SÉRIE N^0 1 — 2023 - 2024

Exercice 1 : a) Écrire $(90)_{10}$ et $(97)_{10}$ en base 2. Effectuer, en opération binaire, la somme et le produit des deux nombres puis procéder à la vérification des résultats obtenus.

b) Soient N_1 et N_2 deux entiers donnés par leurs écritures suivant les bases précisées : $N_1 = \overline{A1}^{16}$ et $N_2 = \overline{105}^{10}$. Écrire $N_1 + N_2$ suivant les bases binaire ($b = 2$), hexadécimale ($b = 16$) et la base $b = 4$.

c) Quelle est la représentation en virgule flottante du nombre réel $x = -3.625$ dans le format binaire avec $N = 8$ bits, $\beta = 2$, $emin = -3$ et $emax = 3$?

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 - 2$.

a) Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $\overline{x}$ sur l'intervalle $[1, 2]$. Quelle est la valeur exacte de $\overline{x}$?

b) Écrire les algorithmes permettant le calcul d'une valeur approchée, de $\overline{x}$ avec une précision $|f(x_k)| \leq 10^{-3}$, en utilisant les méthodes : Dichotomie, Lagrange et Newton.

c) Pour chaque méthode, calculer les quatre premières valeurs de la suite récurrente. Comparer et expliquer.

Exercice 3 :

Soit $f : [1; 2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante telle que $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$.

1. Sachant que $f(1.6555) = 0$, déterminer la suite des premiers quatre itérés de la méthode de la dichotomie dans l'intervalle $[1; 2]$ pour l'approximation du zéro de f. On pourra utiliser le tableau ci-dessous :

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	1		2			
1						
$\vdots$						

Exercice 4 : 1. Donner la suite définissant la méthode de Newton pour la recherche d'un zéro d'une fonction f. Justifier l'expression de la suite ;

2. Écrire l'algorithme pour une convergence à ε près en précisant le test d'arrêt utilisé ;
3. Déterminer l'ordre de convergence minimale de cette suite ;
4. Applications :

   a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ sur $[-1; 0, 4]$ et $x_0 = -0, 3$, puis $x_0 = 0, 3$ avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

   b. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ sur $[0, 45; 1, 2]$ et $x_0 = 0, 5$, $x_0 = 0, 54$ et $x = 0, 555$ avec $\varepsilon = 10^{-2}$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. On s'interesse à l'étude des racines de l'équation $f(x) = 0$. (Les valeurs approchées sont à présenter par défaut avec trois chiffres après la virgule).

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$.

b) Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$.

c) On souhaite maintenant utiliser la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n. Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix. x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2.

d) On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\overline{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ et calculer, en suite, les valeurs suivantes $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$.

e) Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\overline{x}_3$ comme valeur approchée de r ?

Exercice 6 :

On considère l'équation (E) donnée par : $(E) \qquad x^3 + 10x = 20 - 2x^2$.

a) Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser.
b) Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$.
c) Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0, x_1 et x_2) de la solution de (E). En déduire une estimation de l'erreur commise en considérant x_3.

d) On considère le schéma itératif suivant : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2+2x_n+10} & n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$
e) Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E).
f) Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x\in[1,2]} |\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}| \leq \frac{40}{132}$).
g) Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3.

Exercice 7 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3}{-2+x}$.

