

SCHÉMAS NUMÉRIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

BOUCHAIB FERRAHI

2022/2023

PRÉSENTATION DU MODULE

- FILIÈRE : SMA
- SEMESTRE :S6
- INTITULÉ :SCHÉMAS NUMÉRIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES
- OBJECTIFS :
 - Comprendre les méthodes permettant la résolution numérique de quelques exemples d'équations différentielles ordinaires (EDO)
 - Maîtriser les aspects théoriques et pratiques liés à ce domaine

PRÉSENTATION DU MODULE

- PRÉ-REQUIS :
 - Cours sur les équations différentielles élémentaires (S2)
 - Cours sur les équations différentielles ordinaires (S6)
 - Cours Analyse numérique 1 (S4) (en particulier : Interpolation polynomiale, intégration numérique et dérivation numérique)

CONTACT

BOUCHAIB FERRAHI

- Département de Mathématiques - Faculté des Sciences - Tétouan
- bferrahi@uae.ac.ma et ferrahi@yahoo.com
- <http://moodle.uae.ac.ma>
- www.ferrahi.ma
- www.facebook.com/bouchaib.ferrahi
- <https://www.youtube.com/c/BouchaibFERRAHI>
- www.linkedin.com/in/ferrahi

PLAN

- 1 INTRODUCTION
- 2 RÉSOLUTION APPROCHÉE
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
- 3 PROBLÈME DE CAUCHY
- 4 SCHÉMAS EXPLICITES
- 5 CONVERGENCE DES MÉTHODES
EXPLICITES
- 6 MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA
EXPLICITES
- 7 PROBLÈMES RAIDES
- 8 SCHÉMAS IMPLICITES

INTRODUCTION

- Équations différentielles ordinaires
- Modélisation de plusieurs problèmes issus des sciences appliquées, de l'économie, des sciences sociales,....
- les solutions existent-elles ? Si oui, y a-t-il une solution unique ?
- Peut-on déterminer la solution exacte ?
SINON, PEUT-ON L'APPROCHER ?

Définition : Équation différentielle ordinaire (EDO)

Une **équation différentielle ordinaire**, notée (**EDO**), est une équation de la forme :

$$f(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = g(t).$$

L'inconnue est une fonction $t \in I \subset \mathbb{R} \rightarrow x(t)$. On appelle :

- n l'ordre de l'équation.
- g la fonction second membre de l'équation.

Si g est nulle, on dit que **l'équation est homogène**.

Définition : Équation différentielle ordinaire (EDO)

Remarque :

Définition : Équation différentielle ordinaire (EDO)

Remarque : Nous allons nous limiter aux équations différentielles du premier ordre, car une équation d'ordre $p > 1$ peut toujours se ramener à un système de p équations d'ordre 1.

Définition : Équation différentielle normale

On appelle **équation différentielle normale** d'ordre n toute équation de la forme :

$$f(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) = x^{(n)}(t)$$

Si la fonction f ne dépend pas explicitement de t , on dit qu'on a une **équation différentielle autonome** d'ordre n .

$$f(x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}) = x^{(n)}$$

Définition : Équation différentielle normale

Exemples :

Définition : Équation différentielle normale

Exemples :

$$x'(t) = x(t) + t^2 :$$

Définition : Équation différentielle normale

Exemples :

$x'(t) = x(t) + t^2$: Équation du premier ordre sous la forme normale
 $x' = x^2$:

Définition : Équation différentielle normale

Exemples :

$x'(t) = x(t) + t^2$:Équation du premier ordre sous la forme normale

$x' = x^2$:Équation du premier ordre autonome

Problème de Cauchy

Condition initiale

Une EDO admet généralement une infinité de solutions. Pour en choisir quelques-unes, on ajoute une condition initiale qui correspond à la valeur prise par la solution en un point de l'intervalle d'intégration. On écrit :

$$x(t_0) = x_0$$

Problème de Cauchy

Définition : Problème de Cauchy

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto f(t, x) \end{cases}$ une fonction donnée. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , t_0 un point de I et x_0 une valeur donnée. On appelle **problème de Cauchy** le problème :

Trouver une fonction $x : \begin{cases} I \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto x(t) \end{cases}$ telle que :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Problème de Cauchy

Solution sur un intervalle

La solution du problème de Cauchy (1) sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} vérifie donc :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Problème de Cauchy

Théorème de Cauchy Lipschitz

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée, t_0 un point de I et x_0 une valeur donnée. On suppose que f est **lipschitzienne** par rapport à sa deuxième variable x sur un voisinage de (t_0, x_0) c-à-d il existe un voisinage de (t_0, x_0) dans $I \times \mathbb{R}$ et $L > 0$ tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

Alors on a les propriétés suivantes :

Problème de Cauchy

Théorème de Cauchy Lipschitz

- 1 Existence : Il existe $T > 0$ et $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - T, t_0 + T])$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- 2 Unicité : Si y est une autre solution du problème de Cauchy ci-dessus, elle coïncide avec x sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - T, t_0 + T]$.
- 3 Régularité : Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^r, r \geq 1$, alors x est de classe \mathcal{C}^{r+1} .

Problème de Cauchy

Fonction localement lipschitzienne

Si f est de classe C^1 alors elle est localement lipschitzienne.

Problème de Cauchy

Existence et unicité globale

Avec les notations du théorème précédent. Si f est globalement lipschitzienne par rapport à x . Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une fonction unique $x \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ solution de (1).

Schémas explicites

Vers une solution approchée

Nous supposerons dans toute la suite que la fonction $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et globalement lipschitzienne sur l'ensemble étudié ce qui impliquera l'existence globale et l'unicité des solutions.

L'objectif est de calculer de façon approchée la solution du problème de Cauchy (1).

On commence par définir une subdivision régulière de l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$ en $N \in \mathbb{N}^*$ sous intervalles.

Schémas explicites

Discrétisation

On pose $h = \frac{T}{N}$ le pas de la discrétisation, $t_i = t_0 + ih$, de telle sorte que $t_{i+1} - t_i = h$. Les points t_i obtenus :

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = t_0 + T,$$



Notre objectif est de calculer une solution approchée de $x(t_i)$ la solution exacte aux points t_i , on la notera x_i . On a donc $x_i \approx x(t_i)$.

Schémas explicites

Le schéma d'Euler progressif ou explicite

Écrivons le problème de Cauchy (1) à l'instant $t \in [t_0, t_0 + T]$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Intégrons l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} . Nous avons ainsi, pour tout $n = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s) ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds$$

Schémas explicites

Le schéma d'Euler progressif ou explicite

On trouve

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds \quad (2)$$

Approchons maintenant l'intégrale du second membre par la méthode du rectangle à gauche :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds \approx f(t_n, x(t_n)) \cdot (t_{n+1} - t_n) = f(t_n, x(t_n)) \cdot h$$

Schémas explicites

Le schéma d'Euler progressif ou explicite

On remplace dans (2) on trouve : $x(t_{n+1}) - x(t_n) \approx f(t_n, x(t_n)).h$
Approchons $x(t_n)$ par x_n pour $n = 0, \dots, N - 1$. On trouve finalement :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), & \text{pour } n = 0, \dots, N - 1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

C'est le schéma **d'Euler progressif ou explicite**. C'est un schéma à un pas car x_{n+1} est défini seulement à partir du pas précédent x_n .

Schémas d'Euler

Un autre schéma d'Euler

L'utilisation de la méthode du **rectangle à droite** conduit au schéma suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}), & \text{pour } n = 0, \dots, N - 1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

C'est le schéma **d'Euler rétrograde ou implicite**. C'est aussi un schéma à un pas mais qui nécessite un calcul supplémentaire pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n .

Schémas d'Euler

Remarque

Les méthodes implicites demandent un calcul supplémentaire mais sont plus adaptées à quelques types d'EDO (raides). A titre d'exemple, soit le problème de Cauchy :

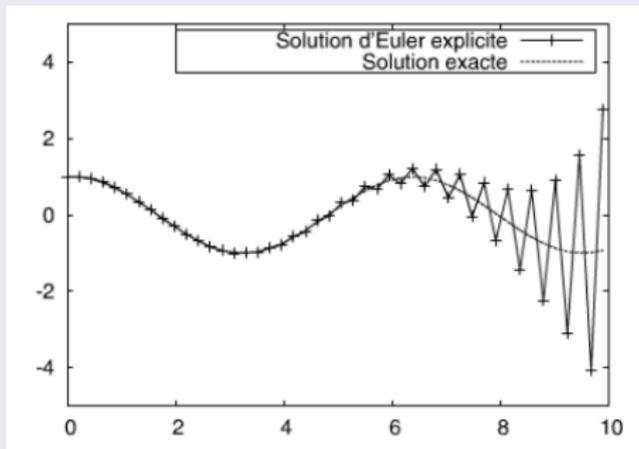
$$\begin{cases} x'(t) = 10(-x(t) + \cos(t)) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Nous donnons les représentations graphiques des solutions approchées fournies par les deux méthodes d'Euler en comparaison avec la solution exacte (déterminée explicitement)

