - M20: MATHÉMATIQUES POUR LA CHIMIE
SÉRIE N^0 1
CORRECTION

- **Exercice 1:** L'ensemble des diviseurs:
$D_{36} = \{-36, -18, -9, -6, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 6, 9, 18, 36\}$,
$D_{-59} = \{-59, -1, 1, 59\}$,
$D_{60} = \{-60, -30, -20, -15, -12, -10, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$
$D_{2015} = \{-2015, -43, -5, -1, 1, 5, 43, 2015\}$.

- **Exercice 2:** Cinq multiples positifs et cinq multiples négatifs:
$-20 : -20, -40, -60, -80, -100, 20, 40, 60, 80, 100, ...,$
$35 : -35, -70, -105, -140, -175, 35, 70, 105, 140, 175, ...,$
$105 : -105, -210, -315, -420, -525, 105, 210, 315, 420, 525, ...$
$2015 : -2015, -4030, -6045, -8060, -10075, 2015, 4030, 6045, 8060, 10075, ...$

- **Exercice 3:**
  - **a)** L'ensemble des diviseurs de 6: $D_6 = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$;
  - **b)** Tous les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise 6:
    $n - 4 = -6 \Longrightarrow n = -2,$
    $n - 4 = -3 \Longrightarrow n = 1,$
    $n - 4 = -2 \Longrightarrow n = 2,$
    $n - 4 = -1 \Longrightarrow n = 3,$
    $n - 4 = 1 \Longrightarrow n = 5,$
    $n - 4 = 2 \Longrightarrow n = 6,$
    $n - 4 = 3 \Longrightarrow n = 7,$
    $n - 4 = 6 \Longrightarrow n = 10.$

- **Exercice 4:** La division Euclidienne de 320, par un entier relatif b, à pour reste 39:
$320 = bq + 39 \Longrightarrow bq = 281 = 281 \times 1$ car 281 est premier. Alors: $b = 281$ et $q = 1$.
Remarque: On ne peut pas considérer le cas inverse ($b = 1$ et $q = 281$) car le reste égale à 39 doit être inférieur à b.

- **Exercice 5:** soient a et b deux entiers relatifs, $a^2 + b^2$ est divisible par 7. Supposons, par absurde, que l'un des deux entiers n'est pas divisible par 7 (par exemple, $a = 7q_1$ et $b = 7q_2 + r$ avec $r = 1, 2, ..., 6$), alors: $a^2 + b^2 = (7q_1)^2 + (7q_2 + r)^2 = 49q_1^2 + 49q_2^2 + 14q_2r + r^2 = 7(7q_1^2 + 7q_2^2 + 2q_2r) + r^2$, et On a:

$r = 1 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 7(7q_1^2 + 7q_2^2 + 2q_2 r) + 1,$

$r = 2 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 7(7q_1^2 + 7q_2^2 + 2q_2 r) + 4,$

$r = 3 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 7(7q_1^2 + 7q_2^2 + 2q_2 r + 1) + 2,$

$r = 4 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 7(7q_1^2 + 7q_2^2 + 2q_2 r + 2) + 2,$

$r = 5 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 7(7q_1^2 + 7q_2^2 + 2q_2 r + 3) + 4,$

$r = 6 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 7(7q_1^2 + 7q_2^2 + 2q_2 r + 5) + 1.$

Dans tous les cas, $a^2 + b^2$ s'écrit sous la forme $7Q + R$ avec $R \neq 0$ ce que contredit le fait que $a^2 + b^2$ est divisible par 7.