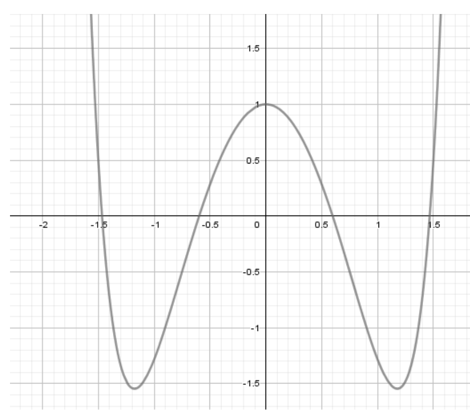
1. **Étudier** la fonction g sur $[-2, 0]$, **dresser** son tableau de variations, remarquer que g est **bijective** et vérifier que le problème (PF) $g(x) = x$ admet **une solution unique** r. Donner la valeur **exacte** de r ?
2. Définir la suite $(x_n)_n$ donnée par **la méthode de point fixe**, pour obtenir une solution approchée de (PF), et vérifier qu'elle **convergente**. Évaluer $|x_{n+1} - x_n|$ et déterminer **le nombre d'itérations** nécessaire pour obtenir une solution approchée avec une précision de $\varepsilon = 10^{-4}$.
3. Vérifier que (PF) peut être transformé en un problème de résolution d'un équation non linéaire de la forme (Eqt) $f(x) = 0$ avec f un polynôme de degré 2. En remarquant que r est solution de (Eqt), appliquer la méthode de **Dichotomie** sur l'intervalle $[-1.75; 0]$ et calculer les deux premières valeurs approchées de r.
4. On définit la suite, $(y_n)_n$, des itérés données par : $\begin{cases} y_0 \in [-2, 0] \\ y_{n+1} = \frac{y_n^2+3}{2y_n-2} \end{cases}$

   Quelle méthode peut-on reconnaître ? Étudier la **convergence** de cette méthode.

Exercice 8 :

Soit (E) l'équation suivante : $(E) \qquad e^{x^2} - 4x^2 = 0$

1. Utiliser la représentation graphique, ci-jointe, de la fonction $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$ pour localiser les quatres racines de (E) dans quatre intervalles d'amplitude 1 chacun et qui contient une seule racine ;
2. Montrer qu'il y a une seule racine $\overline{x}$ de (E) dans $[0; 1]$;
3. Transformer l'équation (E) en problèmes de recherche de points fixes, sous les formes suivantes :
   $(PF1)$: $g_1(x) = x$ tel que g_1 est une fonction définie par une racine carrée et la fonction exceptionnelle,
   $(PF2)$: $g_2(x) = x$ tel que g_2 est une fonction définie par la fonction exponentielle et un polynôme de degré 2,



4. Écrire les schémas numériques pour calculer $\overline{x}$ en utilisant $(PF1)$ puis $(PF2)$. Exécuter les calculs des quatres premières itérations ;
5. Étudier la convergence des deux schémas relatifs à $(PF1)$ et à $(PF2)$. Évaluer l'erreur commise lorsque le schéma converge ;
6. Écrire la méthode de Newton pour déterminer la racine $\overline{x}$ de (E). Quel est son ordre ? Comparer les deux méthodes.

Exercice 9 :

Dans la méthode de Newton, ayant à disposition les points x_0 ; $\cdots$, x_n ; on construit x_{n+1} en prenant l'intersection de la tangente au graphe de f en x_n avec l'axe des abscisses. Dans la méthode de

Newton modifiée, ayant construit x_0 ; $\cdots$, x_n ; on construit x_{n+1} en prenant l'intersection avec l'axe des abscisses avec la droite passant par x_n et parallèle à la tangente au graphe de f en x_0 :

a) On suppose que la fonction f est strictement croissante et strictement convexe sur $[a; b]$ avec une racine dans $]a; b[$. On prend $x_0 = b$: Faites un dessin faisant apparaître les quatre premières valeurs données par la méthode de Newton modifiée. Comparer avec le schéma correspondant pour la méthode de Newton ;

b) Donner l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n ;

c) Selon vous quels sont les avantages pratiques de cette modification ? Ses inconvénients ?

SÉRIE N^0 1 - SOLUTION

–2021 - 2022

Exercice 1 :

1)

$$\begin{aligned} 90 &= 2 \times 45 + 0 \\ 45 &= 2 \times 22 + 1 \\ 22 &= 2 \times 11 + 0 \\ 11 &= 2 \times 5 + 1 \\ 5 &= 2 \times 2 + 1 \\ 2 &= 2 \times 1 + 0 \\ 1 &= 2 \times 0 + 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 97 &= 2 \times 48 + 1 \\ 48 &= 2 \times 24 + 0 \\ 24 &= 2 \times 12 + 0 \\ 12 &= 2 \times 6 + 0 \\ 6 &= 2 \times 3 + 0 \\ 3 &= 2 \times 1 + 1 \\ 1 &= 2 \times 0 + 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$90 = \overline{1011010}^2 \qquad \text{et} \qquad 97 = \overline{1100001}^2$$

On a :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ + & & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline = & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Vérification : $90 + 97 = 187$

$$187 = 93 \times 2 + 1$$

$$93 = 46 \times 2 + 1$$

$$46 = 23 \times 2 + 0$$

$$23 = 11 \times 2 + 1$$

$$11 = 5 \times 2 + 1$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

$$1 = 0 \times 2 + 1$$

Donc : $90 + 97 = 187 = \overline{10111011}^2$ qui est exactement l'écriture trouvée auparavant. Nous pouvons aussi, vérifier en calculant la valeur de l'écriture binaire trouver auparavant.

