



UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI
FACULTÉ DES SCIENCES - TÉTOUAN
Licence Fondamentale Sciences Mathématiques et Applications
Semestre 6 - Schémas numériques pour les Equations différentielles ordinaires (EDO)

SUPPORT DE COURS
Rédigé par : **Bouchaib FERRAHI**
Département de Mathématiques

2022-2023

Les documents relatifs à ce cours sont disponibles sur : www.ferrahi.ma

Faculté des Sciences de Tétouan, BP. 2121 M'Hannech II, 93030 Tétouan Maroc.

Table des matières

Sommaire	2
Avant-propos	3
1 Dérivation numérique	4
1.1 Dérivée première	4
1.2 Dérivées d'ordre supérieur.	7
1.3 Étude de l'erreur commise.	7
2 Intégration numérique	9
2.1 Intégration numérique	9
3 Résolution numérique d'EDO	17
3.1 Résolution approchée d'équations différentielles	17
3.2 Problème de Cauchy	18
3.3 Schémas explicite	19
3.4 Convergence des méthodes explicite	21
3.5 Méthodes de Runge-Kutta explicites	26
3.6 Problèmes raides	30
3.7 Schémas implicite	31

Avant-propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants du semestre six de la Licence Fondamentale Sciences Mathématiques et Applications (SMA), parcours Appliqué. Il présente l'essentiel du contenu proposé durant ce cours et constitue un premier support qui doit, nécessairement, être complété par les autres supports (Présentations PPT, Travaux dirigés et annales des examens) ainsi que les vidéos disponible sur ma chaîne Youtube.

Il est à noter que les documents du cours constituent des outils de travail qui complètent, mais ne remplacent pas, les séances hebdomadaires en présentiel. Ce polycopié est adapté à la filière sus-mentionnée et se limitera au contenu présenté dans le cours. Les deux premiers chapitres sont des rappels et des compléments indispensables pour introduire les schémas numériques.

Ce travail ne constitue pas une référence complète, le lecteur intéressé peut consulter d'autres références qui traitent ce même contenu d'une manière plus profonde et rigoureuse.

BOUCHAIB FERRAHI

Chapitre 1

Dérivation numérique

1.1 Dérivée première

Formule de différence progressive en 2 points

Pour une fonction f dérivable sur un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

. Mais pour calculer la dérivée d'une fonction f qui n'est connue par sa valeur en quelques points donnés x_i $i = 0, 1, \dots, n$ distincts, on va utiliser des formules dites "**formules de différence**" pour approcher la dérivée de f dans un point c .

Ces formules de différence sont basées sur l'utilisation d'un polynôme d'interpolation de degré 1.

On pose $f(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. On suppose en plus que le pas entre deux points successifs est constant, on le note $h = x_{i+1} - x_i$. Alors les formules standards en deux points sont :

- Formule de différence progressive :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

- Formule de différence régressive :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

- Formule de différence centrale :

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}.$$

Exemple 1.1.1 *Considérons les données suivantes :*

$(x_0, y_0) = (1, 2)$, $(x_1, y_1) = (2, 4)$, $(x_2, y_2) = (3, 8)$, $(x_3, y_3) = (4, 16)$ et $(x_4, y_4) = (5, 32)$.

Nous voulons estimer la valeur de $f'(x_2)$.

— Progressive :

$$f'(x) \approx \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{16 - 8}{4 - 3} = 8.$$

— *Régressive* :

$$f'(x) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 4}{3 - 2} = 4.$$

— *Centrale* :

$$f'(x) \approx \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{16 - 4}{4 - 2} = 6.$$

Les données ont été calculé pour la fonction $f(x) = 2^x$. $f'(x) = 2^x \ln(2)$ et pour $x = 3$ $f'(3) = 2^3 \ln(2) = 5.544$.

Exercice 1.1.2 Retrouver les formules de différences précédentes en utilisant la formule de Taylor. En déduire l'erreur commise.

Solution 1.1.3 La formule de Taylor à l'ordre deux donne

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\eta), \quad x \leq \eta \leq x+h$$

— **Formule progressive** : $h = x_{i+1} - x_i$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2}f''(\eta) \quad x_i \leq \eta \leq x_{i+1}$$

— **Formule régressive** : $h = x_i - x_{i-1}$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{2}f''(\eta) \quad x_{i-1} \leq \eta \leq x_i$$

L'erreur est $\frac{h}{2}f''(\eta)$ donc en $O(h)$.

Cette formule peut être trouvée aussi en utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

— **Formule de différence centrale en x_i** : On peut la trouver en utilisant la formule de Taylor d'ordre 3 avec $h = x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f'''(\eta_1)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f'''(\eta_2)$$

$$x_i \leq \eta_1 \leq x_{i+1}, \quad x_{i-1} \leq \eta_2 \leq x_i$$

si on suppose que f''' est continue sur $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ alors :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + \frac{h^2}{6}f'''(\eta)$$

$$x_{i-1} \leq \eta \leq x_{i+1}$$

l'erreur est $\frac{h^2}{6}f'''(\eta)$ donc en $O(h^2)$.

La formule de différence centrale peut aussi être trouvée à partir du polynôme d'interpolation de Lagrange en 3 points.

Formule de différence en 3 points :

Si on interpole les données par un polynôme de degré deux, on obtient les formules de différence suivantes, (on suppose que le pas h est constant).

— Formule de différence progressive :

$$f'(x_i) \approx \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{x_{i+2} - x_i}$$

— Formule de différence régressive :

$$f'(x_i) \approx \frac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2}))}{x_i - x_{i-2}}$$

Exemple 1.1.4 Formules de différence en 3 points :

En utilisant les données de l'exemple précédent, on trouve :

$$f'(x_i) \approx \frac{-32 + 4(16) - 3(8)}{2} = 4 \quad \text{progressive.}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{3(8) - 4(4) + 2}{2} = 5 \quad \text{régressive.}$$

Exercice 1.1.5 (Formule générale en 3 points) Soit f une fonction connue par sa valeur en 3 point distincts x_1, x_2 et x_3 . On pose $f(x_i) = y_i$. Les points x_i ne sont pas forcément équidistants. En utilisant le polynôme d'interpolation de Lagrange montrer que la formule suivante permet d'approcher la dérivée en un point $x \in [x_1, x_3]$.

$$f'(x) = \frac{2x - x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{2x - x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3.$$

Solution 1.1.6 Le polynôme de Lagrange est donné par

$$P(x) = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3$$

Avec

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

L'approximation de la dérivée première est donnée par $f'(x) \approx P'(x)$, qui peut s'écrire

$$P'(x) = L'_1(x)y_1 + L'_2(x)y_2 + L'_3(x)y_3$$

Avec

$$L'_1(x) = \frac{2x - x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)},$$

$$L'_2(x) = \frac{2x - x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)},$$

$$L'_3(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

donc

$$f'(x) = \frac{2x - x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 + \frac{2x - x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3.$$

1.2 Dérivées d'ordre supérieur.

Les formules de dérivées d'ordre supérieur, peuvent être trouvées à partir des dérivées du polynôme de Lagrange ou en utilisant les formules de Taylor.

Dérivée seconde à partir du polynôme de Taylor. On a :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\eta_1)$$

et

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\eta_2)$$

Avec

$$x \leq \eta_1 \leq x+h \text{ et } x-h \leq \eta_2 \leq x.$$

Donc

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

l'erreur est en $O(h^2)$.

Donc pour 3 points x_{i-1}, x_i, x_{i+1} équidistants ($x_{i+1} - x_i = h$) et $x_i - x_{i-1} = h$), la formule de la dérivée seconde est donnée par :

$$f''(x_i) = \frac{1}{h^2} [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})]$$

l'erreur est en $O(h^2)$.