Schémas d'Euler

Remarque

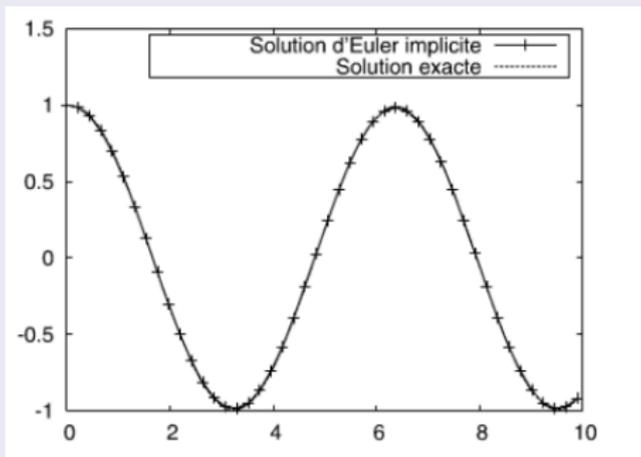
Euler explicite $h = 0.2$



Schémas d'Euler

Remarque

Euler implicite $h = 0.2$



Schémas explicites

Le schéma du point milieu

On approche l'intégrale dans l'équation (2) par la méthode du rectangle au point milieu de chaque intervalle $[t_n, t_{n+1}]$. On trouve :

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds \approx f\left(t_n + \frac{h}{2}, x\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) \cdot (t_{n+1} - t_n)$$

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) \approx h \cdot f\left(t_n + \frac{h}{2}, x\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right)$$

Schémas explicites

Le schéma du point milieu

à cette étape on connaît uniquement la valeur de x_n , et pour donner une approximation de la solution au point $t_n + \frac{h}{2}$ on utilise le schéma d'Euler explicite :

$$x\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \approx x(t_n) + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)$$

Approchons $x(t_n)$ par x_n pour $n = 0, \dots, N - 1$. On trouve

Schémas explicites

Le schéma du point milieu

Le schéma du point milieu :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)\right), \text{ Pour } n = 0, \dots, N - 1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Schémas numériques

un autre exemple du schéma du point milieu

Nous pouvons utiliser la modification suivante. On intègre l'équation différentielle sur l'intervalle $[t_n, t_{n+2}]$ et on utilise la méthode du rectangle au point milieu pour approcher l'intégrale à droit, pour obtenir :

$$x(t_{n+2}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+2}} f(s, x(s)) ds \approx f(t_{n+1}, x(t_{n+1})) \cdot (t_{n+1} - t_n)$$

$$x(t_{n+2}) \approx x(t_n) + 2hf(t_{n+1}, x(t_{n+1}))$$

Schémas numériques

un autre exemple du schéma du point milieu

Le nouveau schéma s'écrit :

$$x_{n+2} \approx x_n + 2hf(t_{n+1}, x_{n+1}) \quad n = 0, 3, \dots, N - 2$$

Remarquons que, contrairement au schéma précédent, celui la est un schéma à **deux pas** (x_{n+2} est calculer à partir de x_{n+1} et x_n) et que ce schéma demande deux valeurs initiales.

Schémas explicites

Le schéma de Heun

On approche l'intégrale dans l'équation (2) par la méthode du trapèze. On trouve :

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt$$

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) \approx \frac{h}{2} \left[f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x(t_{n+1})) \right]$$

Comme auparavant $x_n \approx x(t_n)$. L'inconnu $x(t_{n+1})$ est approché en utilisant la méthode d'Euler. Ainsi, $x(t_{n+1}) \approx x_n + hf(t_n, x_n)$.

Schémas explicites

Le schéma de Heun

On trouve finalement : **Le schéma de Heun** :

Pour $n = 0, \dots, N - 1$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \left[f(t_n, x_n) + f(t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n)) \right], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Schémas explicites

Autres exemples

On peut utiliser la méthode de Simpson ou d'autres quadratures d'intégration.

Schémas explicites

Différences finies

On a :

$$\begin{aligned}x'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}\end{aligned}$$

Schémas explicites

Différences finies

Pour une très petite valeur de h , nous pouvons considérer les approximations suivantes :

$$x'(t) \simeq \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Schémas explicites

Différences finies

Pour une très petite valeur de h , nous pouvons considérer les approximations suivantes :

$$x'(t) \simeq \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Schéma d'Euler explicite.

Schémas explicites

Différences finies

$$x'(t) \simeq \frac{x(t) - x(t - h)}{h}$$

Schémas explicites

Différences finies

$$x'(t) \simeq \frac{x(t) - x(t - h)}{h}$$

Schéma d'Euler implicite.

Schémas explicites

Différences finies

$$x'(t) \simeq \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}$$

Schémas explicites

Différences finies

$$x'(t) \simeq \frac{x(t+h) - x(t-h)}{2h}$$

Schéma leapfrog (saute-mouton).

$$x_{n+1} = x_{n-1} + 2hf(t_n, x_n) \quad x(0) = x_0 \quad n = 1, \dots,$$

Schémas explicites

Schémas explicites à un pas

Un schéma explicite à un pas approchant la solution du problème de Cauchy (1) est un schéma qui s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), & \text{pour } n = 0, \dots, N - 1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3)$$

Où la fonction Φ sera à définir suivant le schéma choisi.

Exemples

- Pour le schéma d'Euler explicite on a :

$$\Phi(t, x, h) = f(t, x)$$

- Pour le schéma du point milieu on a :

$$\Phi(t, x, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t, x)\right),$$

- Pour le schéma de Heun on a :

$$\Phi(t, x, h) = \frac{1}{2} \left[f(t, x) + f\left(t + h, x + hf(t, x)\right) \right]$$

Convergence des méthodes explicites

Notions

Nous allons voir les conditions pour que la solution approchée converge vers la solution exacte quand $h \rightarrow 0$, c'est à dire quand la discrétisation devient très fine. Nous allons introduire trois notions fondamentales :

- la **consistance**,

Convergence des méthodes explicites

Notions

Nous allons voir les conditions pour que la solution approchée converge vers la solution exacte quand $h \rightarrow 0$, c'est à dire quand la discrétisation devient très fine. Nous allons introduire trois notions fondamentales :

- la **consistance**,
- la **stabilité**,

Convergence des méthodes explicites

Notions

Nous allons voir les conditions pour que la solution approchée converge vers la solution exacte quand $h \rightarrow 0$, c'est à dire quand la discrétisation devient très fine. Nous allons introduire trois notions fondamentales :

- la **consistance**,
- la **stabilité**,
- la **convergence**.

Quand un système est convergent, il nous reste à savoir à quel vitesse il converge. On introduira la notion d'**ordre**.

Plus l'ordre est élevé, plus le schéma converge rapidement vers la solution exacte.

Convergence des méthodes explicites

Consistance

Pour un schéma explicite à un pas :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), & \text{pour } n = 0, \dots, N-1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (4)$$

On définit l'**erreur de consistance**, et on la note τ_n , le nombre réel définit par :

$$\tau_{n+1}(h) = x(t_{n+1}) - x(t_n) - h\Phi(t_n, x(t_n), h), \text{ pour tout } n = 0, \dots, N-1.$$

Convergence des méthodes explicites

Consistance

Remarquons que pour tout $n = 0, \dots, N - 1$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\Phi(t_n, x(t_n), h) + h\tau_{n+1}$$

Ainsi l'erreur de consistance d'un schéma explicite est le terme restant lorsque l'on injecte la solution exacte dans le schéma.

Convergence des méthodes explicites

Consistance

Schéma consistant. On dit que le schéma explicite à un pas (3) est consistant avec le problème de Cauchy (1) si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N |\tau_n(h)| = 0.$$

Convergence des méthodes explicites

Consistance

Critère de consistance. Le schéma explicite à un pas (3) est consistant avec le problème de Cauchy (1) si et seulement si

$$\Phi(t, x, 0) = f(t, x).$$

Convergence des méthodes explicites

Consistance

Exemples.

- Le schéma d'Euler explicite

Convergence des méthodes explicites

Consistance

Exemples.

- Le schéma d'Euler explicite est consistant car :

$$\Phi(t, x, h) = f(t, x) \implies \Phi(t, x, 0) = f(t, x).$$

- Le schéma du point milieu

Convergence des méthodes explicites

Consistance

Exemples.

- Le schéma d'Euler explicite est consistant car :

$$\Phi(t, x, h) = f(t, x) \implies \Phi(t, x, 0) = f(t, x).$$

- Le schéma du point milieu est consistant car :

$$\Phi(t, x, h) = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t, x)\right) \implies \Phi(t, x, 0) = f(t, x).$$

Convergence des méthodes explicites

Consistance

Exemples.

- Le schéma de Heun

Convergence des méthodes explicites

Consistance

Exemples.