D'autre part :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \times & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Vérification :

1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0
8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
8192	0	0	0	512	0	0	0	0	16	8	0	2	0

$$8192 + 512 + 16 + 8 + 2 = 8730 = 90 \times 97$$

2) Soient N_1 et N_2 deux entiers donnés par leurs écritures suivant les bases précisées :

$$N_1 = \overline{A1}^{16} \qquad \text{et} \qquad N_2 = \overline{105}^{10}$$

Écrire $N = N_1 + N_2$ suivant les bases binaire ($b = 2$), hexadécimale ($b = 16$) et la base $b = 4$.
On a :

$$N = N_1 + N_2 = \overline{A1}^{16} + \overline{105}^{10} = 10 \times 16^1 + 1 \times 16^0 + 105 = 161 + 105 = 266$$

et :

$$266 = 133 \times 2 + 0 \qquad 133 = 66 \times 2 + 1 \qquad 66 = 33 \times 2 + 0 \qquad 33 = 16 \times 2 + 1$$

$$16 = 0 \times 2 + 0 \qquad 8 = 4 \times 2 + 0 \qquad 4 = 2 \times 2 + 0 \qquad 2 = 1 \times 2 + 0 \qquad 1 = 0 \times 2 + 1$$

Donc :

$$N = \overline{100001010}^{2}$$

D'autre part, on a $16 = 2^4$ et :

$$N = \overline{\underbrace{0001}\,\underbrace{0000}\,\underbrace{1010}}^{2} = \overline{10A}^{16}$$

Finalement, on a $16 = 4^2$ donc :

$$N = \overline{\underbrace{\;1\;}\,\underbrace{\;0\;}\,\underbrace{\;A\;}}^{16} = \underbrace{01}\,\underbrace{00}\,\underbrace{22} = \overline{10022}^{4}$$

Ou autrement ($4 = 2^2$) :

$$N = \overline{\underbrace{01}\,\underbrace{00}\,\underbrace{00}\,\underbrace{10}\,\underbrace{10}}^{2} = \overline{10022}^{4}$$

3) 11000101

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2 - 2$.
- Vérifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution $\overline{x}$ sur l'intervalle $[1, 2]$. Quelle est la valeur exacte de $\overline{x}$?
- Écrire les algorithmes permettant le calcul d'une valeur approchée, de $\overline{x}$ avec une précision $|f(x_k)| \leq 10^{-3}$, en utilisant les méthodes : Dichotomie, Lagrange et Newton.
- Pour chaque méthode, calculer les quatre premières valeurs de la suite récurrente. Comparer et expliquer.

Rappels :

La méthode de la Dichotomie :

Recherche de la racine $\overline{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ ($\overline{x}$ est la seule racine dans $[a, b]$) avec une précision ε.
Initialisation : $a_0 = a$, $b_0 = b$
Tant que $|b_k - a_k| > \varepsilon$ (test d'arrêt) $\rightarrow$ faire $\downarrow$ (une boucle de calcul à refaire tant que la condition est vérifiée) :
Calculer $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ et :
Si $f(a_k)f(x_k) < 0$ Alors $a_{k+1} := a_k$ et $b_{k+1} := x_k$
Sinon $a_k := x_k$ et $b_{k+1} := b_k$
Si $|b_n - a_n| \leq \varepsilon \rightarrow$ Fin.
Conclusion : $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ est une valeur approchée de $\overline{x}$ avec une précision ε.