- **Exercice 6:** On a:

Décomposition en facteurs premiers				
820	2		246	2
410	2		123	3
205	5		41	41
41	41		1	
1				

Donc:

$$PGCD(820, 246) = 2^1 \times 3^0 \times 5^0 \times 41^1 = 82.$$

et

$$PPCM(820, 246) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 41^1 = 2460.$$

L'algorithme d'Euclide:

R0	820	246	82
R1	246	82	0
R	82	0	

Donc:

$$PGCD(820, 246) = 82$$

et

$$PPCM(820, 246) = \frac{820 \times 246}{PGCD(820, 246)} = \frac{820 \times 246}{82} = 2460.$$

- **Exercice 7:** On a:

$PGCD(6, 10) = 2$, $PGCD(10, 15) = 5$, $PGCD(6, 15) = 3$ et:

$$PGCD(6, 10, 15) = PGCD(PGCD(6, 10), 15) = PGCD(2, 15) = 1.$$

- **Exercice 8:** Cherchons deux entiers a et b tels que $PGCD(a,b) = 24$ et $PPCM(a,b) = 1344$. On a:

Décomposition en facteurs premiers				
24	2		1344	2
12	2		672	2
6	2		336	2
3	3		168	2
1			84	2
			42	2
			21	3
			7	7
			1	

Donc
$$PGCD(a,b) = 2^3 \times 3$$
et
$$PPCM(a,b) = 2^6 \times 3 \times 7.$$
En déduit que les facteurs de la décomposition en facteurs premiers de a et b sont:
2 avec puissance minimale 3 et puissance maximale 6,
3 avec puissance minimale 1 et puissance maximale 1,
7 avec puissance minimale 0 et puissance maximale 1,
Donc les couples de valeurs possibles pour a et b sont:
$2^3 \times 3^1 \times 7^0$ et $2^6 \times 3^1 \times 7^1$,
$2^6 \times 3^1 \times 7^0$ et $2^3 \times 3^1 \times 7^1$,

- **Exercice 9:** L'algorithme d'Euclide:

R0	2378	1769	609	551	58	29
R1	1769	609	551	58	29	0
U0	1	0	1	-2	3	-29
U1	0	1	-2	3	-29	61
V0	0	1	-1	3	-4	39
V1	1	-1	3	-4	39	-82
Q	1	2	1	9	2	
R	609	551	58	29	0	
U	1	-2	3	-29	61	
V	-1	3	-4	39	-82	

Donc:
$$PGCD(2378, 1769) = 29$$
et
$$PGCD(2378, 1769) = (-29) * 2378 + 39 * 1769.$$

- **Exercice 10:** L'algorithme d'Euclide pour 1640 et 492:

R0	1640	492	164
R1	492	164	0
U0	1	0	1
U1	0	1	-3
V0	0	1	-3
V1	1	-3	10
Q	3	3	
R	164	0	
U	1	-3	
V	-3	10	

Donc
$$PGCD(1640, 492) = 164$$
et:
$$PGCD(1640, -492) = PGCD(1640, 492) = (1640\times1)+(492\times(-3)) = (1640\times1)+((-492)\times3).$$

- **Exercice 11:** Les nombres premiers qui sont entre 1990 et 2014:
En utilisant les divisions successives par les premiers nombres premiers (critère d'arrêt: le nombre devient plus petit que le carré du dernier nombre premier utilisé):

1990	Pair	2002	Pair
1991	Divisible par 11	2003	Premier
1992	Pair	2004	Pair
1993	Premier	2005	Divisible par 5
1994	Pair	2006	Pair
1995	Divisible par 5	2007	Divisible par 3
1996	Pair	2008	Pair
1997	Premier	2009	Divisible par 7
1998	Pair	2010	Pair
1999	Premier	2011	Premier
2000	Pair	2012	Pair
2001	Divisible par 3	2013	Divisible par 3
		2014	Pair

- **Exercice 12:** Notons $a = 1111111111$ et $b = 123456789$
  - **a)** On a: $a = 9b + 10$ donc $q = 9$ et $r = 10$.
  - **b)** On a;

R0	1111111111	123456789	10	9	1
R1	123456789	10	9	1	0
U0	1	0	1	-12345678	12345679
U1	0	1	-12345678	12345679	-123456789
V0	0	1	-9	111111103	-111111112
V1	1	-9	111111103	-111111112	1111111111
Q	9	12345678	1	9	
R	10	9	1	0	
U	1	-12345678	12345679	-123456789	
V	-9	111111103	-111111112	1111111111	

Donc:

$$d = PGCD(a,b) = 1;$$

– **c)**

$$d = PGCD(a,b) = 12345679 \times 1111111111 - 111111112 \times 123456789$$

- ## Exercice 13:

a) Algorithme d'Euclide:

R0	31	28	3	1
R1	28	3	1	0
U0	1	0	1	-9
U1	0	1	-9	28
V0	0	1	-1	10
V1	1	-1	10	-31
Q	1	9	3	
R	3	1	0	
U	1	-9	28	
V	-1	10	-31	

Donc:

$$PGCD(31,28) = 1 \text{ et } 31 \times (-9) + 28 \times 10 = 1$$

soit

$$31u_0 - 28v_0 = 1 \text{ (Eqt1)}$$

avec $u = -9$ et $v = -10$.

b) Soit l'équation (E) : $31u - 28v = 414$.
En multipliant $(Eqt1)$ par 414 nous obtenons:

$$31(414 \times u_0) - 28(414 \times v_0) = 1 \times 414$$

On pose $U_0 = 414 \times -9 = -3726$ et $V_0 = 414 \times -10 = -4140$, alors:

$$31(U_0) - 28(V_0) = 4140 \ (Eqt2).$$

Donc: (U_0, V_0) est une solution pariculière de (E).
Soit (U, V) une solution générale de (E): $31U - 28V = 414$.
La soustraction des équations (E) et $(Eqt2)$ donne:

$$31(U - 3726) - 28(V - 4140) = 0$$

Soit:

$$31(U + 3726) = 28(V + 4140) \ (Eqt3)$$

Pour suite, on peut utiliser deux méthodes:
1) Méthode directe: De $(Eqt3)$ on déduit que 31 divise $28(V + 4140)$ et par conséquent, 31 et 28 sont premiers entre eux, 31 divise $V + 4140$ soit:

$$V + 4140 = 31k \Longrightarrow V = -4140 + 31k$$

On remplace dans $(Eqt3)$ pour obtenir

$$U = -3726 + 28k$$

et la solution de (E) sécrit:

$$S = \{(-3726 + 28k, -4140 + 31k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$$

1) Calcul modulaire: On a:

$$31(U + 3726) = 28(V + 4140) \ (Eqt3)$$

D'où:

$$28(V + 4140) = 0 \ (mod 31) \text{ et } 31(U + 3726) = 0 \ (mod 28)$$

Or, 28 et 31 sont premiers entre eux donc:

$$(V+4140)=0\ (mod31) \text{ et } (U+3726)=0\ (mod28)$$

et

$$V=-4140\ (mod31) \text{ et } U=-3726\ (mod28)$$

$$S=\{(-3726+28k,-4140+31k) \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\}$$

c) Soit l'équation $6u+15v=30$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:
On a $PGCD(15,6)=3$ divise 30 donc :

$$(E):2u+5v=10$$

On a:

R0	5	2	1
R1	2	1	0
U0	1	0	1
U1	0	1	-2
V0	0	1	-2
V1	1	-2	5
Q	2	2	
R	1	0	
U	1	-2	
V	-2	5	

Donc:

$$2u_0+5v_0=1 \text{ avec } u_0=-2 \text{ et } v_0=1$$

Soit:

$$2U_0+5V_0=10 \text{ avec } U_0=-20 \text{ et } V_0=10$$

La différence des deux équations donne:

$$2(u-U_0)+5(v-V_0)=0$$

Soit:

$$2(u+20)=5(-v+10)=0$$

$$2(u+20)=0\ (mod5) \text{ et } 5(-v+10)=0\ (mod5)$$

Or, 2 et 5 sont premiers entre eux donc:

$$(u+20)=0\ (mod5) \text{ et } (-v+10)=0\ (mod2)$$

et

$$S=\{(-20+5k,10-2k) \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\}$$

d) Est ce que l'équation $6u+15v=31$ admet une solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$?
On a $PGCD(15,6)=3$ ne divise pas 31 donc l'équation n'admet pas de solution.