Pour obtenir les formules de la troisième et la quatrième dérivée, on prend une combinaison linéaire des développements de Taylor, pour $f(x+2h), f(x+h), f(x-h)$ et $f(x-2h)$.

La table suivante donne différentes formules centrales toutes en $O(h^2)$:

$$\begin{aligned} f'(x_i) &\simeq \frac{1}{2h} [f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})] \\ f''(x_i) &\simeq \frac{1}{h^2} [f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})] \\ f^{(3)}(x_i) &\simeq \frac{1}{2h^3} [f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})] \\ f^{(4)}(x_i) &\simeq \frac{1}{h^4} [f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})]. \end{aligned}$$

1.3 Étude de l'erreur commise.

D'après le chapitre précédent, si f est connue en $(n+1)$ points $x_i, i = 0, \dots, n$ alors

$$f(x) = P_n(x) + e(x) = \sum_{i=0}^{i=n} L_i(x) \cdot f(x_i),$$

où $e(x)$ est l'erreur d'interpolation. En dérivant on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= P'_n(x) + e'(x) \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} L'_i(x) \cdot f(x_i) + e'(x) \\ \text{et } e'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(n+1)!} L(x) \cdot f^{(n+1)}(\xi_x) \right) = \frac{d}{dx} (L(x) \cdot f[x_0, \dots, x_n, x]) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} L'(x) \cdot f^{(n+1)}(\xi_x) + \frac{1}{(n+1)!} L(x) \cdot \frac{d}{dx} (f^{(n+1)}(\xi_x)) \end{aligned}$$

On remarque tout de suite que l'erreur de dérivation est nulle si f est un polynôme de degré inférieur ou égale à n . Sinon il faut connaître $\frac{d}{dx} (f^{(n+1)}(\xi_x))$, ce qui est difficile car la fonction $x \rightarrow \xi_x$ étant inconnue. En générale on cherche une majoration M_k globale de $f^{(k)}$ et on écrit :

$$|e'(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |L'(x)| M_{n+1} + \frac{1}{(n+2)!} |L(x)| M_{n+2}.$$

Chapitre 2

Intégration numérique

2.1 Intégration numérique

INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLÈME

Soit $I = \int_a^b f(x)dx$ où f est continue sur $[a, b]$

Le calcul explicite de cette intégrale n'est pas toujours possible :

Par exemple : $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$, $\int_0^1 \cos x^2 dx$

- f n'a pas de primitive explicite,
- Le calcul analytique est long et compliqué,
- Le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée qui fait appel à d'autres fonctions elles-mêmes longues à évaluer.
- f n'est pas donnée par une forme explicite mais seulement par un nombre fini de couple $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ (suite à une expérience)

INTRODUCTION ET DÉFINITION

Les méthodes d'intégration numérique permettent d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

En utilisant des polynômes d'interpolation de f (dont le calcul de l'intégrale est beaucoup plus simple !!).

En général, on cherche une approximation sous la forme :

$$\tilde{I} = (b - a) \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$$

INTRODUCTION ET DÉFINITION

L'approximation

$$\tilde{I} = (b - a) \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$$

est dite **une formule de quadrature** de I , avec :

- $x_i \in [a, b]$ sont les points d'intégration,
- ω_i sont les poids d'intégration et ils vérifiant :

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1$$

L'approximation quadratique $\tilde{I}$ de I dépend de la manière dont on choisit les points d'intégration (x_i) et les poids (ω_i)

FORMULE OU MÉTHODE DES TRAPÈZES

Les points d'intégration a_i sont équidistantes tels que :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = b \text{ avec } a_{i+1} - a_i = h \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n$$

et de considérer la valeur approchée :

$$I_n = \frac{h}{2}f(a) + h(f(a_1) + \dots + f(a_i) + \dots + f(a_n)) + \frac{h}{2}f(b)$$

que nous pouvons écrire :

$$I_n = \frac{h}{2}f(a) + \frac{h}{2}f(a_1) + \frac{h}{2}f(a_1) + \dots + \frac{h}{2}f(a_i) + \frac{h}{2}f(a_{i+1}) + \dots + \frac{h}{2}f(a_n) + \frac{h}{2}f(a_n) + \frac{h}{2}f(b)$$

Soit :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{h}{2}(f(a_0) + f(a_1)) \\ &+ \dots \\ &+ \frac{h}{2}(f(a_i) + f(a_{i+1})) \\ &+ \dots \\ &+ \frac{h}{2}(f(a_n) + f(a_{n+1})) \end{aligned}$$

Remarquons que la quantité :

$$\frac{h}{2}(f(a_i) + f(a_{i+1}))$$

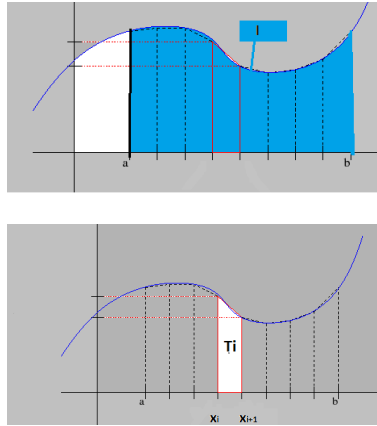
Représente l'aire du Trapèze T_i déterminé par l'axe des abscisses, $x = a_i$, $x = a_{i+1}$ et la droite qui passe par les points $(a_i, f(a_i))$ et $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$.

Cette méthode consiste à remplacer l'intégrale I (qui est égale à l'aire comprise entre l'axe des abscisses, $x = a$, $x = b$ et la courbe de f) par la valeur approchée donnée par la somme des aires des trapèze T_i :

$$I_n = T_0 + T_1 + \dots + T_n$$

FORMULE DES TRAPÈZES

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad I_n = T_0 + T_1 + \dots + T_n$$

**Remarques :**

1) Si les points a_i ne sont pas équidistants, nous pouvons généraliser la méthode en posant :

$$h_i = a_{i+1} - a_i \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n$$

L'aire du trapèze T_i est donnée par :

$$\frac{h_i}{2}(f(a_i) + f(a_{i+1}))$$

et une valeur approchée de I est donnée par :

$$I_n = T_0 + T_1 + \dots + T_n$$

2) Les sommes de Riemann définies par :

$$S_n = \sum_{j=0}^n (a_{j+1} - a_j) f(\theta_j) \text{ avec } \theta_j \in [a_j, a_{j+1}]$$

converge vers l'intégrale de Riemann de f ($I = \int_a^b f(x)dx$).

EXEMPLES :

1) Un seul point $x_0 \in [a, b]$: On choisit un seul point d'intégration dans $[a, b]$ et on remplace f par un polynôme d'interpolation P_0 de degré zéro tel que $P_0(x) = f(x_0)$. Donc :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tilde{I} = \int_a^b P_0(x)dx = \int_a^b f(x_0)dx = (b-a)f(x_0)$$

Généralement, les cas les plus utilisés sont :

- $x_0 = a$: Méthode rectangle à gauche (d'ordre 0),
- $x_0 = b$: Méthode rectangle à droite (d'ordre 0),
- $x_0 = \frac{a+b}{2}$: Méthode du point au milieu (d'ordre 1).

EXEMPLES :

2) Interpolation linéaire : On choisit deux point d'intégration $x_0 = a$ et $x_1 = b$ et on remplace f par un polynôme d'interpolation P_1 de degré un tel que :

$$P_1(x) = \frac{(x-a)f(b) - (x-b)f(a)}{b-a}$$

Donc :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tilde{I} = \int_a^b P_1(x)dx = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Méthode du trapèze (un seul) d'ordre 1.