Méthode de Lagrange (utilisant la droite qui passe par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ au lieu du centre de l'intervalle $[a_k, b_k]$) :

Recherche de la racine $\overline{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ ($\overline{x}$ est la seule racine dans

$[a, b]$) avec une précision ε.
La méthode est une généralisation de la méthode de dichotomie : la valeur de x_k est déterminée comme intersection de la droite qui passe par les deux points $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ et l'axe des abscisses.
La méthode est à différencier avec les autres méthodes utilisant une sécante notamment la variante de la méthode de Newton qui consiste à remplacer $f'(x_{k+1})$ par $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k+1}}$ ou, autrement dit, on remplace la tangente par la sécante.
Initialisation : $a_0 = a$, $b_0 = b$
Tant que $|b_k - a_k| > \varepsilon$ (test d'arrêt) $\rightarrow$ faire $\downarrow$ (une boucle de calcul à refaire tant que la condition est vérifiée) :
Calculer $x_k = a_k - \frac{b_k-a_k}{f(b_k)-f(a-k)} f(a_k) = \frac{a_k f(b_k)-b_k f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}$ et :
Si $f(a_k)f(x_k) < 0$ Alors $a_{k+1} := a_k$ et $b_{k+1} := x_k$
Sinon $a_k := x_k$ et $b_{k+1} := b_k$
Si $|b_n - a_n| \leq \varepsilon \rightarrow$ Fin.
Conclusion : $x_n = a_n - \frac{b_n-a_n}{f(b_n)-f(a_n)} f(a_n) = \frac{a_n f(b_n)-b_n f(a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$ est une valeur approchée de $\overline{x}$ avec une précision ε.
Les tests d'arrêt peuvent être différents d'une méthode à l'autre et suivant la précision cherchée, généralement, nous pouvons distinguer trois type de conditions d'arrêt :

1) Majoration de l'erreur absolue par une quantité qui ne dépends pas de la racine recherchée $\overline{x}$ ni de x_k, par exemple, dans les méthodes de Dichotomie et de la Lagrange on a :
$$|x_k - \overline{x}| \leq |b_k - a_k|$$
Il st suffisant de choisir $|b_k - a_k| \leq \varepsilon$ pour obtenir la précision recherchée
2) Test basé sur le résidu : $|f(x_k)| \leq \varepsilon$
3) Test basé sur l'incrément : $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$
Suivant la situation et les conditions initiales, chaque test peut être considéré comme satisfaisant ou trop restrictif.

Méthode de Newton : Cette méthode définit une suite récurrente $(x)_k$ qui converge (sous des conditions) vers la solution de l'équation.

Pour déterminer x_{k+1}, la méthode consiste à remplacer localement la courbe de la fonction par la tangente qui passe pas x_k et d'équation : $T_k : y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$

La valeur x_{k+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite T_k avec l'axe des abscisses (l'intersection n'existe que si $f'(x_k) \neq 0$), on a :

$$0 = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = x_{k+1}f'(x_k) - x_k f'(x_k) + f(x_k) \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
car $f'(x_k) \neq 0$.

L'algorithme pour une convergence à ε près; x_0 donnée, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
Tant que $|x_{k+1} - x_k| > \varepsilon$ (ou tant que $|f(x_k)| > \varepsilon$) $\downarrow$ Faire (une boucle de calcul) :
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
Le dernier terme de la suite est une approximation de $\overline{x}$ à ε près.
Conditions suffisantes de convergence de la suite x_n vers la racine $\overline{x}$:

1) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$
2) $f(a)f(b) < 0$
3) $f'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$ (c'est à dire strictement positive ou strictement négative sur l'intervalle ouvert)

4) $f''(x) \neq 0$ sur $]a,b[$ (c'est à dire strictement positive ou strictement négative sur l'intervalle ouvert)
5) $f(x_0)f''(x) > 0$ sur $[a,b]$ ($f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ sur l'intervalle)

REMARQUE :
1) Si $f(x_0)f''(x) < 0$ on calcule x_1 et si $f(x_1)f''(x) > 0$ et $x_1 \in [a,b]$ nous avons aussi la convergence.