- **Exercice 14:** Donnons l'écriture en base dix des nombres dont l'écriture en une autre base, b, est donnée par:
Pour chaque écriture, soit b la base et n le nombre d'élément dans l'écriture, alors la valeur suivant la base décimale est donnée par:

$$a_{n-1}b^{n-1}+a_{n-2}b^{n-2}+...+a_1b^1+a_0b^0$$

où: a_{n-1} est le terme à gauche et a_0 à droite.

$$\overline{100111}^2=1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0=39$$

a. $\overline{100111}^2 = 39$ b. $\overline{100101111}^2 = 303$ c. $\overline{1001001111}^2 = 591$
d. $\overline{23}^4 = 11$ e. $\overline{3333}^4 = 255$ f. $\overline{1230}^4 = 108$
g. $\overline{3042}^5 = 397$ h. $\overline{123}^5 = 38$ i. $\overline{142}^5 = 47$
j. $\overline{71052}^8 = 29226$ k. $\overline{10027}^8 = 4119$ l. $\overline{36501}^8 = 15681$
m. $\overline{1A9}^{16} = 452$ n. $\overline{30BA}^{16} = 12474$ o. $\overline{50001}^{16} = 327681$

- **Exercice 15:** Donnons les écritures de chacun des nombres en utilisant la base proposée:
  - Le cas général en utilise les divisons successives;
  - Lorsque l'une des deux bases est une puissance de l'autre, en utilise la méthode adaptée.

Nombre	100	16	2
B	6	6	6
Q	16	2	0
R	4	4	2

$$100 = \overline{244}^6$$

Base $b \longrightarrow$ base b^n. On découpe l'écriture en des blocs de n éléments en commencant par la droite et on ajoutant, si necéssaire, des 0 à gauche: Base $2 \longrightarrow$ base $8 = 2^3$:

$$\overline{1011011}^2 = \underbrace{\overline{001}^2}\underbrace{\overline{011}^2}\underbrace{\overline{011}^2} = \overline{133}^8$$

Base $b^n \longrightarrow$ base b. Chaque élément de la première décomposition est réécrit suivant la deuxième base.
Base $8 = 2^3 \longrightarrow$ base 2:

$$\overline{236}^8 = \overline{\underbrace{010}\,\underbrace{011}\,\underbrace{110}}^2$$

a. $100 = \overline{244}^6$ b. $423 = \overline{120200}^3$ c. $256 = \overline{2011}^5$
d. $\overline{11244}^5 = 824 = \overline{824}^{10}$ e. $\overline{23}^5 = 13 = \overline{16}^7$ f. $\overline{2A8}^{12} = 416 = \overline{416}^{10}$
g. $\overline{C0CA}^{16} = \overline{1403041}^8$ h. $\overline{1011011}^2 = \overline{133}^8$ i. $\overline{236}^8 = \overline{10011110}^2$
j. $\overline{FFF16}^{16} = \overline{3333330112}^4$ k. $\overline{1001001111}^2 = \overline{24F}^{16}$ l.$\overline{3333}^{16} = \overline{3030303}^4$

- **Exercice 16:** Cherchons toutes les valeurs des chiffres x et y telles que le nombre $n = \overline{26x95y}^{10}$ dans le système décimal soit divisible par 2 et par 3.
  $n = \overline{26x95y}^{10}$ divisible par $2 \Longrightarrow y$ est pair: $y = 0, 2, 4, 6, 8$
  $n = \overline{26x95y}^{10}$ divisible par $3 \Longrightarrow$ la somme des chiffres est un multiple de 3:
  $2 + 6 + x + 9 + 5 + y = 22 + x + y$
  $y = 0 \Longrightarrow 22 + x$ est multiple de 3: $x = 2, 5, 8$
  $y = 2 \Longrightarrow 24 + x$ est multiple de 3: $x = 0, 3, 6, 9$
  $y = 4 \Longrightarrow 26 + x$ est multiple de 3: $x = 1, 4, 7$
  $y = 6 \Longrightarrow 28 + x$ est multiple de 3: $x = 2, 5, 8$
  $y = 8 \Longrightarrow 30 + x$ est multiple de 3: $x = 0, 3, 6, 9$

- **Exercice 17:**

$$A = \overline{16524}^7 = \overline{4722}^{10} = \overline{1001001110010}^2 = \overline{1272}^{16}.$$

- **Exercice 18:**

$$N = \overline{23}^{10} = \overline{27}^b = 2b + 7 = 23$$

Donc $b = 8$.