3) Méthode de Newton-Cotes (cas général) : On choisit les $n + 1$ points équidistants définis par : $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ avec $i = 0, 1, \dots, n$.

Soit $p_n(\cdot)$ le polynôme d'interpolation de f sur la base des $n + 1$ points distincts $(x_i)_{i=0,1,\dots,n}$, alors :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

avec $(L_i(\cdot))_i$ les polynômes caractéristiques de Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Commençant par déterminer la quadrature sur l'intervalle $[-1, 1]$ en utilisant le changement de variable canonique :

$$x \in [a, b] \rightarrow \bar{x} = \frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} \in [-1, 1]$$

et on subdivise l'intervalle $[-1, 1]$ en introduisant les $n + 1$ points équidistants définis par :

$$\theta_i = \frac{x_i - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} = -1 + \frac{2i}{n} \text{ avec } i = 0, 1, \dots, n$$

Le polynôme d'interpolation d'une fonction $f \in C([-1, 1])$ (sur la base des θ_i) est donné par :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(\theta_i) L_i(x)$$

avec $(L_i(\cdot))_i$ les polynômes caractéristiques de Lagrange

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x)dx &\approx \int_{-1}^1 p_n(x)dx = \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n f(\theta_i) L_i(x)dx \\ &\approx \sum_{i=0}^n f(\theta_i) \int_{-1}^1 L_i(x)dx = 2 \sum_{i=0}^n f(\theta_i) \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(x)dx}_{\omega_i} \\ &\approx 2 \sum_{i=0}^n f(\theta_i) \omega_i \end{aligned}$$

Les points θ_i sont distribués d'une manière symétrique autour de 0, On a : $\theta_{n-i} = -\theta_i$, $L_{n-i}(x) = L_i(-x)$, $\omega_{n-i} = \omega_i$
 Sur $[a, b]$: calculons $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant le changement de variable :

$$\bar{x} = \frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}\bar{x} + \frac{b+a}{2} = a + (\bar{x} + 1)\frac{b-a}{2}$$

avec : $x = a \Rightarrow \bar{x} = -1$, $x = b \Rightarrow \bar{x} = 1$, $dx = \frac{b-a}{2}d\bar{x}$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(a + (\bar{x} + 1)\frac{b-a}{2})d\bar{x} \\ \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{2} \times 2 \sum_{i=0}^n f(a + (\theta_i + 1)\frac{b-a}{2})\omega_i \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n f(a + (\theta_i + 1)\frac{b-a}{2})\omega_i = (b-a) \sum_{i=0}^n f(x_i)\omega_i$$

Avec :

$$\omega_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(x)dx$$

Les poids de la quadrature sur $[-1, 1]$.

ORDRE D'UNE MÉTHODE D'INTÉGRATION :

L'ordre d'une méthode d'intégration est le plus grand degré des polynômes intégrés exactement ($I = \tilde{I}$). Nous avons :

Méthode	Nombre de point	Ordre
Rectangle	1	0
Milieu	1	1
Trapèze (un)	2	1
Simpson (Newton-Cotes $n = 2$)	3	3

MÉTHODES COMPOSITES DE CALCUL DE $\int_a^b f(x)dx$

On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $a_i = a + ih$ avec $i = 0, 1, \dots, n$

Méthode composite des rectangles à gauche :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a + ih)$$

Méthode composite des rectangles à droite : $\int_a^b f(x)dx$

$$\simeq \sum_{i=1}^n hf(a_i) = \sum_{i=1}^n hf(a + ih) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a + (i+1)h)$$

MÉTHODES COMPOSITES DE CALCUL DE $\int_a^b f(x)dx$

Méthode composite des rectangles au milieu :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right)$$

Méthode composite des trapèzes : $\int_a^b f(x)dx$

$$\simeq \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} hf(a_i) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} hf(a + ih)$$

Méthode de Simpson (Newton-cotes avec $n = 2$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Démonstration : Application de la méthode Newton-cotes avec $n = 2$ dans $[-1, 1]$ puis $[a, b]$

Méthode composite de Simpson :

Application de la méthode de Simpson dans chaque intervalle $[a_i, a_{i+2}]$ (n est pair) :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{j=\frac{n}{2}-1} f(a_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{j=\frac{n}{2}} f(a_{2j-1}) + f(b) \right]$$

MÉTHODES COMPOSITES DE CALCUL DE $\int_a^b f(x)dx$

Méthodes basées sur l'interpolation : On détermine P_n un polynôme d'interpolation et on a :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_n(x)dx$$

Interpolation de Lagrange → Méthode de Newton-cotes. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de calculer P_n mais seulement les L_i .

Interpolation de Newton utilisant les différences divisées : Cette Méthode utilise une base différente de l'espace $\mathbb{P}_n[X]$, à savoir : MÉTHODES COMPOSITES DE CALCUL DE $\int_a^b f(x)dx$

$$\begin{cases} Q_0(x) = 1 \\ Q_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{j=k-1} (x - x_j), \quad k=1,2,\dots,n \end{cases}$$

Dans cette base, le coefficient de $Q_k(x)$ est donné par la différence divisée $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ définie par récurrence :

$$\begin{cases} f[x_0] = f(x_0) \\ f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad k=1,2,\dots,n \end{cases}$$

MÉTHODES COMPOSITES DE CALCUL DE $\int_a^b f(x)dx$

Une méthode pratique :

x	$f[x] = f(x)$			
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_2, x_2, x_3]$

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1.40	1.56	1.76	2.00	2.28

x	$f[x] = f(x)$				
0.1	1.40				
0.2	1.56	$\frac{1.56-1.40}{0.2-0.1} = 1.6$			
0.3	1.76	$\frac{1.76-1.56}{0.3-0.2} = 2.0$	$\frac{2.0-1.6}{0.3-0.1} = 2.0$		
0.4	2.00	$\frac{2.0-1.76}{0.4-0.3} = 2.4$	$\frac{2.4-2.0}{0.4-0.2} = 2.0$	0.	
0.5	2.28	$\frac{2.28-2.0}{0.5-0.4} = 2.8$	$\frac{2.8-2.4}{0.5-0.3} = 2.0$	0.	0.

$$+f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$P_4(x) = 1.4 + 1.6(x - 0.1) + 2(x - 0.1)(x - 0.2) + 0(x - 0.1)(x - 0.2)(x - 0.3) \\ + 0(x - 0.1)(x - 0.2)(x - 0.3)(x - 0.4)$$

ESTIMATION DE L'ERREUR

Méthode	Simple	Combinée
Rectangle au milieu	$E = \frac{(b-a)^3}{3} f''(\eta) $	$E_n = \frac{b-a}{24} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f''(\eta) $
Trapèzes	$E = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) $	$E_n = \frac{(b-a)^3}{12} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 f''(\eta) $
Simpson	$E = \frac{(b-a)^5}{90} f^{(4)}(\eta) $	$E_n = \frac{b-a}{180} \left(\frac{b-a}{4n}\right)^4 f^{(4)}(\eta) $

Les méthodes

précédentes fixent d'abord les points x_i et cherchent les poids ω_i . Pour améliorer la méthode, on peut chercher à optimiser le choix des x_i pour obtenir la meilleure approximation (de maximiser l'ordre de la méthode, $n + 1$ au maximum).