On veut calculer le zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ dans l'intervalle $[1;2]$.
Localisation de la racine : On a : $f(1) = -1$ et $f(2) = 2$ donc : $f(1)f(2) < 0$ et on déduit, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que $f(x) = 0$ admet **au moins une solution**. En plus, nous avons $f'(x) = 2x > 0$ sur $[1,2[$ donc la fonction est strictement croissante et elle admet **une solution unique** dans $[1,2]$ cette solution (positive) est donnée par : $x = \sqrt{2}$.
Algorithmes :
Dichotomie :
$a_0 = 1, b = 2$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$
Tant que $|f(x_k)| > 10^{-3}$ faire :
Si $f(a_k)f(x_k) > 0$ alors $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ sinon $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$
$x_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$

Lagrange :
$a_0 = 1, b = 2$ et $x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$
Tant que $|f(x_k)| > 10^{-4}$ faire :
Si $f(a_k)f(x_k) > 0$ alors $a_{k+1} = x_k$ et $b_{k+1} = b_k$ sinon $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_k$
$x_{k+1} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$

Newton
Lorsque les conditions de convergence sont vérifiées :
$x_0 = 2$ (ou toute valeur te que $f(x_0)$ positive comme $f''(x)$).
Tant que $|f(x)| > 10^{-3}$ faire :
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2-2}{2x_n} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de dichotomie dans l'intervalle $[1;2]$.

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	$f(x_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	1	1.5	2	-	0.25	+	+
1	1	1.25	1.5	-	-0.4375	-	+
2	1.25	1.375	1.5	-	-0.1093	-	+
3	1.375	1.4375	1.5	-	0.0664	+	+
4	1.375	1.40625	1.4375				

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de Lagrange dans l'intervalle $[1;2]$.
(Les résultats sont présentés avec plusieurs chiffres après la virgule pour permettre les comparaisons, nous pouvons présenter les valeurs tronquées à un certain nombre de chiffres après la virgule).

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	1	1.333333333	2	-1	-0,222222222222222	2
1	1.333333333	1.4	2	-0,222222222222222	-0,0400000000000003	2
2	1.4	1.411764706	2	-0,0400000000000003	-0,00692041522491316	2
3	1.411764706	1.413793103	2	-0,00692041522491316	-0,00118906064209301	2
4	1.413793103	1,41414141414141	2	-0,00118906064209301	-0,000204060810122142	2

Déterminer la suite des premiers 4 itérés de la méthode de Newton dans l'intervalle $[1;2]$.

$$x_0 = 2 \quad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{1}{x_k}$$

k	x_k
0	2
1	1,5
2	1,41666666666667
3	1,41421568627451
4	1,41421356237469

(Les résultats sont présentés avec plusieurs chiffres après la virgule pour permettre les comparaisons, nous pouvons présenter les valeurs tronquées à un certain nombre de chiffres après la virgule).

Les valeurs obtenues avec les trois méthodes sont, respectivement : 1.41375, 1,41414141414141 et 1,41421356237469

Nous pouvons évaluer, avec une calculatrice, l'erreur en calculant $|x_4 - \sqrt{2}|$

$|1.41375 - \sqrt{2}| = 0.0004$

$|1,41414141414141 - \sqrt{2}| = 0.0007$

$|1,41421356237469 - \sqrt{2}| = 0.0000000004$

On en déduit que la meilleure précision est donnée par la méthode de Newton. Cette remarque est toute à fait normale car la méthode de Newton est d'ordre 2 alors que les autres sont des méthodes d'ordre 1.

Exercice 3 :

Soit $f : [1;2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante telle que $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$.

Les conditions de l'application du théorème des valeurs intermédiaires sont vérifiées, nous pouvons en déduire qu'il existe une seule racine ($\overline{x} = 1.6555$) dans l'intervalle $[1;2]$.

1. Méthode de la dichotomie dans l'intervalle $[1;2]$

   On applique successivement les étapes de la méthode de Dichotomie en remarquons que $f(x) < 0$ sur $[1, 1.6555[$ et $f(x) > 0$ sur $]1.6555, 2]$.