- **Exercice 19:** Soit n un entier naturel qui s'écrit dans le systme décimal $n = \overline{abcabc}^{10}$ avec $a \neq 0$:
  a) Déterminons n tel que les deux conditions suivantes soient vérifiées :
  - n est divisible par $5 \Longrightarrow c = 0, 5$
  - L'entier $\overline{bc}^{10}$ est le double de $a \Longrightarrow 10b + c = 2a$
    $c = 0 \Longrightarrow 10b = 2a \Longrightarrow b = 1$ et $a = 5$
    $c = 5 \Longrightarrow 10b + 5 = 2a \Longrightarrow$ impossible

  b) Décomposons $n = 510510$ en produit de facteurs premiers:

Décomposition en facteurs premiers

510510	2
255255	5
51051	3
17017	11
1547	13
119	17
7	7
1	

$$n = 510510 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$$

- **Exercice 20:** Déterminons les congruences:

Nombre	12	45	87	104
Modulo	5	5	5	5
Q	2	9	17	20
R	2	0	2	4
Congruence	2	0	2	4

Nombre	14	85	24	46
Modulo	7	7	7	7
Q	2	12	3	6
R	0	1	3	4
Congruence	0	1	3	4

Nombre	12	204	36	48
Modulo	8	8	8	8
Q	1	25	4	6
R	4	4	4	0
Congruence	4	4	4	0

- **Exercice 21:**
  a) Complétons la table de congruence suivante modulo 5:

N	0	1	2	3	4
$2N^2$	0	2	$8 = 3$	$18 = 3$	$32 = 2$

  b) Complétons la table de congruence suivante modulo 7:

N	0	1	2	3	4	5	6
$3N-5$	$-5=2$	$-2=5$	1	4	$7=0$	$10=3$	$13=6$

c) Complétons la table de congruence suivante modulo 4:

N	0	1	2	3
N^2-2N+3	3	2	3	$6=2$

- **Exercice 22:**

a) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes modulo 3, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\{0,1,2\}$
les tables des opérations habituelles:

somme	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Soustraction	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Produit	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$$\mathbb{Z}_3^*=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

b) $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

somme	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Soustraction	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2
2	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3
3	3	2	1	0	9	8	7	6	5	4
4	4	3	2	1	0	9	8	7	6	5
5	5	4	3	2	1	0	9	8	7	6
6	6	5	4	3	2	1	0	9	8	7
7	7	6	5	4	3	2	1	0	9	8
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Produit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$$\mathbb{Z}_{10}^{*} = \{1, 3, 7, 9\}$$

Même travail pour $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

- **Exercice 23:**
  a) Montrons que pour tout n entier naturel, $5n^3 + n$ est divisible par 6;
  On a: $n \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\ (mod\ 6)$ et :

N	0	1	2	3	4	5
5N³+N	0	6	42	138	324	630
Modulo	6	6	6	6	6	6
Q	0	1	7	23	54	105
R	0	0	0	0	0	0
Congruence	0	0	0	0	0	0

  Pour tout entier n, $5n^3 + n$ est congru à $0\ (mod\ 6)$
  b) calcul modulo 7:

N	0	1	2	3	4	5	6
N⁶-1	-1	0	63	728	4095	15624	46655
Modulo	7	7	7	7	7	7	7
Q	0	0	9	104	585	2232	6665
R	6	0	0	0	0	0	0
Congruence	6	0	0	0	0	0	0

  Donc, si n n'est pas multiple de 7 (congru à une valeur différente de 0) alors $n^6 - 1$ est divisible par 7 (congru à 0)