- Le schéma de Heun est consistant car :

$$\Phi(t, x, h) = \frac{1}{2} \left[f(t, x) + f(t + h, x + hf(t, x)) \right]$$

$$\implies \Phi(t, x, 0) = \frac{1}{2} \left[f(t, x) + f(t, x) \right] = f(t, x).$$

Convergence des méthodes explicites

Consistance

Ordre de consistance. On dit que le schéma explicite à un pas (3) est consistant d'ordre p avec le problème de Cauchy (1), s'il existe un réel $K > 0$ tel

$$\sum_{n=1}^N |\tau_n(h)| \leq Kh^p.$$

Convergence des méthodes explicites

Stabilité

La notion de stabilité s'applique à des schémas, pour lesquels on calcule des solutions de façon itérative. Les calculs s'effectuent sur des ordinateurs avec une précision finie, et donc sont sujet à des erreurs d'arrondis. Lors d'un calcul itératif, ces erreurs peuvent être amplifiées par le schéma numérique. Le but de l'étude de stabilité est donc de déterminer quelle est l'amplification des erreurs (ou perturbations) par le schéma.

Convergence des méthodes explicites

Stabilité

La notion de stabilité s'applique à des schémas, pour lesquels on calcule des solutions de façon itérative. Les calculs s'effectuent sur des ordinateurs avec une précision finie, et donc sont sujet à des erreurs d'arrondis. Lors d'un calcul itératif, ces erreurs peuvent être amplifiées par le schéma numérique. Le but de l'étude de stabilité est donc de déterminer quelle est l'amplification des erreurs (ou perturbations) par le schéma.

En d'autres termes, les valeurs de x_n qu'on calcule sont remplacées par des valeurs voisines \tilde{x}_n pour deux raisons :

Convergence des méthodes explicites

Stabilité

① Erreurs d'arrondi :

Convergence des méthodes explicites

Stabilité

- 1 **Erreurs d'arrondi** : on représente en machine la valeur x_n issue du calcul par un nombre décimal à t chiffres significatifs et donc : $|x_n - \tilde{x}_n|$, est alors l'erreur d'arrondi majorée en valeur relative par $10^{-t}x_n$.

Convergence des méthodes explicites

Stabilité

- 1 **Erreurs d'arrondi** : on représente en machine la valeur x_n issue du calcul par un nombre décimal à t chiffres significatifs et donc : $|x_n - \tilde{x}_n|$, est alors l'erreur d'arrondi majorée en valeur relative par $10^{-t}x_n$.
- 2 **Incertitude expérimentale** :

Convergence des méthodes explicites

Stabilité

- 1 **Erreurs d'arrondi** : on représente en machine la valeur x_n issue du calcul par un nombre décimal à t chiffres significatifs et donc : $|x_n - \tilde{x}_n|$, est alors l'erreur d'arrondi majorée en valeur relative par $10^{-t}x_n$.
- 2 **Incertitude expérimentale** : Dans la plupart des problèmes concrets la valeur de x_0 est remplacée par une valeur \tilde{x}_0 tirée d'une expérience, d'une hypothèse etc : $|x_0 - \tilde{x}_0|$ est donc majorée par un nombre qui dépend de la précision expérimentale.

Convergence des méthodes explicites

Stabilité

La méthode ne peut donc être utile que si la perturbation sur $|x_N - \tilde{x}_N|$ provoquée par une faible perturbation $|x_0 - \tilde{x}_0|$ des données initiales et par les erreurs d'arrondi sur les termes \tilde{x}_n antérieurs est faible.

Convergence des méthodes explicites

Stabilité

Schéma stable : On dit que le schéma explicite à un pas (3) est stable s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que : quelle que soient les suites, définies par récurrence par les formules :

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot \Phi(t_n, x_n, h)$$

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + h \cdot \Phi(t_n, \tilde{x}_n, h) + \varepsilon_n$$

On a :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |x_n - \tilde{x}_n| \leq M(|x_0 - \tilde{x}_0| + \sum_{n=1}^N |\varepsilon_n|)$$

Convergence des méthodes explicites

Stabilité

Convergence des méthodes explicites

Stabilité

Autrement dit, si les erreurs d'approximation à chaque pas de temps ne sont pas très grandes, l'erreur pour la solution approchée au pas suivant reste maîtrisée.

Convergence des méthodes explicites

Stabilité

Critère de stabilité : S'il existe un réel $L > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $h \leq T$,

$$\|\Phi(t, x, h) - \Phi(t, y, h)\| \leq L\|x - y\|,$$

alors le schéma explicite à un pas (3) est stable et $M = e^{LT}$.

Nous pouvons enfin introduire la troisième et dernière notion fondamentale : la notion de convergence.

Convergence des méthodes explicites

Convergence

On dit que le schéma explicite à un pas (3) est convergent vers la solution du problème de Cauchy (1) si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| = 0$$

Le théorème suivant permet de relier les trois notions.

Convergence des méthodes explicites

Convergence

Théorème de Lax. Si le schéma explicite à un pas (3) est stable et consistant avec le problème de Cauchy (1), alors il converge vers la solution du problème de Cauchy (1).

Convergence des méthodes explicites

Convergence

Ordre de convergence. Si le schéma explicite à un pas (3) est stable et consistant d'ordre p avec le problème de Cauchy (1), alors

$$\max_{1 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| \leq MKh^p$$

On dit alors qu'il est convergent d'ordre p .

Convergence des méthodes explicites

Convergence

Ordre de convergence : Critères. Pour toute fonction f de classe C^p , le schéma explicite à un pas (3) est consistant d'ordre au moins p avec le problème de Cauchy (1) si :

$$\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \Phi(t, x, 0) = \frac{1}{2} Df(t, x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) + f(t, x) \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \right]$$

\vdots

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial h^{p-1}} \Phi(t, x, 0) = \frac{1}{p} D^{p-1} f(t, x) = \frac{1}{p} D[D^{p-2} f(t, x)].$$

Convergence des méthodes explicites

Exercice

Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (5)$$

Convergence des méthodes explicites

Exercice

- 1 Montrer que le schéma d'Euler explicite à pas de temps constant pour résoudre (5) est consistant et stable.
- 2 Calculer la différentielle première et seconde de f .
- 3 En déduire l'ordre de convergence du schéma de Euler.

Convergence des méthodes explicites

Exercice

- 1 Avec les notation de la définition (3), pour le schéma d'Euler explicite on a $\Phi(t, x, h) = f(t, x)$. Donc Euler explicite est consistant.

Puisque f est lipschitzienne alors on a :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

et donc $|\Phi(t, x, h) - \Phi(t, y, h)| \leq L|x - y|$
ainsi le schéma est stable

Conclusion : le schéma d'Euler est stable et consistant donc c'est un schéma convergeant .

Convergence des méthodes explicites

Exercice

2 On a $x'(t) = f(t, x(t))$, donc la différentielle de f est donnée en (t, x) par :

$$\begin{aligned} Df(t, x) &= \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + x'(t) \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + f(t, x) \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \end{aligned}$$

Convergence des méthodes explicites

Exercice

De même la différentielle seconde de f est donnée en (t, x) par :

$$\begin{aligned}
 D^2f &= D[Df] = \frac{\partial}{\partial t} Df + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} Df \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} Df + f \frac{\partial}{\partial x} Df = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right) + f \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + f \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
 &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} + f \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + f^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.
 \end{aligned}$$

Convergence des méthodes explicites

Exercice

3 On a

$$\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, x, 0) = 0 \neq \frac{1}{2} Df(t, x)$$

donc le schéma d'Euler explicite est d'ordre 1.

Convergence des méthodes explicites

Exercice

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, on considère les deux problèmes :

$$\mathcal{P} \begin{cases} x'(t) = t \sin(x), & t \in [0, T], \\ x(0) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

et

$$\mathcal{S} \begin{cases} x'(t) = t^2 + x + 1, & t \in [1, T], \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

Convergence des méthodes explicites

Exercice

1. Donner le schéma d'Euler explicite en prenant un pas de temps constant.
2. Calculer les 2 premières itérations en prenant comme pas de temps $h = 0.1$.
3. Est-ce que ce schéma converge vers chacune des solutions de ces problèmes ?