On se place sur $[-1, 1]$ et on cherche les points x_i et les poids ω_i pour minimiser la différence :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{i=0}^n f(x_i) \omega_i$$

MÉTHODE DE GAUSS-LEGENDRE :

Théorème :

Il existe un choix et un seul des points x_i et des poids ω_i de sorte que la méthode soit d'ordre $p = 2n + 1$. Les points x_i sont les zéros du polynôme de Legendre $\mathbb{L}_{n+1}$. Les poids ω_i sont donnés par plusieurs formules.

D'autre part, l'erreur est donnée par :

$$E(f) = c \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \text{ où } \xi \in [-1, 1] \text{ à condition : } f \text{ suffisamment régulière}$$

MÉTHODE DE GAUSS-LEGENDRE :

$\mathbb{L}_{n+1}$ définit par la relation de recurrence :

$$(n+1)\mathbb{L}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathbb{L}_n(x) - n\mathbb{L}_{n-1}(x), \text{ avec } \mathbb{L}_0 = 1 \text{ et } \mathbb{L}_1 = x$$

Pour déterminer les racines, $(x_i)_{i=0,\dots,n}$, de $\mathbb{L}_{n+1}(x)$ nous pouvons utiliser la formule équivalente suivante :

$$x\mathbb{L}_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}\mathbb{L}_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}\mathbb{L}_{n-1}(x)$$

et x est une valeur propre d'une matrice tridiagonale (à déterminer).

En pratique, nous pouvons utiliser une méthode numérique pour déterminer des valeurs approchées des racines $(x_i)_{i=0,\dots,n}$.

$$\mathbb{L}_0 = 1, \mathbb{L}_1 = x \text{ et } \mathbb{L}_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Un seul point d'intégration : $x_0 = 0$ et $\omega_0 = 2$

Deux points $\mp\sqrt{\frac{1}{3}}$ et les poids : $\omega_i = 1, i = 0, 1$

Trois points d'intégration : $\mathbb{L}_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \Rightarrow x_i = \mp\sqrt{\frac{3}{5}}, 0$ et $\omega_i = \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$

MÉTHODE DE GAUSS-LEGENDRE :

1) Les points d'intégration, $(x_i)_{i=0,\dots,n-1}$, racines du polynôme de Legendre $\mathbb{L}_n$,

2) Les poids $(\omega_i)_{i=0,\dots,n-1}$ sont aussi donnés par :

$$\omega_i = \frac{-2}{(n+1)\mathbb{L}'_n(x_i)\mathbb{L}_{n+1}(x_i)} = \frac{2}{(1-x_i^2)(\mathbb{L}'_n(x_i))^2} \text{ pour } i = 0, \dots, n$$

3) $\mathbb{L}_n$ est défini aussi comme solution de l'équation de Legendre :

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}] + n(n+1)y = 0$$

C'est à dire que $\mathbb{L}_n$ vérifie : $\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d\mathbb{L}_n}{dx}] + n(n+1)\mathbb{L}_n = 0$.

Chapitre 3

Résolution numérique d'EDO

3.1 Résolution approchée d'équations différentielles

Introduction

Définition 3.1.1 (EDO) Une *équation différentielle ordinaire*, notée (**EDO**), est une équation de la forme :

$$f(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = g(t).$$

L'inconnue est une fonction $t \longrightarrow x(t)$, pour $t \in I \subset \mathbb{R}$. On appelle :

- n l'ordre de l'équation.
- g la fonction second membre de l'équation.

Si g est nulle, on dit que *l'équation est homogène*.

Remarque 3.1.2 Nous allons nous limiter aux équations différentielles du premier ordre, car une équation d'ordre $p > 1$ peut toujours se ramener à un système de p équations d'ordre 1.

Définition 3.1.3 (Équation différentielle normale) On appelle *équation différentielle normale* d'ordre n toute équation de la forme :

$$f(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) = x^{(n)}(t).$$

Si la fonction f ne dépend pas explicitement de t , on dit qu'on a une *équation différentielle autonome* d'ordre n .

$$f(x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) = x^{(n)}.$$

Exemple 3.1.4 Équation du premier ordre sous la forme normale :

$$x'(t) = x(t) + t^2.$$

Équation du premier ordre autonome :

$$x' = x^2.$$

Condition initiale

Une EDO admet généralement une infinité de solutions. Pour en choisir quelques-unes, on ajoute une condition initiale qui correspond à la valeur prise par la solution en un point de l'intervalle d'intégration. On écrit :

$$x(t_0) = x_0$$

3.2 Problème de Cauchy

Définition 3.2.1 (Problème de Cauchy) Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto f(t, x) \end{cases}$ une fonction donnée. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, t_0 un point de I et x_0 une valeur donnée. On appelle **problème de Cauchy** le problème :

Trouver une fonction $x : \begin{cases} I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto x(t) \end{cases}$ telle que :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy (3.2.1) sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ vérifie donc :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Solution locale

Théorème 3.2.2 (Cauchy Lipschitz) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée, t_0 un point de I et x_0 une valeur donnée. On suppose que f est **lipschitzienne** par rapport à sa deuxième variable x sur un voisinage de (t_0, x_0) c-à-d il existe un voisinage de (t_0, x_0) dans $I \times \mathbb{R}$ et $L > 0$ tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

Alors on a les propriétés suivantes.

1. *Existence* : Il existe $T > 0$ et $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - T, t_0 + T])$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2. *Unicité* : Si y est une autre solution du problème de Cauchy ci-dessus, elle coïncide avec x sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - T, t_0 + T]$.

3. *Régularité* : Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, alors x est de classe $\mathcal{C}^{r+1}$.

Proposition 3.2.3 Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors elle est localement lipschitzienne.

Solution globale

Théorème 3.2.4 (Existence et unicité globale) Avec les notations du théorème (3.2.2). Si f est globalement lipschitzienne par rapport à x . Alors, pour tous $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une fonction unique $x \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ solution de (3.2.1).

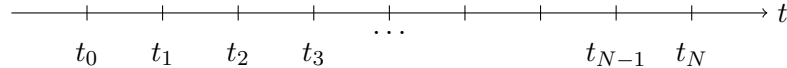
3.3 Schémas explicite

Discrétisation

Nous supposons dans toute la suite que la fonction $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et globalement lipschitzienne sur l'ensemble étudié ce qui impliquera l'existence globale et l'unicité des solutions.

L'objectif est de calculer de façon approchée la solution du problème de Cauchy (3.2.1).

On commence par définir une subdivision régulière de l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$ en $N \in \mathbb{N}^*$ sous intervalles. On pose $h = \frac{T}{N}$ le pas de la discrétisation, $t_i = t_0 + ih$, de telle sorte que $t_{i+1} - t_i = h$. Les points t_i obtenues :

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = t_0 + T,$$


Notre objectif est de calculer une solution approchée de $x(t_i)$ la solution exacte aux points t_i , on la notera x_i . On a donc

$$x_i \approx x(t_i).$$

Le schéma d'Euler progressif ou explicite

Écrivons le problème de Cauchy (3.2.1) à l'instant $t \in [t_0, t_0 + T]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Intégrons l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} . Nous avons ainsi, pour tout $n = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s) ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds$$

On trouve

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds$$

Approchons maintenant l'intégrale du second membre par la méthode des rectangles à gauches :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds \approx f(t_n, x(t_n)) \cdot (t_{n+1} - t_n) = f(t_n, x(t_n)) \cdot h$$

On remplace dans (3.3) on trouve

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) \approx f(t_n, x(t_n)) \cdot h$$

Approchons $x(t_n)$ par x_n pour $n = 0, \dots, N - 1$. On trouve finalement :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \text{ pour } n = 0, \dots, N - 1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

C'est le schéma **d'Euler progressif ou explicite**. C'est un schéma à un pas car x_{n+1} est défini seulement à partir du pas précédent x_n .