   $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $x_0 = 1.5$, $f(x_0) < 0$, $f(a_0)f(x_0) > 0$, donc $a_1 = x_0 = 1,5$ et $b_1 = b_0 = 2$ et ainsi de suite :

k	a_k	x_k	b_k	signe de $f(a_k)$	signe de $f(x_k)$	signe de $f(b_k)$
0	1	1,5	2	-	-	+
1	1,5	1,75	2	-	+	+
2	1,5	1,625	1,75	-	-	+
3	1,625	1,6875	1,75	-	+	+
4	1,625	1,65625	1,6875	-	+	+

2. Combien d'itérations faut-il effectuer pour approcher le zéro de f à 2^{-10} près ? à 2^{-5} près ?

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-10} \Rightarrow -n\ln(2) \leq -10\ln(10) \Rightarrow n \geq 10\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 33,2 \Rightarrow n = 34$$

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-5} \Rightarrow -n\ln(2) \leq -5\ln(10) \Rightarrow n \geq 5\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 16,6 \Rightarrow n = 17$$

Exercice 4 : 1. Donner la suite définissant la méthode de Newton pour la recherche d'un zéro de fonction. Justifier l'expression de la suite : On a :

$$\begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Pour déterminer x_{k+1}, la méthode consiste à remplacer localement la courbe de la fonction par la tangente qui passe pas x_k et d'équation : $T_k : y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$

La valeur x_{k+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite T_k avec l'axe des abscisses (l'intersection n'existe que si $f'(x_k) \neq 0$), on a :

$$0 = f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = x_{k+1}f'(x_k) - x_k f'(x_k) + f(x_k) \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

car $f'(x_k) \neq 0$.

2. Écrire l'algorithme pour une convergence à 10^{-6} près ; x_0 donnée, $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
Tant que $|x_{k+1} - x_k| > 10^{-6}$ (ou tant que $|f(x_k)| > 10^{-6}$) $\downarrow$ Faire (une boucle de calcul) :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Le dernier terme de la suite est une approximation de $\overline{x}$ à 10^{-6} près.
Conditions suffisantes de convergence de la suite x_n vers la racine $\overline{x}$:

1) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$
2) $f(a)f(b) < 0$
3) $f'(x) \neq 0$ sur $[a, b]$
4) $f''(x) \neq 0$ sur $[a, b]$
5) $f(x_0)f''(x) > 0$ sur $[a, b]$ ($f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ sur l'intervalle)

REMARQUES :
1) Si $f(x_0)f''(x) < 0$ on calcule x_1 et si $f(x_1)f''(x) > 0$ et $x_1 \in [a, b]$ nous avons aussi la convergence.

2. Déterminer l'ordre de convergence minimale de cette suite : Si la racine $\overline{x}$ est telle que $f'(\overline{x}) \neq 0$ et si la suite $x_n \to \overline{x}$ est la convergence est au moins quadratique ($p = 2$). En effet :

$$x_{n+1} - \overline{x} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \overline{x}$$

Ou encore (en rappelant que $f(\overline{x}) = 0$) :

$$(1) \qquad x_{n+1} - \overline{x} = \frac{(x_n - \overline{x})f'(x_n) - f(x_n) + f(\overline{x})}{f'(x_n)}$$

D'autre part, par application de la formule de Taylor-Lagrange, à l'ordre 2, il existe ξ_n comprise entre x_n et $\overline{x}$ tel que :

$$f(\overline{x}) = f(x_n) + (\overline{x} - x_n)f'(x_n) + \frac{(\overline{x} - x_n)^2 f''(\xi_n)}{2} \Rightarrow f(\overline{x}) - f(x_n) = (\overline{x} - x_n)f'(x_n) + \frac{(\overline{x} - x_n)^2 f''(\xi_n)}{2}$$

En replaçant dans (1), on obtient :

$$x_{n+1} - \overline{x} = \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \frac{(\overline{x} - x_n)^2}{2} \Rightarrow e_{n+1} = \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2$$

On en déduit (on peut supposer que $f'(\overline{x}) > 0$) :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{|f''(\overline{x})|}{2|f'(\overline{x})|} > 0 \qquad \text{finie}$$

En effet, on a :
$x_n \to \overline{x}$
ξ_n est comprise entre x_n et $\overline{x} \Rightarrow \xi_n \to \overline{x}$
f' et f'' sont continues (f de classe $\mathcal{C}^2$) alors : $f''(\xi_n) \to f''(\overline{x})$ et $f'(x_n) \to f'(\overline{x})$.