Convergence des méthodes explicites

Exercice

1. Le schéma d'Euler :

- Pour \mathcal{P} on a $f(t_n, x_n) = t_n \sin(x_n)$ donc :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n) = x_n + h \cdot t_n \cdot \sin(x_n) \\ x_0 &= \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Pour \mathcal{S} on a $f(t_n, x_n) = t_n^2 + x_n + 1$ donc :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + h \cdot (t_n^2 + x_n + 1) \\ x_0 &= 1 \end{cases}$$

Convergence des méthodes explicites

Exercice

2. Les 2 premières itérations x_1 et x_2

- Pour \mathcal{P} on a $h = 0.1$, $t_0 = 0$ et $t_1 = t_0 + h = 0.1$. On trouve :

$$x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + h \times t_0 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \simeq 1.57$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 0.1 \times t_1 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 0.1 \times 0.1 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + 0.01 \simeq 1.58$$

Convergence des méthodes explicites

Exercice

2. Les 2 premières itérations x_1 et x_2

- Pour \mathcal{S} on a $h = 0.1$, $t_0 = 1$ et $t_1 = t_0 + h = 1.1$. On trouve :

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1 + 0.1(t_0^2 + 1 + 1) = 1 + 0.1(1^2 + 2) = 1.3$$

$$x_2 = 1.3 + 0.1(t_1^2 + 1.3 + 1) = 1.3 + 0.1((1.1)^2 + 2.3) = 1.651$$

Convergence des méthodes explicites

Exercice

3. **Convergence** : Le schéma d'Euler progressif est **consistant** avec n'importe quel problème de Cauchy, car $\Phi(t, x, h) = f(t, x)$. Pour la stabilité il faut que la fonction f soit lipschitzienne :
- Pour \mathcal{P} : on a :

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= |t \sin(x) - t \sin(y)| \\ &= |t| |\sin(x) - \sin(y)| \\ &= t |\cos(c)| |x - y| \end{aligned}$$

Convergence des méthodes explicites

Exercice

avec c comprise entre x et y d'après le théorème des AF :
Pour $f(x) = \sin(x)$, il existe c entre x et y tel que :

$$f'(c) = \cos(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y}$$

Donc $\forall t \in [0, T]$

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq t |\cos(c)| |x - y| \leq T |x - y| \quad \forall x, y$$

f est lipschitzienne de constante T donc le problème est stable.

Le schéma d'Euler utilisé est stable et consistant donc c'est un schéma convergent.

Convergence des méthodes explicites

Exercice

- Pour \mathcal{S}

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |t^2 + x + 1 - t^2 - y - 1| = |x - y|$$

Conclusion : f est lipschitzienne de constante 1 donc le problème est stable.

Le schéma d'Euler utilisé est stable et consistant donc c'est un schéma convergent.

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Définition

Ce sont des méthodes explicites qui utilisent des méthodes de quadrature pour approcher

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds$$

En posant : $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds \approx \sum_{k=0}^N \omega_k f(\alpha_k, x(\alpha_k))$ Chaque choix des points α_k (et par conséquent les poids ω_k) donne un schéma (différent) de résolution du problème de Cauchy (1).

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Définition

Une méthode générale de Runge-Kutta peut être écrite sous forme d'équations successives :

$$k_1 = f(t_n, x_n), \quad (c_1 = 0)$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, x_n + h a_{21} k_1),$$

$$k_3 = f(t_n + c_3 h, x_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)),$$

⋮

$$k_s = f(t_n + c_s h, x_n + h(a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \cdots + a_{s,s-1} k_{s-1})).$$

$$\text{et : } x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i,$$

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Définition

Pour spécifier une méthode particulière, il faut donner le nombre des étapes s , les coefficients a_{ij} (pour $1 \leq j < i \leq s$), les b_i (pour $i = 1, 2, \dots, s$) et les c_i (pour $i = 2, 3, \dots, s$). La matrice (a_{ij}) est appelée matrice de Runge-Kutta, tandis que les b_i et c_i sont appelées poids et noeuds.

Ces données sont généralement organisées dans un tableau, appelé tableau de **Butcher** (d'après John C. Butcher) :

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Définition

0	0				
c_2	a_{21}	0			
c_3	a_{31}	a_{32}	0		
\vdots	\vdots	\ddots			
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	$a_{s,s-1}$	0
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s

$c_1 = 0$

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Définition

Condition : Pour que le tableau (et le schéma) soit bien défini, nous imposant toujours que, sur chaque ligne, la somme des a_{ij} est égale à c_i :

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i \quad i = 2, \dots, s$$

Cette condition est justifiée par l'hypothèse : Les méthodes d'intégration à chaque ligne sont d'ordre au moins 1

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Exemple

Par exemple pour la méthode d'Euler explicite :

$$\frac{0}{1}$$

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Exemple

Par exemple pour la méthode d'Euler explicite :

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

Pour le schéma du point milieu :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Exemple

On a

$$s = 2 \text{ et } c_2 = \frac{1}{2}, a_{21} = \frac{1}{2}, b_1 = 0, b_2 = 1$$

et : $x_{n+1} = x_n + h(b_1k_1 + b_2k_2)$ avec

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, x_n), \\k_2 &= f(t_n + c_2h, x_n + h(a_{21}k_1)),\end{aligned}$$

On trouve finalement

$$x_{n+1} = x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)\right).$$

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Exemple

La méthode de Runge-Kutta la plus connue est RK4 utilise le tableau suivant :

0				
1	1			
$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
$\frac{2}{2}$	0	$\frac{2}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Critères de consistance de Runge-kutta

- 1 Un schéma de RK est consistant d'ordre au moins 1 avec le problème de Cauchy (1) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1$$

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Critères de consistance de Runge-kutta

- 1 Ce schéma est consistant d'ordre au moins 2 avec le problème de Cauchy (1) si et seulement si :

$$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^s b_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = \frac{1}{2}$$

⇓

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}$$

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Consistance RK (Remarques)

3. Pour démontrer les relations précédentes il suffit d'utiliser les caractérisations précédentes en calculant et en comparant

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial h^{p-1}} \Phi(t, x, 0) \text{ et } \frac{1}{p} D^{p-1} f(t, x)$$

Notons que ces calculs présentent plus de difficultés pour obtenir un ordre élevé (à cause de la définition de la fonction Φ qui contient plusieurs compositions de f). Il existe plusieurs techniques pour réaliser ces calculs.

A titre d'exemple, on utilise les arbres orientés :

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Consistance RK (Remarques)

Table 234(I) The rooted trees up to order 4

Tree t	•	⋮	∨	⋮
Order $ t $	1	2	3	3
$\Phi(t)$	$\sum_i b_i$	$\sum_i b_i c_i$	$\sum_i b_i c_i^2$	$\sum_{ij} b_i a_{ij} c_j$
$t!$	1	2	3	6
Tree t	∨	∨	∨	⋮
Order $ t $	4	4	4	4
$\Phi(t)$	$\sum_i b_i c_i^3$	$\sum_{ij} b_i c_i a_{ij} c_j$	$\sum_{ij} b_i a_{ij} c_j^2$	$\sum_{ijk} b_i a_{ij} a_{jk} c_k$
$t!$	4	8	12	24

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Consistance RK (Remarques)

4. On peut montrer grâce aux caractérisations précédentes que pour qu'un schéma de Runge-Kutta d'ordre ≥ 2 soit en fait d'ordre 3 il faut et il suffit que :

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \frac{1}{3} \text{ et } \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}.$$

(en plus des conditions précédentes !)

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Consistance RK (Remarques)

4. Pour obtenir un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 il faut et il suffit que les **huit** égalités soient vérifiées !

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Consistance RK (Remarques)

- 1 L'ordre d'une méthode RK explicite à s étapes ne peut pas être plus grand que s . De plus, il n'existe pas de méthode à s étapes d'ordre s si $s \geq 5$. Et on a :

Ordre	1	2	3	4	5	6	7	8
S_{min}	1	2	3	4	6	7	9	11

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Exercice

Construire un schéma de RK d'ordre 3.

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Exercice

Construire un schéma de RK d'ordre 3. Le tableau de Butcher pour $s = 3$ est :

0			
c_2	a_{21}		
c_3	a_{31}	a_{32}	
	b_1	b_2	b_3

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Consistance RK

Pour que les méthodes d'intégrations à chaque ligne soient d'ordre au moins 1 on impose :

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i \text{ et } \sum_{i=1}^s b_i = 1.$$

Donc :

$$a_{21} = c_2, \quad a_{31} + a_{32} = c_3.$$

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Consistance RK

et

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

La deuxième condition de consistance $\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}$, donne (avec $c_1 = 0$) :

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}$$

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Consistance RK

La troisième condition $\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$ donne :

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}$$

Et la quatrième condition $\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$ donne

$$b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}$$

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Consistance RK

i ne prend que la valeur 3 (car $i = 1$ est impossible on n'a pas a_{1j} .
 $i = 2$ correspond à a_{21} et c_1 qui est nul). Finalement on doit résoudre le système :

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Consistance RK

$$a_{21} = c_2$$

$$a_{31} + a_{32} = c_3$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}$$

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}$$

$$b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}$$

Le système admet plusieurs solutions.

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Consistance RK

Quelques solutions possible :

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
1	-1	2		
<hr/>				
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	

0				
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$			
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$		
<hr/>				
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	

0				
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$			
0	-1	1		
<hr/>				
	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Critères de stabilité de Runge-Kutta

Tous les schémas du type Runge-Kutta explicites sont stables dès que f est continue et globalement lipschitzienne par rapport à sa variable x sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

Méthodes de Runge-Kutta explicites

Critères de stabilité de Runge-Kutta

Tous les schémas du type Runge-Kutta explicites sont stables dès que f est continue et globalement lipschitzienne par rapport à sa variable x sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

Remarque :

En particulier le schéma RK4 est convergent d'ordre 4. C'est le schéma le plus communément utilisé. Il est à la base du solveur *ODE45* de Matlab.