Le schéma du point milieu

On approche l'intégrale dans l'équation (3.3) par la méthode des rectangles au point milieu de chaque intervalle $[t_n, t_{n+1}]$. On trouve :

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds \approx f(t_n + \frac{h}{2}, x(t_n + \frac{h}{2})) \cdot (t_{n+1} - t_n) = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, x(t_n + \frac{h}{2}))$$

à cette étape on connaît uniquement la valeur de x_n , et pour donner une approximation de la solution au point $t_n + \frac{h}{2}$ on utilise le schéma d'Euler explicite :

$$x(t_n + \frac{h}{2}) \approx x(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)$$

Approchons $x(t_n)$ par x_n pour $n = 0, \dots, N - 1$. On trouve **Le schéma du point milieu** :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)), \text{ Pour } n = 0, \dots, N - 1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Le schéma de Heun

On approche l'intégrale dans l'équation (3.3) par la méthode des trapèzes. On trouve :

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt \approx \frac{h}{2} [f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x(t_{n+1}))]$$

Comme auparavant $x_n \approx x(t_n)$. L'inconnu $x(t_{n+1})$ est approximé en utilisant la méthode d'Euler. Ainsi, $x(t_{n+1}) \approx x_n + hf(t_n, x_n)$. On trouve finalement : **Le schéma de Heun** :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n))], \text{ Pour } n = 0, \dots, N - 1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Définition 3.3.1 (Schémas explicites à un pas) *Un schéma explicite à un pas approchant la solution du problème de Cauchy (3.2.1) est un schéma qui s'écrit sous la forme*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \text{ pour } n = 0, \dots, N - 1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Où la fonction Φ sera à définir suivant le schéma choisi.

Exemple 3.3.2

— Pour le schéma d'Euler explicite on a :

$$\Phi(t, x, h) = f(t, x)$$

— Pour le schéma du point milieu on a :

$$\Phi(t, x, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t, x)\right),$$

— Pour le schéma de Heun on a :

$$\Phi(t, x, h) = \frac{1}{2} \left[f(t, x) + f\left(t + h, x + hf(t, x)\right) \right]$$

3.4 Convergence des méthodes explicite

Nous allons voir les conditions pour que la solution approchée converge vers la solution exacte quand $h \rightarrow 0$, c'est à dire quand la discrétisation devient très fine. Nous allons introduire trois notions fondamentales :

- la consistance,
- la stabilité,
- la convergence.

Quand un système est convergent, il nous reste à savoir à quel vitesse il converge. Pour cela on introduira la notion d'ordre.

Plus l'ordre est élevé, plus le schéma converge rapidement vers la solution exacte.

Consistance

Définition 3.4.1 (Erreur de consistance) Pour un schéma explicite à un pas :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \text{ pour } n = 0, \dots, N-1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

On définit l'erreur de consistance, et on la note τ_n , le nombre réel définit par :

$$\tau_{n+1}(h) = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\Phi(t_n, x(t_n), h), \text{ pour tout } n = 0, \dots, N-1.$$

Remarque 3.4.2 On a pour tout $n = 0, \dots, N-1$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\Phi(t_n, x(t_n), h) + \tau_{n+1}(h)$$

Ainsi l'erreur de consistance d'un schéma explicite est le terme restant lorsque l'on injecte la solution exacte dans le schéma.

Définition 3.4.3 (Schéma consistant) On dit que le schéma explicite à un pas (3.3.1) est consistant avec le problème de Cauchy (3.2.1) si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N |\tau_n(h)| = 0.$$

Proposition 3.4.4 (Critère de consistance) *Le schéma explicite à un pas (3.3.1) est consistant avec le problème de Cauchy (3.2.1) si et seulement si*

$$\Phi(t, x, 0) = f(t, x).$$

Exemple 3.4.5

— *Le schéma d'Euler explicite est consistant car :*

$$\Phi(t, x, h) = f(t, x) \implies \Phi(t, x, 0) = f(t, x).$$

— *Le schéma du point milieu est consistant car :*

$$\Phi(t, x, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t, x)\right) \implies \Phi(t, x, 0) = f(t, x).$$

— *Le schéma de Heun est consistant car :*

$$\Phi(t, x, h) = \frac{1}{2} \left[f(t, x) + f\left(t + h, x + hf(t, x)\right) \right] \implies \Phi(t, x, 0) = \frac{1}{2} \left[f(t, x) + f(t, x) \right] = f(t, x).$$

Définition 3.4.6 (Ordre de consistance) *On dit que le schéma explicite à un pas (3.3.1) est consistant d'ordre p avec le problème de Cauchy (3.2.1), s'il existe un réel $K > 0$ tel*

$$\sum_{n=1}^N |\tau_n(h)| \leq Kh^p.$$

Stabilité

La notion de stabilité s'applique à des schémas, pour lesquels on calcule des solutions de façon itérative. Les calculs s'effectuent sur des ordinateurs avec une précision finie, et donc sont sujet à des erreurs d'arrondis. Lors d'un calcul itératif, ces erreurs peuvent être amplifiées par le schéma numérique. Le but de l'étude de stabilité est donc de déterminer quelle est l'amplification des erreurs (ou perturbations) par le schéma.

En d'autres termes, les valeurs de x_n qu'on calcule sont remplacées par des valeurs voisines $\tilde{x}_n$ pour deux raisons :

1. **Erreurs d'arrondi** : on représente en machine la valeur x_n issue du calcul par un nombre décimal à t chiffres significatifs et donc : $|x_n - \tilde{x}_n|$, est alors l'erreur d'arrondi majorée en valeur relative par $10^{-t}x_n$.
2. **Incertitude expérimentale** : Dans la plupart des problèmes concrets la valeur de x_0 est remplacée par une valeur $\tilde{x}_0$ tirée d'une expérience, d'une hypothèse etc : $|x_0 - \tilde{x}_0|$ est donc majorée par un nombre qui dépend de la précision expérimentale. La méthode ne peut donc être utile que si la perturbation sur $|x_N - \tilde{x}_N|$ provoquée par une faible perturbation $|x_0 - \tilde{x}_0|$ des données initiales et par les erreurs d'arrondi sur les termes $\tilde{x}_n$ antérieurs est faible.

Définition 3.4.7 (Schéma stable) *On dit que le schéma explicite à un pas (3.3.1) est stable s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que : quelle que soient les suites, définies par récurrence par les formules :*

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot \Phi(t_n, x_n, h)$$

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + h \cdot \Phi(t_n, \tilde{x}_n, h) + \varepsilon_n$$

On a :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x_n - \tilde{x}_n| \leq M(|x_0 - \tilde{x}_0| + \sum_{n=1}^N |\varepsilon_n|)$$

Autrement dit, si les erreurs d'approximation à chaque pas de temps ne sont pas très grandes, l'erreur pour la solution approchée au pas suivant reste maîtrisée.

Proposition 3.4.8 (Critère de stabilité) *S'il existe un réel $L > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \leq T$,*

$$\|\Phi(t, x, h) - \Phi(t, y, h)\| \leq L\|x - y\|,$$

alors le schéma explicite à un pas (3.3.1) est stable et $M = e^{LT}$.

Nous pouvons enfin introduire la troisième et dernière notion fondamentale : la notion de convergence.

Convergence

Définition 3.4.9 (Convergence) *On dit que le schéma explicite à un pas (3.3.1) est convergent vers la solution du problème de Cauchy (3.2.1) si*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| = 0$$

Le théorème suivant permet de relier les trois notions.