- **Exercice 24:**
  Pour réduire une puissance b^n, on doit trouver une puissance intermédiaire p telle que $b^p \equiv 1$ ou $b^p \equiv -1$ avec le modulo puis décomposer n en fonction de p.
  a) Déterminons le reste de la division euclidienne par 11:
  On a $12 \equiv 1(mod 11)$ donc $12^{15} \equiv 1(mod 11)$;
  On a $10 \equiv 10(mod 11)$ et $10^2 = 100 \equiv 1(mod 11)$ donc:
  $10^7 = 10^{(2\times3+1)} = (10^2)^3 \times 10^1 = 10(mod 11)$;
  On a $78 \equiv 1(mod 11)$ donc $78^{15} \equiv 1(mod 11)$;
  On a $13 \equiv 2(mod 11)$ $2^5 = 32 \equiv -1(mod 11)$ donc
  $$13^{12} \equiv 2^{12}(mod 11) \equiv 2^{(2\times5+2)} \equiv (2^5)^2 \times 2^2(mod 11) \equiv 4(mod 11)$$
  b) Calculons le reste de la division euclidienne 57383^{114} de par 19. On a: $57383 \equiv 3(mod 19)$ et $3^{18} = 387420489 \equiv 1(mod 19)$, et:
  $$57383^{114} \equiv 3^{114} \equiv 3^{18\times6+6} \equiv (3^{18})^6 \times 3^6 \equiv 2(mod 19)$$
  c) Calculons le reste de la division euclidienne de 91234^{2002} par 7.
  On a: $91234 \equiv 3(mod 7)$ et $3^6 = 729 \equiv 1(mod 7)$ donc:
  $$91234^{2002} \equiv 3^{2002} \equiv 3^{6\times333+4} \equiv (3^6)^{333} \times 3^4 \equiv 4(mod 7)$$

- **Exercice 25:** Résolution des équations:
  a) $3x \equiv 7\ (mod\ 9)$. On a: $PGCD(3, 9) = 3$ ne divise pas 7 et donc l'équation n'a pas de solution.
  b) $4t \equiv 2\ (mod\ 5)$. On a: $PGCD(4, 5) = 1$ divise 2 et donc l'équation a une solution. Or, $4 \times 4 = 16 \equiv 1(mod 5)$ (l'inverse de 4 est 4) donc:
  $$t \equiv 4 \times 2 \equiv 3 et S = \{3 + 5k, k \in \mathbb{Z}\}$$

c) $2y \equiv 6\ (mod\ 8)$. On a: $PGCD(2,8) = 2$ divise 6 et l'équation admet deux solutions et équivalente à:
$2(y-3) \equiv 0(mod8)$, or $2 \times 0 \equiv 0(mod8)$ et $2 \times 4 \equiv 8 \equiv 0(mod8)$, donc:

$$(y-3) \equiv 0(mod8) \text{ et } (y-3) \equiv 4(mod8)$$

$$S = \{3 + 8k, 7 + 8k', k, k' \in \mathbb{Z}\}$$

- **Exercice 26:**

a) On a $3^3 = 27 = 2 \times 13 + 1$ soit $3^3 \equiv 1\ (mod\ 13)$;
b) pour tout entier naturel n, $3^{3n} \equiv (3^3)^n \equiv 1^n \equiv 1(mod13)$;
c) pour tout entier naturel n:

$$3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1 \equiv 3^{3(2n)} \times 3^2 + 3^{3n} \times 3^1 + 1 \equiv 9 + 3 + 1 \equiv 13 \equiv 0(mod13)$$

et le nombre est un multiple de 13.

- **Exercice 27:** Soit n un entier naturel non nul, on pose:

$$A_n = n^5 - n$$

a) On a $A_n = n(n^4 - 1) > 0$, donc A_n est positif;
b) Calcul modulo 3:

N	0	1	2	3	4
N^5-N	0	0	30	240	1020
Modulo	3	3	3	3	3
Q	0	0	10	80	340
R	0	0	0	0	0
Congruence	0	0	0	0	0

c) Calcul modulo 5:

N	0	1	2	3	4
N^5-N	0	0	30	240	1020
Modulo	5	5	5	5	5
Q	0	0	6	48	204
R	0	0	0	0	0
Congruence	0	0	0	0	0

—

Contact: ferrahi@yahoo.com et www.ferrahi.cla.fr
Faculté des Sciences de Tétouan, BP. 2121 M'Hannech II, 93030 Tétouan Maroc.