Problèmes raides

Position du problème

Une équation différentielle **raide** est une équation différentielle dont la sensibilité aux paramètres va rendre difficile la résolution par des méthodes numériques explicites. Lorsque on applique un schéma explicite à pas adaptatif à certains problèmes dont la solution présente des problèmes raides. On obtient des oscillations qui influencent sur la vitesse de convergence et mènent souvent à la divergence du schéma.

Problèmes raides

Pour caractériser les problèmes raides rappelons que l'erreur d'un schéma explicite stable et d'ordre au moins p si :

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|x(t_n) - x_n\| \leq M K h^p.$$

Où K est la constante de consistance, et $M = \exp^{LT}$ la constante de stabilité, et L La constante de Lipschitz de f . Ainsi, lorsque L devient grande, M devient grande exponentiellement, et donc la valeur prise par h doit être très petite pour garder une précision initialement donnée. A cause de ça, on introduit une autre notion de stabilité qui teste le schéma sur les différentes valeurs possibles de L .

Problèmes raides

TLS

Cette notion est basée sur ce que l'on appelle l'équation Test Linéaire Standard (ou TLS). Ce test est défini par le système suivant

$$\begin{cases} x'(t) = -Lx(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Où $L > 0$.

Problèmes raides

TLS

- La solution exacte est

$$x(t) = x_0 \exp^{-Lt}.$$

- Elle vaut x_0 pour $t = 0$ et tend vers 0 quand t tend vers l'infini.
- La constante de Lipschitz du problème (TLS) est L . En effet, si l'on pose $f(t, x) = -Lx$ pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$, alors pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |-Lx + Ly| = L|x - y|.$$

Problèmes raides

Définition

Schéma A-Stable

On dit qu'un schéma est A-Stable si et seulement si ce schéma appliqué au problème (TLS) donne une solution x_n vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ quel que soit $L > 0$, et quel que soit le pas de temps constant h .

On dit aussi que le schéma est inconditionnellement stable.

Problèmes raides

Schéma A-stable

Remarque :

- 1 Un schéma est A-Stable est un schéma qui peut traiter les problèmes de n'importe quelle raideur sans condition sur le pas de temps.
- 2 La stabilité d'un schéma décrit la façon dont les erreurs s'accumulent sur un intervalle de temps borné $[t_0, t_0 + T]$ tandis que la A-stabilité décrit la façon dont les erreurs faussent le comportement de la solution pour $t \rightarrow \infty$.

Problèmes raides

Schéma A-Stable

Les schémas de Runge-Kutta explicites ont des conditions sur le pas temps dépendant de la raideur du problème . Ils ne sont pas A-Stable . A cause de cela , on va introduire d'autres schémas A-Stable (mais plus difficiles à programmer). Le simple est : Euler implicite.

Schémas implicites

Euler implicite

Reprenons le problème de Cauchy (1) au point $t \in [t_0, t_0 + T]$:
Et intégrons l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} . On obtient
pour $n = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(s) ds = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds$$

Donc

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds$$

Schémas implicites

Euler implicite

Approchons $x(t_n)$ par x_n pour $n = 0, \dots, N - 1$. On trouve **le schéma d'Euler implicite** :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}), & \text{pour } n = 0, \dots, N - 1 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Cette dernière relation nécessite de résoudre une équation pour déterminer x_{n+1} d'où son nom de méthode implicite.

Schémas implicites

Application

L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{1+t^2}.$$

Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la concentration est $x(0) = 5$, déterminer la concentration à $t = 2$ à l'aide de la méthode d'Euler implicite avec un pas $h = 0.5$.

Schémas implicites

Application

On a $f(t, x) = -\frac{x(t)}{1+t^2}$ donc le schéma d'Euler implicite est donné par le système :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}) = x_n - h \frac{x_{n+1}}{1+t_{n+1}^2} & n = 0, \dots, N-1 \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

Schémas implicites

Application

On trouve

$$x_{n+1} \left(1 + \frac{h}{1 + t_{n+1}^2} \right) = x_n \quad (6)$$

Qu'on peut écrire :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + \frac{h}{1 + t_{n+1}^2}} \quad (7)$$

Schémas implicites

Application

A l'instant $t = 0$ la concentration est $x_0 = 5$, et comme $h = 1/2$, alors $t_n = nh = n/2$ donc pour $n \geq 1$ l'équation (7) donne :

$$x_{n+1} = \frac{4 + (n+1)^2}{6 + (n+1)^2} x_n$$

$t = 2$ correspond à $n = 4$, on obtient donc

Schémas implicites

Application

n	t_n	x_n
0	0	$x_0 = 5$
1	0.5	$x_1 = \frac{25}{7} \approx 3.57$
2	1.0	$x_2 = \frac{20}{7} \approx 2.86$
3	1.5	$x_3 = \frac{52}{21} \approx 2.48$
4	2.0	$x_4 = \frac{520}{231} \approx 2.25$

Schémas implicites

Application

La concentration à $t = 2$ est d'environ 2.25.

Schémas implicites

Runge-Kutta implicite

Un schéma de Runge-Kutta implicite à s -stages est décrit par le tableau de Butcher suivant

C_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	$a_{1,s-1}$	a_{1s}
C_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	$a_{2,s-1}$	a_{2s}
C_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	...	$a_{3,s-1}$	a_{3s}
...
C_{s-1}	$a_{s-1,1}$	$a_{s-1,2}$	$a_{s-1,3}$...	$a_{s,s-1}$	$a_{s,s-1}$
C_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$a_{s,3}$...	a_s	$a_{s,s-1}$
	b_1	b_2	b_3	...	b_{s1}	b_s

Schémas implicites

Euler implicite

Le schéma représenté par

$$\frac{1}{1} \mid \frac{1}{1}$$

est le schéma d'Euler implicite.

Schémas implicites

RK implicite

Proposition :

Les schémas de RK implicite à s -étapes sont A-Stables.

Schémas implicites

RK implicite

Proposition :

Les schémas de RK implicite à s -étapes sont A-Stables.
La convergence pour les schémas de Runge-Kutta implicites se définit comme pour les schémas explicites.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq n \leq N} \|x(t_n) - x_n\| = 0$$

Les conditions sur l'ordre de consistance sont les mêmes à savoir :

Schémas implicites

Application

1. Ce schéma est consistant d'ordre au moins 1 avec le problème de Cauchy (1) si et seulement si

$$\sum_{n=1}^s b_n = 1.$$

Schémas implicites

Application

2. Ce schéma est consistant d'ordre au moins 2 avec le problème de Cauchy (1) si et seulement si (C1), (C2)

$$(C3) \quad \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} = \sum_{i=1}^s b_i \sum_{j=1}^s a_{ij} = \frac{1}{2} \implies \sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2}$$

Mais la matrice constituée des a_{ij} n'est plus strictement triangulaire inférieure. La convergence est toujours vraie pour les méthodes de Runge-Kutta implicites dès qu'elles sont consistantes et que f vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz global.

Schémas implicites

Résolution des itérations des schémas implicites

Les schémas implicites définissent à chaque itération une équation qu'il faut résoudre pour trouver x_{n+1} . Par exemple pour Euler implicite on a

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$$

Donc x_{n+1} est un point fixe de la fonction G définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$G(x) = x_n + hf(t_{n+1}, x)$$

Schémas implicites

Application

A-Stabilité d'Euler implicite

Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T]. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Schémas implicites

Application

1. Retrouver le schéma d'Euler implicite en utilisant une approximation de la dérivée.
2. Est ce que le schéma d'Euler implicite à pas constant est A-stable ?

Schémas implicites

Application

1. pour $n \geq 1$ on approche

$$x'(t_n) = f(t_n, x(t_n))$$

par :

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = f(t_n, x_n)$$

C'est à dire : $x_n = x_{n-1} + hf(t_n, x_n)$ Qu'on peut écrire :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$$

Pour tout $n \geq 0$ et x_0 donné.

Schémas implicites

Application

2. Appliqué au (TLS) on trouve :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - hLx_{n+1} & n \in \mathbb{N} \\ x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1 + hL)x_{n+1} = x_n \implies x_{n+1} = \frac{1}{1 + hL}x_n$$

Schémas implicites

Application

Ce qui implique

$$x_n = \left(\frac{1}{1 + hL}\right)^n x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or $\forall h \geq 0$ et $L > 0$ on $\frac{1}{1 + hL} < 1$ donc $x_n \rightarrow 0$.

Euler implicite est donc A-Stable.

Schémas implicites

Application

Schéma du trapèze (Crank-Nicolson)

Soit $L > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème (TLS) :

$$\begin{cases} x'(t) = -Lx(t), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

Schémas implicites

Application

1. Écrire le schéma du trapèze (Crank-Nicolson) permettant de calculer x_{n+1} à partir de x_n .
2. Étudier la A-Stabilité du schéma.
3. À partir du schéma du trapèze, en déduire le schéma de Heun, est-il A-Stable ?