Théorème 3.4.10 (Théorème de Lax) *Si le schéma explicite à un pas (3.3.1) est stable et consistant avec le problème de Cauchy (3.2.1), alors il converge vers la solution du problème de Cauchy (3.2.1).*

Proposition 3.4.11 (Ordre de convergence) *Si le schéma explicite à un pas (3.3.1) est stable et consistant d'ordre p avec le problème de Cauchy (3.2.1), alors*

$$\max_{1 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| \leq MKh^p$$

On dit alors qu'il est convergent d'ordre p .

Proposition 3.4.12 (Ordre de convergence : Critères) *Pour toute fonction f de classe C^p , le schéma explicite à un pas (3.3.1) est consistant d'ordre au moins p avec le problème de Cauchy (3.2.1) si :*

$$\begin{aligned} \Phi(t, x, 0) &= f(t, x) \\ \frac{\partial}{\partial h} \Phi(t, x, 0) &= \frac{1}{2} Df(t, x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) + f(t, x) \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \right] \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{p-1}}{\partial h^{p-1}} \Phi(t, x, 0) &= \frac{1}{p} D^{p-1} f(t, x) = \frac{1}{p} D[D^{p-2} f(t, x)]. \end{aligned}$$

Exercice 3.4.13 (Schéma d'Euler explicite)

Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1. Montrer que le schéma d'Euler explicite à pas de temps constant pour résoudre (3.4.13) est consistant et stable.
2. Calculer la différentielle première et seconde de f .
3. En déduire l'ordre de convergence du schéma de Euler.

Solution 3.4.14

1. Avec les notation de la définition (??), pour le schéma d'Euler explicite on a $\Phi(t, x, h) = f(t, x)$. Donc Euler explicite est consistant.

Puisque f est lipschitzienne alors on a :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

et donc

$$|\Phi(t, x, h) - \Phi(t, y, h)| \leq L|x - y|$$

ainsi le schéma est stable

Conclusion : le schéma d'Euler est stable et consistant donc c'est un schéma convergeant .

2. On a $x'(t) = f(t, x(t))$, donc la différentielle de f est donnée en (t, x) par :

$$\begin{aligned} Df(t, x) &= \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + x'(t) \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + f(t, x) \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \end{aligned}$$

De même la différentielle seconde de f est donnée en (t, x) par :

$$\begin{aligned} D^2f &= D[Df] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} Df + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} Df \\ &= \frac{\partial}{\partial t} Df + f \frac{\partial}{\partial x} Df \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right) + f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + f \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} + f \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

3. On a

$$\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, x, 0) = 0 \neq \frac{1}{2} Df(t, x)$$

donc le schéma d'Euler explicite est d'ordre 1.

Exercice 3.4.15 (Schéma d'Euler explicite : Application)

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, on considère les deux problèmes :

$$\mathcal{P} \begin{cases} x'(t) = t \sin(x), & t \in [0, T], \\ x(0) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

et

$$\mathcal{S} \begin{cases} x'(t) = t^2 + x + 1, & t \in [1, T], \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

1. Donner le schéma d'Euler explicite en prenant un pas de temps constant.
2. Calculer les 2 premières itérations en prenant comme pas de temps $h = 0.1$.
3. Est-ce que ce schéma converge vers chacune des solutions de ces problèmes ?

Solution 3.4.16

1. Le schéma d'Euler :

— Pour $\mathcal{P}$ on a $f(t_n, x_n) = t_n \sin(x_n)$ donc :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + h f(t_n, x_n) = x_n + h \cdot t_n \cdot \sin(x_n) \\ x_0 &= \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

— Pour $\mathcal{S}$ on a $f(t_n, x_n) = t_n^2 + x_n + 1$ donc :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + h \cdot (t_n^2 + x_n + 1) \\ x_0 &= 1 \end{cases}$$

2. Les 2 premières itérations x_1 et x_2

— Pour $\mathcal{P}$ on a $h = 0.1$, $t_0 = 0$ et $t_1 = t_0 + h = 0.1$. On trouve :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\pi}{2} \\ x_1 &= \frac{\pi}{2} + h \times t_0 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \simeq 1.57 \\ x_2 &= \frac{\pi}{2} + 0.1 \times t_1 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 0.1 \times 0.1 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 0.01 \simeq 1.58 \end{aligned}$$

— Pour $\mathcal{S}$ on a $h = 0.1$, $t_0 = 1$ et $t_1 = t_0 + h = 1.1$. On trouve :

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1 + 0.1(t_0^2 + 1 + 1) = 1 + 0.1(1^2 + 2) = 1.3$$

$$x_2 = 1.3 + 0.1(t_1^2 + 1.3 + 1) = 1.3 + 0.1((1.1)^2 + 2.3) = 1.651$$

3. **Convergence** : Le schéma d'Euler progressif est **consistant** avec n'importe quel problème de Cauchy, car $\Phi(t, x, h) = f(t, x)$. Pour la stabilité il faut que la fonction f soit lipschitzienne :

— Pour $\mathcal{P}$: on a :

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= |t \sin(x) - t \sin(y)| \\ &= |t| |\sin(x) - \sin(y)| \\ &= t |\cos(c)| |x - y| \end{aligned}$$

avec c une valeur comprise entre x et y d'après le théorème des accroissements finis :

Pour $f(x) = \sin(x)$, il existe c entre x et y tel que :

$$f'(c) = \cos(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y}$$

Donc $\forall t \in [0, T]$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq t |\cos(c)| |x - y| \leq T |x - y| \quad \forall x, y$$

Conclusion : f est lipschitzienne de constante T donc le problème est stable.

Le schéma d'Euler utilisé est stable et consistant donc c'est un schéma convergent.

— Pour $\mathcal{S}$

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |t^2 + x + 1 - t^2 - y - 1| = |x - y|$$

Conclusion : f est lipschitzienne de constante 1 donc le problème est stable.

Le schéma d'Euler utilisé est stable et consistant donc c'est un schéma convergent.

3.5 Méthodes de Runge-Kutta explicites

Ce sont des méthodes explicites qui utilisent des méthodes de quadrature pour approcher

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds$$

En posant

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds \approx \sum_{k=0}^N \omega_k f(\alpha_k, x(\alpha_k))$$

Chaque choix des poids ω_k et des points α_k donne un schéma de résolution du problème de Cauchy (3.2.1) différent.

Une méthode générale de Runge-Kutta peut être écrite sous forme d'équations successives :

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, x_n), \quad (c_1 = 0) \\
k_2 &= f(t_n + c_2 h, x_n + h a_{21} k_1), \\
k_3 &= f(t_n + c_3 h, x_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)), \\
&\vdots \\
k_s &= f(t_n + c_s h, x_n + h(a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1})).
\end{aligned}$$

et

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

Remarque 3.5.1 Dans certains livres les équations ci-dessus peuvent avoir des définitions différentes mais équivalentes.

Pour spécifier une méthode particulière, il faut donner le nombre des étapes s , les coefficients a_{ij} (pour $1 \leq j < i \leq s$), les b_i (pour $i = 1, 2, \dots, s$) et les c_i (pour $i = 2, 3, \dots, s$). La matrice (a_{ij}) est appelée matrice de Runge-Kutta, tandis que les b_i et c_i sont appelées poids et noeuds.

Ces données sont généralement organisées dans un tableau, appelé tableau de **Butcher** (d'après John C. Butcher) :

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
c_2 & a_{21} & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & \\
\vdots & \vdots & & \ddots \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} \\
\hline
& b_1 & b_2 & \dots & b_s \\
& c_1 = 0 & & &
\end{array}$$

Exemple 3.5.2 Par exemple pour la méthode d'Euler explicite :

$$\begin{array}{c|c}
0 & \\
\hline
& 1
\end{array}$$

Pour le schéma du point milieu :

$$\begin{array}{c|c}
0 & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
& 0 \quad 1
\end{array}$$

On a

$$s = 2 \text{ et } c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{21} = \frac{1}{2}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1$$

et

$$x_{n+1} = x_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2)$$

avec

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n), \\ k_2 &= f(t_n + c_2 h, x_n + h(a_{21} k_1)), \end{aligned}$$

On trouve finalement

$$x_{n+1} = x_n + h f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)).$$

La méthode de Runge-Kutta la plus connue est RK4 utilise le tableau suivant :

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Proposition 3.5.3 (Critères de consistance de Runge-kutta)

1. Un schéma de RK est consistant d'ordre au moins 1 avec le problème de Cauchy (3.2.1) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1$$

2. Ce schéma est consistant d'ordre au moins 2 avec le problème de Cauchy (3.2.1) si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2} \text{ et } \sum_{i=1}^s b_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = \frac{1}{2}$$

Remarque 3.5.4

1. Dans la pratique pour que les méthodes d'intégrations à chaque ligne sont d'ordre au moins 1 on impose :

$$\sum_j j = 1i - 1a_{ij} = c_i \text{ et } \sum_{i=1}^s b_i = 1.$$

Ainsi le schéma de RK est consistant d'ordre au moins 2 avec le problème de Cauchy (3.2.1) si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}$$

2. Pour démontrer les relations précédentes il suffit d'utiliser la proposition (3.4.12) et comparer

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial h^{p-1}} \Phi(t, x, 0) \text{ et } \frac{1}{p} D^{p-1} f(t, x)$$

3. On peut montrer grâce à la proposition (3.4.12) que pour qu'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 soit en fait d'ordre 3 il faut et il suffit que :

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \text{ et } \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}.$$

Exercice 3.5.5 Construire un schéma de RK d'ordre 3.

Solution 3.5.6 Le tableau de Butcher pour $s = 3$ est :

0			
c_2	a_{21}		
c_3	a_{31}	a_{32}	
	b_1	b_2	b_3

Pour que les méthodes d'intégrations à chaque ligne soient d'ordre au moins 1 on impose :

$$\sum_j j = 1i - 1a_{ij} = c_i \text{ et } \sum_{i=1}^s b_i = 1.$$

Donc :

$$a_{21} = c_2, \quad a_{31} + a_{32} = c_3.$$

et

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

La deuxième condition de consistance $\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}$, donne (avec $c_1 = 0$) :

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}$$

La troisième condition $\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$ donne :

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}$$

Et la quatrième condition $\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$ donne

$$b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}$$

i ne prend que la valeur 3 (car $i = 1$ est impossible on n' a pas a_{1j} . $i = 2$ corresponds à a_{21} et c_1 qui est nul). Finalement on doit résoudre le système :

$$a_{21} = c_2$$

$$a_{31} + a_{32} = c_3$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}$$

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}$$

$$b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}$$

Le système admet plusieurs solutions. Quelques solutions possible :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ \hline \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Proposition 3.5.7 (Critères de stabilité de Runge-Kutta) Tous les schémas du type Runge-Kutta explicites sont stables dès que f est continue et globalement lipschitzienne par rapport à sa variable x sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

Remarque 3.5.8 En particulier le schéma RK4 est convergent d'ordre 4. C'est le schéma le plus communément utilisé. Il est à la base du solveur ODE45 de Matlab.

3.6 Problèmes raides

Une équation différentielle **raide** est une équation différentielle dont la sensibilité aux paramètres va rendre difficile la résolution par des méthodes numériques explicites. Lorsque on applique un schéma explicite à pas adaptatif à certains problèmes dont la solution présente des problèmes raides. On obtient des oscillations qui influencent sur la vitesse de convergence et mènent souvent à la divergence du schéma. Pour caractériser les problèmes raides rappelons que l'erreur d'un schéma explicite stable et d'ordre au moins p si (voir la proposition (3.4.11)) :

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|x(t_n) - x_n\| \leq MKh^p.$$

Où K est la constante de consistance, et $M = e^{LT}$ la constante de stabilité, et L la constante de Lipschitz de f . Ainsi, lorsque la valeur de L devient grande, la valeur de M devient grande exponentiellement, et donc la valeur prise par h doit être très petite pour garder une précision initialement donnée. A cause de ça, on introduit une autre notion de stabilité qui teste le schéma sur les différentes valeurs possibles de L .

Test Linéaire Standard

Cette notion est basée sur ce que l'on appelle l'équation Test Linéaire Standard (ou TLS). Ce test est défini par le système suivant

$$\begin{cases} x'(t) = -Lx(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Où $L > 0$.

— La solution exacte est

$$x(t) = x_0 e^{-Lt}.$$

— Elle vaut x_0 pour $t = 0$ et tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

- La constante de Lipschitz du problème (TLS) est L . En effet, si l'on pose $f(t, x) = -Lx$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, alors pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |-Lx + Ly| = L|x - y|.$$

A-Stabilité

Définition 3.6.1 (Schéma A-Stable) On dit qu'un schéma est A-Stable si et seulement si ce schéma appliqué au problème (TLS) donne une solution x_n vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ quel que soit $L > 0$, et quel que soit le pas de temps constant h . On dit aussi que le schéma est inconditionnellement stable.

Remarque 3.6.2 1. Un schéma est A-Stable est un schéma qui peut traiter les problèmes de n'importe quelle raideur sans condition sur le pas de temps.

2. La stabilité d'un schéma décrit la façon dont les erreurs s'accumulent sur un intervalle de temps borné $[t_0, t_0 + T]$ tandis que la A-stabilité décrit la façon dont les erreurs faussent le comportement de la solution pour $t \rightarrow \infty$.

Les schémas de Runge-Kutta explicites ont des conditions sur le pas temps dépendant de la raideur du problème. Ils ne sont pas A-Stable. A cause de cela, on va introduire d'autres schémas A-Stable (mais plus difficiles à programmer). Le simple est : Euler implicite.

3.7 Schémas implicite

Le schéma d'Euler implicite

Reprenons le problème de Cauchy (3.2.1) au point $t \in [t_0, t_0 + T]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Et intégrons l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} . On obtient pour $n = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s) ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds$$

Donc

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds$$

Approchons maintenant l'intégrale du second membre par la méthode des rectangles à droite :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds \approx f(t_{n+1}, x(t_{n+1})) \cdot (t_{n+1} - t_n) = f(t_n, x(t_n)) \cdot h$$

On obtient

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) \approx f(t_{n+1}, x(t_{n+1})) \cdot h$$

Approchons $x(t_n)$ par x_n pour $n = 0, \dots, N - 1$. On trouve **le schéma d'Euler implicite** :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}), \text{ pour } n = 0, \dots, N - 1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Cette dernière relation nécessite de résoudre une équation pour déterminer x_{n+1} d'où son nom de méthode implicite.

Exercice 3.7.1 L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{1+t^2}.$$

Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la concentration est $x(0) = 5$, déterminer la concentration à $t = 2$ à l'aide de la méthode d'Euler implicite avec un pas $h = 0.5$.