Schémas implicites

Application

1. Intégrons l'EDO $x'(t) = f(t, x(t))$ entre t_n et t_{n+1} , Donc :

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt$$

On utilise la formule du trapèze :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \approx \frac{h}{2} (f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x_{n+1})).$$

Soit x_n l'approximation de $x(t_n)$. On obtient le schéma du trapèze ou de Crank-Nicolson

Schémas implicites

Application

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})), & \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \\ x_0 = x(t_0), \end{cases}$$

Il s'agit d'un schéma implicite car il ne permet pas d'écrire directement x_{n+1} en fonction de x_n lorsque la fonction f n'est pas triviale.

Schémas implicites

Application

2. En appliquant le schéma du trapèze au problème (TLS) on obtient la suite définie par récurrence suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (-Lx_n - Lx_{n+1}) \\ x_0 = x(t_0), \end{cases}$$

Donc :

$$x_{n+1} \left(1 + \frac{h}{2}L\right) = x_n \left(1 - \frac{h}{2}L\right) \implies x_{n+1} = \frac{1 - \frac{h}{2}L}{1 + \frac{h}{2}L} x_n = \frac{2 - hL}{2 + hL} x_n$$

Schémas implicites

Application

On trouve finalement : $x_n = \left(\frac{2-Lh}{2+Lh}\right)^n x_0$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ si et seulement si $\left|\frac{2-Lh}{2+Lh}\right| < 1$.

Notons x le produit $Lh > 0$ et q la fonction

$$q(x) = \frac{2-x}{2+x} = 1 - 2\frac{x}{2+x}.$$

Nous avons $0 < \frac{x}{2+x} < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, donc $|q(x)| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ pour tout $h > 0$, et le schéma est A-Stable.

Schémas implicites

Application

- 3 Pour éviter le calcul implicite de x_{n+1} dans le schéma du trapèze, nous pouvons utiliser une prédiction d'Euler explicite et remplacer le x_{n+1} dans le terme $f(t_{n+1}, x_{n+1})$ par

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n).$$

On trouve ainsi le schéma de Heun :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} [f(t_n, x_n) + f(t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n))] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Schémas implicites

Application

En appliquant le schéma de Heun au TLS, on obtient la suite suivante :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \left[-Lx_n + f(t_n + h, x_n - hLx_n) \right]$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} \left[-Lx_n - L(x_n - hLx_n) \right]$$

$$x_{n+1} = \left(1 - Lh + \frac{(Lh)^2}{2} \right) x_n.$$

Donc : $x_n = \left(1 - Lh + \frac{(Lh)^2}{2} \right)^n x_0.$

Schémas implicites

Application

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ si et seulement si

$$\left| 1 - Lh + \frac{(Lh)^2}{2} \right| < 1.$$

Notons x le produit Lh ($x > 0$) et $p(x)$ le polynôme $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Nous avons $|p(x)| < 1$ si et seulement si $x < 2$. En effet

Schémas implicites

Application

$$|p(x)| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 2x + 2| < 2$$

(comme $\Delta = -4 < 0$ donc $x^2 - 2x + 2 > 0$)

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 < 2$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2) < 0 \text{ (comme } x > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 < 0$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ si et seulement si $h < \frac{2}{L}$.

Schémas numériques

Applications

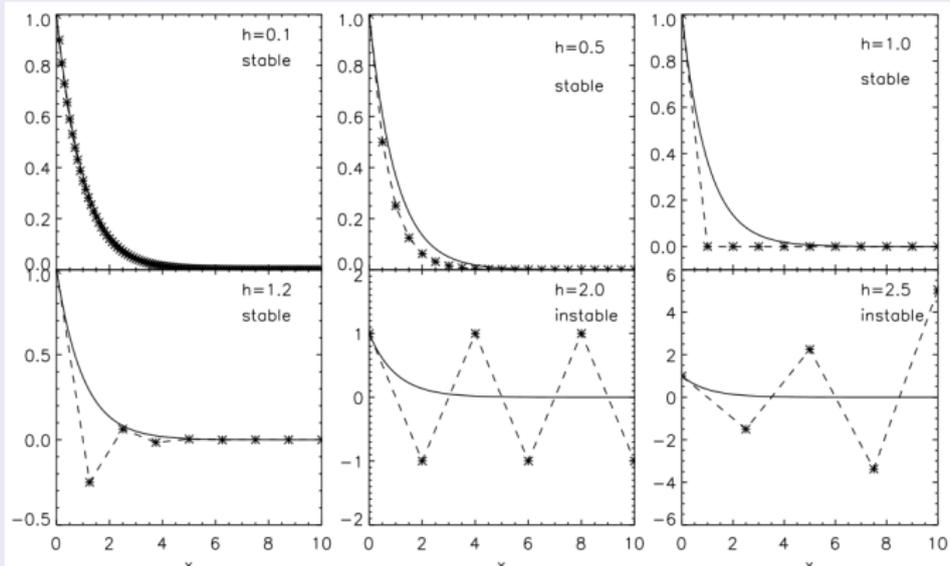
Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + y = 0 & \text{sur } [0,10] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La solution est donnée par : $y(t) = e^{-t}$. Ci-après différentes situations (suivant quelques valeurs de h) du schéma d'Euler explicite.

Schémas numériques

Applications



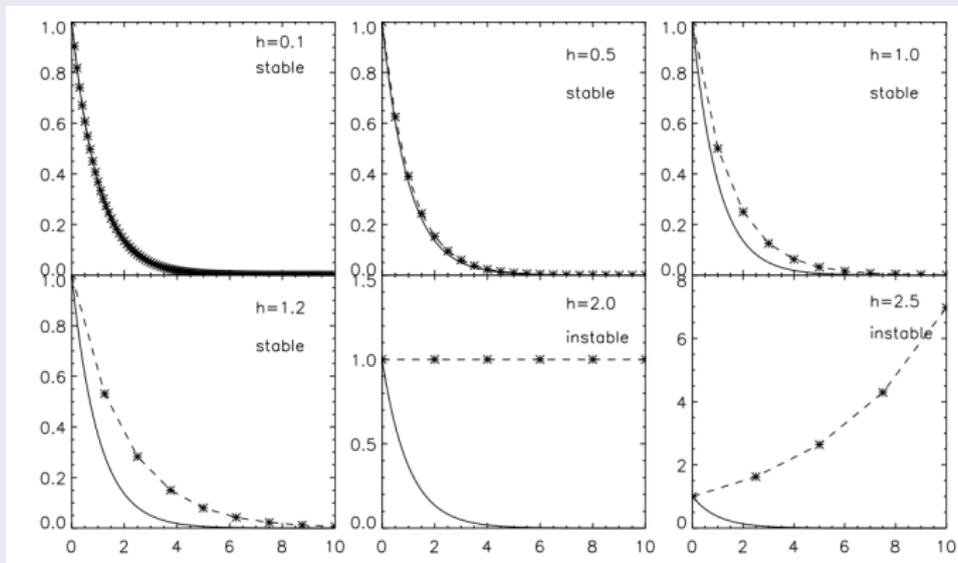
Schémas numériques

Applications

Ci-après différentes situations (suivant quelques valeurs de h) du schéma de Heun.

Schémas numériques

Applications



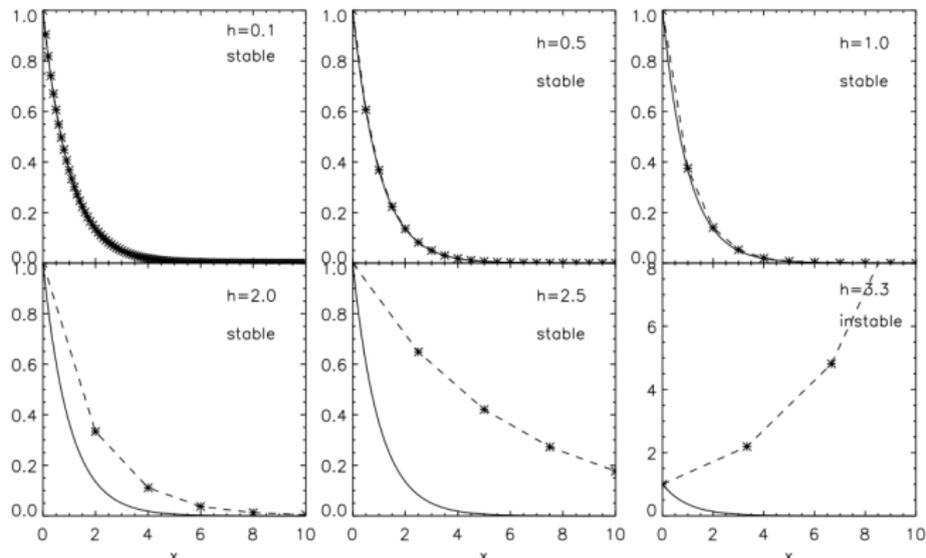
Schémas numériques

Applications

Ci-après différentes situations (suivant quelques valeurs de h) de l'un schéma RK4.

Schémas numériques

Applications



Schémas numériques

Autres exemples

Si nous intégrons l'EDO $x'(t) = f(t, x(t))$ entre t_n et t_{n+1} nous obtenons

$$x_{n+1} - x_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt$$

On peut construire différentes schémas sous la forme suivante en choisissant à chaque fois la formule de quadrature pour approcher le membre de droite

$$\begin{cases} x_0 = x(0) \\ x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P(t) dt. \end{cases}$$

Schémas numériques

Autres exemples

Il est à noter que d'une manière générale $P(t)$ est un polynôme d'interpolation de $f(t, x(t))$ sur une selection de points $(t_j)_j$ de la discrétisation.

Les schémas d'ADAM approchent l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt$ par l'intégrale d'un polynôme p interpolant $f(t, x(t))$ en des points donnés qui peuvent être à l'extérieur de l'intervalle $[t_n; t_{n+1}]$. On peut construire différentes schémas selon les points d'interpolation choisis. Ils se divisent en deux familles :

Les méthodes d'ADAM-BASHFORTH qui sont explicites

Les méthodes d'ADAM-MOULTON qui sont implicites

Schémas numériques

Autres exemples

schémas AB- q : les schémas d'ADAM-BASHFORTH d'ordre q approchent l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt$ par l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt$ où p est le polynôme interpolant $f(t, x(t))$ en t_{n-i} pour $0 \leq i \leq q - 1$;

schémas AM- q : les schémas d'ADAM-MOULTON d'ordre q approchent l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt$ par l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt$ où p est le polynôme interpolant $f(t, x(t))$ en t_{n+1-i} pour $0 \leq i \leq q$.

Schémas numériques

Autres exemples

Notons qu'il est donc possible de calculer successivement u_q, u_{q+1}, \dots , en partant de u_0, u_1, \dots, u_{q-1} (qui doivent donc être initialisés par des approximations adéquates car seul u_0 est donné).

Schémas numériques

Autres exemples

$AB - 1$: On a

$$\begin{aligned} p(t) &= f(t_n, x(t_n)) \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt &= hf(t_n, x(t_n)) \end{aligned}$$

et on obtient le schéma

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

La méthode $AB - 1$ coïncide avec la méthode d'Euler explicite.

Schémas numériques

Autres exemples

Pour AB – 2 : On a

$$p(t) = \frac{f(t_n, x(t_n)) - f(t_{n-1}, x(t_{n-1}))}{h} (t - t_{n-1}) + f(t_{n-1}, x(t_{n-1}))$$
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt = \frac{h}{2} (3f(t_n, x(t_n)) - f(t_{n-1}, x(t_{n-1})))$$

et on obtient le schéma

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0), \\ x_1 = x_0 + hf(t_0, u_0) \approx x(t_1) \quad \text{en utilisant une prédiction AB – 1} \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (3f(t_n, x_n) - f(t_{n-1}, x_{n-1})) \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

Schémas numériques

Autres exemples

AB – 3 : On a

$$\begin{aligned} p(t) = & \frac{f(t_{n-2}, x(t_{n-2}))}{2h^2} (t - t_{n-1})(t - t_n) \\ & - \frac{f(t_{n-1}, x(t_{n-1}))}{h^2} (t - t_{n-2})(t - t_n) \\ & + \frac{f(t_n, x(t_n))}{2h^2} (t - t_{n-2})(t - t_{n-1}) \end{aligned}$$

Schémas numériques

Autres exemples

AB – 3 : On a

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt = \frac{h}{12} (\\ 23f(t_n, x(t_n)) \\ -16f(t_{n-1}, x(t_{n-1})) \\ +5f(t_{n-2}, x(t_{n-2})) \\)$$

Schémas numériques

Autres exemples

et on obtient le schéma

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) \approx x(t_1) \text{ en utilisant } AB - 1 \\ x_2 = x_1 + \frac{h}{2}(3f(t_1, x_1) - f(t_0, x_0)) \approx y(t_2) \text{ en utilisant } AB - 2 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}(23f(t_n, x_n) - 16f(t_{n-1}, x_{n-1}) + 5f(t_{n-2}, x_{n-2})) \\ n = 2, 3, \dots, N - 1 \end{cases}$$

Schémas numériques

Autres exemples

$AM - 1$: On a

$$\begin{aligned} p(t) &= f(t_{n+1}, x(t_{n+1})) \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt &= hf(t_{n+1}, x(t_{n+1})) \end{aligned}$$

et on obtient le schéma

$$\begin{cases} x_0 = x(t_0), \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

La méthode $AM - 1$ coïncide avec la méthode d'Euler implicite.

Schémas numériques

Autres exemples

AM – 2 : On a

$$p(t) = \frac{f(t_{n+1}, x(t_{n+1})) - f(t_n, x(t_n))}{h} (t - t_n) + f(t_n, x(t_n))$$
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt = \frac{h}{2} (f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x(t_{n+1})))$$

et on obtient le schéma AM – 2 (Qui coïncide avec la méthode de Crank-Nicolson).

$$\begin{cases} x_0 = y(t_0) \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})) \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

Schémas numériques

Autres exemples

AM – 3 : On a

$$\begin{aligned} p(t) = & \frac{f(t_{n-1}, x(t_{n-1}))}{2h^2} (t - t_n)(t - t_{n+1}) \\ & - \frac{f(t_n, x(t_n))}{h^2} (t - t_{n-1})(t - t_{n+1}) \\ & + \frac{f(t_{n+1}, x(t_{n+1}))}{2h^2} (t - t_{n-1})(t - t_n) \end{aligned}$$

Schémas numériques

Autres exemples

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p(t) dt = \frac{h}{12} ($$
$$5f(t_{n+1}, x(t_{n+1})) + 8f(t_n, x(t_n)) - f(t_{n-1}, x(t_{n-1}))$$
$$)$$

Schémas numériques

Autres exemples

et on obtient le schéma

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = x(t_0) \\ x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0) \approx x(t_1) \quad \text{En utilisant une prédiction } AB - 1 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12} (5f(t_{n+1}, x_{n+1}) + 8f(t_n, x_n) - f(t_{n-1}, x_{n-1})) \\ \quad \quad \quad n = 1, 2, \dots, N - 1. \end{array} \right.$$

Schémas numériques - Cas général

Définition

Soit $\Phi : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ la formulation générale d'un Schéma numérique prend la forme d'un algorithme permettant le calcul des valeurs $(x_k)_{k=0, \dots, n}$ en utilisant la relation :

$$x_{k+1} = x_k + h_k \Phi(t_k, x_k, h_k) \quad x_0 \text{ une approximation de } x(t_0)$$

Schémas numériques - Cas général

Définition

Soit $\Phi : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ la formulation générale d'un Schéma numérique prend la forme d'un algorithme permettant le calcul des valeurs $(x_k)_{k=0, \dots, n}$ en utilisant la relation :

$$x_{k+1} = x_k + h_k \Phi(t_k, x_k, h_k) \quad x_0 \text{ une approximation de } x(t_0)$$

Schéma converge si et seulement :

$$h^* \rightarrow 0 \text{ et } \lim_{|x(t_0) - x_0| \rightarrow 0} \sup_{0 \leq k \leq n} \|x(t_n) - x_n\| = 0 \quad \text{avec } h^* = \sup_{0 \leq k \leq n-1} h_k$$

Schémas numériques - Cas général

Définition

Erreur de consistance :

$$R_k = \frac{1}{h_k} [x(t_{k+1}) - x(t_k)] - \Phi(t_k, x(t_k), h_k)$$

Schéma consistant :

$$\max_{0 \leq k \leq n-1} \|R_k\| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \max_{0 \leq k \leq n-1} h_k \longrightarrow 0$$

Schémas numériques - Cas général

Critère de consistance

Si $\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$

Schémas numériques - Cas général

Critère de consistance

Si $\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ On a :

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, x(s)) ds$$

et

$$R_k = \frac{1}{h_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(s, x(s)) - \Phi(t_k, x(t_k), h_k)) ds$$

Schémas numériques - Cas général

Critère de consistance

$$R_k = \frac{1}{h_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(s, x(s)) - f(t_k, x(t_k))) ds \\ + \frac{1}{h_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(t_k, x(t_k)) - \Phi(t_k, x(t_k), h_k)) ds$$

La fonction $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec

$g(s, y, h) = f(s, x) - \Phi(s, x, h)$ est continue et vérifie $g(s, x, 0) = 0$

D'où :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall h_k < \alpha \quad \|f(t_k, x(t_k)) - \Phi(t_k, x(t_k), h_k)\| \leq \varepsilon$$

Schémas numériques - Cas général

Critère de consistance

alors

$$\|R_k\| \leq \frac{1}{h_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(s, x(s)) - f(t_k, x(t_k))) ds + \varepsilon$$

De plus, la fonction $s \rightarrow f(s, x)$ est continue et donc uniformément continue sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$, par conséquent, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $s \in [t_k, t_{k+1}]$ avec

$h_k = t_{k+1} - t_k < \eta$ on a $\|f(s, x(s)) - f(t_k, x(t_k))\| < \varepsilon$

En imposant $\sup_{0 \leq k \leq n-1} h_k < \min(\alpha, \eta)$ on obtient :

$\|R_k\| < 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $0 < k < n - 1$. D'où la consistance.