Solution 3.7.2

On a $f(t, x) = -\frac{x(t)}{1+t^2}$ donc le schéma d'Euler implicite est donné par le système :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_{n+1}) = x_n - h \frac{x_{n+1}}{1+t_n^2} & n = 0, \dots, N - 1 \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

On trouve

$$x_{n+1} \left(1 + \frac{h}{1+t_n^2}\right) = x_n$$

Qu'on peut écrire :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + \frac{h}{1+t_n^2}}$$

A l'instant $t = 0$ la concentration est $x_0 = 5$, et comme $h = 1/2$, alors $t_n = nh = n/2$ donc pour $n \geq 1$ l'équation (3.7.2) donne :

$$x_{n+1} = \frac{4 + (n+1)^2}{6 + (n+1)^2} x_n$$

$t = 2$ correspond à $n = 4$, on obtient donc

n	t_n	x_n
0	0	$x_0 = 5$
1	0.5	$x_1 = \frac{25}{7} \approx 3.57$
2	1.0	$x_2 = \frac{20}{7} \approx 2.86$
3	1.5	$x_3 = \frac{52}{21} \approx 2.48$
4	2.0	$x_4 = \frac{520}{231} \approx 2.25$

La concentration à $t = 2$ est d'environ 2.25.

Schémas de Runge-Kutta implicite

Définition 3.7.3 Un schéma de Runge-Kutta implicite à s -stages est décrit par le tableau de Butcher suivant

c_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	$a_{1,s-1}$	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	$a_{2,s-1}$	a_{2s}
c_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\dots$	$a_{3,s-1}$	a_{3s}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
c_{s-1}	$a_{s-1,1}$	$a_{s-1,2}$	$a_{s-1,3}$	$\dots$	$a_{s-1,s-1}$	$a_{s-1,s}$
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$a_{s,3}$	$\dots$	$a_{s,s-1}$	$a_{s,s}$
	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_{s-1}	b_s

Exemple 3.7.4 Le schéma représenté par

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

est le schéma d'Euler implicite.

Proposition 3.7.5 Les schémas de RK implicite à s -étapes sont A-Stables.

La convergence pour les schémas de Runge-Kutta implicites se définit comme pour les schémas explicites.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq n \leq N} \|x(t_n) - x_n\| = 0$$

Les conditions sur l'ordre de consistance sont les mêmes à savoir :

1. Ce schéma est consistant d'ordre au moins 1 avec le problème de Cauchy (3.2.1) si et seulement si

$$\sum_{n=1}^s b_i = 1.$$

2. Ce schéma est consistant d'ordre au moins 2 avec le problème de Cauchy (3.2.1) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2} \text{ et } \sum_{i=1}^s b_i \sum_{j=1}^s a_{ij} = \frac{1}{2}$$

Mais la matrice constituée des a_{ij} n'est plus strictement triangulaire inférieure. La convergence est toujours vraie pour les méthodes de Runge-Kutta implicites dès qu'elles sont consistantes et que f vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz global.

Résolution des itérations des schémas implicites

Les schémas implicites définissent à chaque itération une équation qu'il faut résoudre pour trouver x_{n+1} . Par exemple pour Euler implicite on a

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$$

Donc x_{n+1} est un point fixe de la fonction G définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$G(x) = x_n + hf(t_{n+1}, x)$$

Exercice 3.7.6 (A-Stabilité d'Euler implicite)

Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T]. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1. Retrouver le schéma d'Euler implicite en utilisant une approximation de la dérivée.
2. Est ce que le schéma d'Euler implicite à pas constant est A-stable ?

Solution 3.7.7

1. pour $n \geq 1$ on approche

$$x'(t_n) = f(t_n, x(t_n))$$

par

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = f(t_n, x_n)$$

c'est à dire

$$x_n = x_{n-1} + hf(t_n, x_n)$$

Qu'on peut écrire :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$$

Pour tout $n \geq 0$ et x_0 donné.

2. Appliqué au (TLS) on trouve :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - hLx_{n+1} & n \in \mathbb{N} \\ x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1 + hL)x_{n+1} = x_n \implies x_{n+1} = \frac{1}{1 + hL}x_n$$

ce qui implique

$$x_n = \left(\frac{1}{1 + hL}\right)^n x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or $\forall h \geq 0$ et $L > 0$ on $\frac{1}{1 + hL} < 1$ donc $x_n \rightarrow 0$.

Euler implicite est donc A-Stable.

Exercice 3.7.8 (Schéma du trapèze (Crank-Nicolson)) Soit $L > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème (TLS) :

$$\begin{cases} x'(t) = -Lx(t), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Écrire le schéma du trapèze (Crank-Nicolson) permettant de calculer x_{n+1} à partir de x_n .
2. Étudier la A-Stabilité du schéma.
3. À partir du schéma du trapèze, en déduire le schéma de Heun, est-il A-Stable ?

Solution 3.7.9

1. Si nous intégrons l'EDO $x'(t) = f(t, x(t))$ entre t_n et t_{n+1} nous obtenons

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt$$

On utilise la formule du trapèze :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx \frac{h}{2} (f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x_{n+1})).$$

Soit x_n l'approximation de $x(t_n)$. On obtient le schéma du trapèze ou de Crank-Nicolson

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})), & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 = x(t_0), \end{cases}$$

Il s'agit d'un schéma implicite car il ne permet pas d'écrire directement x_{n+1} en fonction de x_n lorsque la fonction f n'est pas triviale.

2. En appliquant le schéma du trapèze au problème (TLS) on obtient la suite définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (-Lx_n - Lx_{n+1}) \\ x_0 = x(t_0), \end{cases}$$

Donc

$$x_{n+1}(1 + \frac{h}{2}L) = x_n(1 - \frac{h}{2}L) \implies x_{n+1} = \frac{1 - \frac{h}{2}L}{1 + \frac{h}{2}L} x_n = \frac{2 - hL}{2 + hL} x_n$$

On trouve finalement

$$x_n = \left(\frac{2 - Lh}{2 + Lh} \right)^n x_0$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ si et seulement si $|\frac{2 - Lh}{2 + Lh}| < 1$.

Notons x le produit $ah > 0$ et q la fonction $q(x) = \frac{2 - x}{2 + x} = 1 - 2\frac{x}{2 + x}$.

Nous avons $0 < \frac{x}{2 + x} < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc $|q(x)| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ pour tout $h > 0$, et le schéma est A-Stable.

3. Pour éviter le calcul implicite de x_{n+1} dans le schéma du trapèze, nous pouvons utiliser une prédiction d'Euler explicite et remplacer le x_{n+1} dans le terme $f(t_{n+1}, x_{n+1})$ par

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n).$$

On trouve ainsi le schéma de Heun :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n))] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

En appliquant le schéma de Heun au TLS, on obtient la suite suivante :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} [-Lx_n + f(t_n + h, x_n - hLx_n)]$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} [-Lx_n - L(x_n - hLx_n)]$$

$$x_{n+1} = (1 - Lh + \frac{(Lh)^2}{2})x_n.$$

Donc

$$x_n = (1 - Lh + \frac{(Lh)^2}{2})^n x_0.$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ si et seulement si

$$|1 - Lh + \frac{(Lh)^2}{2}| < 1.$$

Notons x le produit Lh ($x > 0$) et $p(x)$ le polynôme $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Nous avons $|p(x)| < 1$ si et seulement si $x < 2$. En effet

$$\begin{aligned} |p(x)| < 1 &\iff \left| \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \right| < 1 \\ &\iff |x^2 - 2x + 2| < 2 \text{ (comme } \Delta = -4 < 0 \text{ donc } x^2 - 2x + 2 > 0) \\ &\iff x^2 - 2x + 2 < 2 \\ &\iff x(x - 2) < 0 \text{ (comme } x > 0) \\ &\iff x - 2 < 0 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ si et seulement si $h < \frac{2}{L}$.