Schémas numériques - Cas général

Stabilité

Schéma donné par : x_0 et $x_{k+1} = x_k + h_k \Phi(t_k, x_k, h_k)$. Son schéma perturbé : y_0 et $y_{k+1} = y_k + h_k(\Phi(t_k, x_k, h_k) + \varepsilon_k)$

Schéma stable si il existe M_1 et M_2 , indépendantes des h_k , telles que :

$$\sup_{0 \leq k \leq n} \|x_k - y_k\| \leq M_1 \|x_0 - y_0\| + M_2 \sup_{0 \leq k \leq n-1} \|\varepsilon_k\|$$

Schémas numériques - Cas général

Théorème de Lax

Une méthode numérique qui est à la fois stable et consistante est nécessairement convergente.

Schémas numériques - Cas général

Théorème de Lax

Une méthode numérique qui est à la fois stable et consistante est nécessairement convergente. D'après la définition de l'erreur de consistance, $x(0)$ et

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + h_k[\Phi(t_k, x(t_k), h_k) + R_k]$$

Schéma consistant :

$\max_{0 \leq k \leq n-1} \|R_k\| \rightarrow 0$ lorsque $\max_{0 \leq k \leq n-1} h_k \rightarrow 0$

On pose $y_k = x(t_k)$ et on déduit que le schéma défini par $y_0 = x(0)$ et $y_{k+1} = y_k + h_k[\Phi(t_k, y_k, h_k) + R_k]$ est un perturbé du premier (avec R_k)

Schémas numériques - Cas général

Théorème de Lax

Schéma stable : il existe M_1 et M_2 , indépendantes des h_k , telles que :

$$\sup_{0 \leq k \leq n} \|x_k - y_k\| \leq M_1 \|x_0 - y_0\| + M_2 \sup_{0 \leq k \leq n-1} \|R_k\|$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe h^* tel que $\sup_{0 \leq k \leq n-1} \|R_k\| < \frac{\varepsilon}{2M_2}$ pour tout $h \in [0, h^*]$

choisissant x_0 tel que $\|x_0 - x(0)\| < \inf(\frac{\varepsilon}{2M_1}, h^*)$ on déduit que :

$$\sup_{0 \leq k \leq n-1} \|x_k - x(t_k)\| < \varepsilon \quad \text{d'ou la convergente}$$

Schémas numériques - Cas général

Critère de stabilité

Si Φ est uniformément Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est à dire il existe $L > 0$, il existe h^* tel que pour tout $h \in [0, h^*]$ et pour tout $t \in [0, T]$, $y, z \in \mathbb{R}^n$ et on a

$$\|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)\| \leq L\|y - z\|,$$

alors le schéma (S) est stable.

La preuve de la proposition est basée sur le résultat suivant :

Schémas numériques - Cas général

Critère de stabilité

Lemme discret de Gronwall. Soit (a_n) une suite de réels positifs vérifiant

$$\begin{cases} a_{n+1} \leq (1 + A)a_n + B, \text{ avec } A > 0 \text{ et } B \geq 0, \\ a_0 \text{ donné.} \end{cases}$$

Alors

$$a_n \leq a_0 e^{nA} + \frac{e^{nA} - 1}{A} B \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Schémas numériques - Cas général

Critère de stabilité

La preuve se fait par récurrence.

Pour $n = 0$, la relation est vraie.

Supposons, par récurrence, que la relation vraie à l'étape n .

Pour tout $x \geq 0$, on a : $1 + x \leq e^x$ donc :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq (1 + A)a_n + B \leq (1 + A) \left(a_0 e^{nA} + \frac{e^{nA} - 1}{A} B \right) + B \\ &\leq a_0 e^{(n+1)A} + e^A \frac{e^{nA} - 1}{A} B + B \leq a_0 e^{(n+1)A} + \frac{e^{(n+1)A} - 1}{A} B. \end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme.

Schémas numériques - Cas général

Critère de stabilité

Lemme discret généralisé de Gronwall.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles positives vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L \geq 0$ et $h_n = t_{n+1} - t_n$:

$$v_{n+1} \leq (1 + h_n L) v_n + u_n$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n \leq v_0 \exp(L(t_n - t_0)) + \sum_{k=0}^{n-1} u_k \exp(L(t_n - t_{k+1}))$$

La preuve se fait par récurrence.

Schémas numériques - Cas général

Critère de stabilité

Le cas $n = 1$, on a bien $v_1 \leq (1 + h_0 L) v_0 + u_0 \leq v_0 \exp(L h_0) + u_0$.
Supposons, par récurrence, que la relation est vraie à l'ordre n .

$$\begin{aligned} v_{n+1} &\leq (1 + h_n L) v_n + u_n \leq v_0 \exp[L(h_n + t_n - t_0)] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} u_k \exp(L(h_n + t_n - t_{k+1})) + u_n \\ &\leq v_0 \exp[L(t_{n+1} - t_0)] + \sum_{k=0}^n u_k \exp(L(t_{n+1} - t_{k+1})). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve.

Schémas numériques - Cas général

Critère de stabilité

Démonstration du résultat principal.

Soit (S) le schéma donné par

$$(S) \begin{cases} x_{k+1} = x_k + h_k \Phi(t_k, x_k; h_k) & \forall k = 0, \dots, n-1, \\ x_0 \text{ donnée} \end{cases}$$

et soit (S') son perturbé par ε_k :

$$(S') \begin{cases} y_{k+1} = y_k + h_k [\Phi(t_k, y_k; h_k) + \varepsilon_k] & \forall k = 0, \dots, n-1 \\ y_0 \text{ donnée} \end{cases}$$

Schémas numériques - Cas général

Critère de stabilité

Alors

$$y_{k+1} - x_{k+1} = y_k - x_k + h_k [\Phi(t_k, y_k; h_k) - \Phi(t_k, x_k; h_k)] + h_k \varepsilon_k$$

Cas 1 : Supposons que le pas h est constant et dans ce cas $h = T/n$. Posons $\text{Sup}_{0 \leq k \leq n-1} \|\varepsilon_k\| = \varepsilon$ on obtient alors

$$\begin{aligned} \|y_{k+1} - x_{k+1}\| &\leq \|y_k - x_k\| + h \|\Phi(t_k, y_k; h) - \Phi(t_k, x_k; h)\| + h \|\varepsilon_k\| \\ &\leq (1 + hL) \|y_k - x_k\| + h\varepsilon \end{aligned}$$

Schémas numériques - Cas général

Critère de stabilité

Soit maintenant $a_k = \|y_k - x_k\|$, alors la dernière inégalité s'écrit sous la forme suivante :

$$a_{k+1} \leq (1 + hL)a_k + h\varepsilon, \quad \text{pour tout } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

D'après le lemme discret de Gronwall on aura pour tout $k = 0, 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} a_k &\leq a_0 e^{khL} + \frac{e^{khL} - 1}{L} \varepsilon \leq a_0 e^{nhL} + \frac{e^{nhL} - 1}{L} \varepsilon \\ &\leq a_0 e^{TL} + \frac{e^{TL} - 1}{L} \varepsilon \end{aligned}$$

Schémas numériques - Cas général

Critère de stabilité

c'est à dire

$$\text{Sup}_{0 \leq k \leq n-1} \|y_k - x_k\| \leq M_1 \|y_0 - x_0\| + M_2 \text{Sup}_{0 \leq k \leq n-1} \|\varepsilon_k\|, M_1 = e^{TL}$$

$$\text{et } M_2 = \frac{e^{TL} - 1}{L}$$

Ce qui prouve la stabilité de la méthode.

Schémas numériques - Cas général

Critère de stabilité

Cas 2 : Si le pas est variable, on pose

$$v_k = \|y_k - x_k\|, u_k = h_k \|\varepsilon_k\|$$

et alors on a la relation suivante

$$v_{k+1} \leq (1 + h_k L) v_k + u_k \quad \text{pour tout } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Grace au lemme général on déduit que

$$v_k \leq \exp(L(t_k - t_0)) v_0 + \sum_{p=0}^{k-1} u_p \exp(L(t_k - t_{p+1})) \quad \text{pour tout } k = 1, \dots$$

Schémas numériques - Cas général

Critère de stabilité

Or $t_k - t_0 \leq t_n - t_0 = T$, $t_k - t_{p+1} \leq t_n - t_0 = T$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{k-1} h_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} h_i = T \\ u_p = h_k \|\varepsilon_k\| \leq \underset{0 \leq k \leq n-1}{h_k} \text{Sup}_{0 \leq n} \|\varepsilon_k\| \text{ pour } 0 \leq p \leq k-1 \end{array} \right.$$

D'où on déduit que :

$$\text{Sup}_{0 \leq k \leq n} \|y_k - x_k\| \leq e^{LT} \|y_0 - x_0\| + T e^{LT} \text{Sup}_{0 \leq k \leq n-1} \|\varepsilon_k\|$$