4. Application :1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ sur $[-0,5; 0,7]$ et $x_0 = 0,4$ puis $x_0 = 0,5$

f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$. D'autre part, on a : $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, étudiant le signe de $f'(x)$:

$$\Delta = 36 - 24 = 12 \qquad a = \frac{6 - \sqrt{12}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0,42 \qquad b = \frac{6 + \sqrt{12}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 1,58$$

Donc :

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & x \in]-\infty, a[\cup]b; +\infty[; \\ f'(x) < 0, & x \in]a; b[. \end{cases}$$

et on a : $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$ Étude de signe de $f''(x)$:

$$\begin{cases} f''(x) > 0, & x > 1 ; \\ f''(x) < 0, & x < 1. \end{cases}$$

Etude sur l'intervalle $[-1; 0, 4]$:
Localisation de la racine : f continue et strictement croissante sur $[-1; 0, 4]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans cet intervalle.
Utilisation de la méthode de Newton :
Pour $x_0 = -0,3$ on a $f(-0,3) \simeq -0,8970 < 0$, $f''(x) < 0$ et $f'(x) > 0$ sur l'intervalle et comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, on déduit que les conditions suffisantes de convergence sont vérifiées et la suite (x_n) définie par la méthode de Newton converge vers la solution $\overline{x}$ et permet le calcul d'une valeur approchée de la solution en utilisant soit le test basé sur le résidu soit le test basé sur l'incrément.
Le schéma numérique peut être écrite :

$$\begin{cases} x_0 & \text{valeur initiale bien choisie} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k^2 + 2x_k}{3x_k^2 - 6x_k + 2} = \frac{2x_k^3 - 3x_k^2}{3x_k^2 - 6x_k + 2} & \end{cases}$$

Un exemple des calculs est donné dans le tableau suivant :

k	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}	|f(x_k)|	|x_{n+1}-x_n|
0	-0,3	-0,8970	4,0700	-0,0796	0,8970	
1	-0,0796	-0,1787	2,4967	-0,0080	0,1787	0,2204
2	-0,0080	-0,0162	2,0483	-0,0001	0,0162	0,0716
3	-0,0001	-0,0002	2,0006	0,0000	0,0002	0,0079
4	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	0,0001
5	0,0000	0,0000	2	0	0,0000	0,0000

Pour $x_0 = 0,3$ on a $f(0,3) \simeq 0,3570 > 0$ de signe contraire à celui de $f''(x)$ sur l'intervalle, on en déduit que trois conditions suffisantes de convergence sont vérifiées mais la quatrième n'est pas vérifiée ($f(x_0)f''(x) > 0$ sur l'intervalle). Dans ce cas, nous pouvons calculer x_1 et si sa valeur vérifiée la condition on la considère comme valeur initiale pour obtenir la convergence !

On a :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \simeq -0,4596 \qquad \text{et } f(x_1) \simeq -1,6498 < 0$$

On déduit que le schéma de Newton converge dans ce cas aussi. Les calculs des premières itérations sont dans le tableau suivant :

k	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}	|f(x_k)|	|x_{n+1}-x_n|
0	0,3	0,3570	0,4700	-0,4596	0,3570	
1	-0,4596	-1,6498	5,3911	-0,1535	1,6498	0,7596
2	-0,1535	-0,3814	2,9920	-0,0261	0,3814	0,3060
3	-0,0261	-0,0542	2,1584	-0,0010	0,0542	0,1275
4	-0,0010	-0,0019	2,0058	0,0000	0,0019	0,0251
5	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	0,0010

Etude sur l'intervalle $[0,45; 1,2]$:

L'application de la méthode de Newton avec les trois valeurs initiales donne la situation suivante :

k	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}	|f(x_k)|	|x_{n+1}-x_n|
0	0,5	0,3750	-0,2500	2,0000	0,3750	
1	2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000	1,5000
2	2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
3	2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
4	2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
5	2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000

k	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}	|f(x_k)|	|x_{n+1}-x_n|
0	0,54	0,3627	-0,3652	1,5331	0,3627	
1	1,5331	-0,3816	-0,1476	-1,0530	0,3816	0,9931
2	-1,0530	-6,6004	11,6448	-0,4862	6,6004	2,5861
3	-0,4862	-1,7966	5,6266	-0,1669	1,7966	0,5668
4	-0,1669	-0,4221	3,0851	-0,0301	0,4221	0,3193
5	-0,0301	-0,0630	2,1834	-0,0013	0,0630	0,1368
6	-0,0013	-0,0025	2,0076	0,0000	0,0025	0,0288
7	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	0,0013
8	0,0000	0,0000	2,0000	0,0000	0,0000	0,0000

k	x_k	f(x_k)	f'(x_k)	x_{k+1}	|f(x_k)|	|x_{n+1}-x_n|
0	0,555	0,3569	-0,4059	1,4342	0,35688	
1	1,4342	-0,3523	-0,4345	0,6232	0,35233	0,8792
2	0,6232	0,3233	-0,5742	1,1863	0,32327	0,8109
3	1,1863	-0,1798	-0,8959	0,9856	0,17981	0,5630
4	0,9856	0,0144	-0,9994	1,0000	0,01443	0,2007
5	1,0000	0,0000	-1,0000	1,0000	0,00001	0,0144
6	1,0000	0,0000	-1,0000	1,0000	0,00000	0,0000

Malgré que les valeurs prises par x_0 sont très proches (0,5 puis 0,54 et 0,555), on constate que les suites définies par la méthode de Newton semblent converger vers des valeurs différentes (2 puis 0 et 1). Cet exemple montre l'instabilité de la méthode de Newton dans certains cas et la nécessité de vérifier les conditions de convergence avant de pouvoir l'utiliser. Ici, les conditions ne sont pas vérifiées car f'' change de signe dans l'intervalle et admet un point d'inflection au point d'abscisse 1. Notons que nous pouvons résoudre directement l'équation $f(x) = 0$ et elle admet trois racines 0, 1 et 2. En effet :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = 2$$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. On s'interesse à l'étude des racines de l'équation $f(x) = 0$. (Les valeurs approchées sont à présenter par défaut avec trois chiffres après la virgule).

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$.
- Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$.
- On souhaite maintenant utiliser la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n. Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix. x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2.
- On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\overline{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ et calculer, en suite, les valeurs suivantes $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$.
- Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\overline{x}_3$ comme valeur approchée de r ?

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule racine r dans $[0, 1]$;
f est un polynôme continu, $f(0) = -1$ et $f(1) = 2$ alors $f(0).f(1) < 0$ et l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine dans $[0, 1]$.
D'autre part, $f'(x) = 4x(x^2 + 1) > 0$ sur $]0, 1[$ donc f est strictement croissante et l'équation admet une et une seule solution $r \in [0, 1]$.

Montrer en utilisant la méthode de **dichotomie** et en partant de $[a, b] = [0, 1]$, que $r \in]0.5, 0.75[$;
$r \in [0, 1]$ $x_0 = \frac{0+1}{2} = 0,5$ et $f(x_0) = f(0,5) = -0,44$ on a $f(0).f(0,5) > 0$ donc $r \in]0,5; 1[$
$r \in]0,5; 1[$ $x_1 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$, $f(0,75) = 0.44$ on a $f(0,5).f(0,75) < 0$ donc $r \in]0,5; 0,75[$.

On souhaite maintenant affiner l'approximation en utilisant la méthode de **Newton** sur $]0.5, 0.75[$. La suite de Newton est notée x_n. Faut-il choisir $x_0 = 0.5$ ou $x_0 = 0.75$? Expliquer votre choix ;
On a $f(x) = 4x(x^2 + 1) > 0$ sur $]0.5, 0.75[$, $f''(x) = 12x^2 + 4 > 0$ sur $]0.5, 0.75[$ et $f(0,5) = -0,44 < 0$ alors que $f(0,75) = 0.44 > 0$ pour que la méthode converge il faut choisir x_0 tel que $f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$ donc : $x_0 = 0,75$.
x_0 étant choisi, calculer les deux premières valeurs x_1 et x_2 ;

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^4 + 2x_k^2 - 1}{4x_k^3 + 4x_k} = \frac{4x_k^4 + 4x_k^2 - (x_k^4 + 2x_k^2 - 1)}{4x_k^3 + 4x_k} = \frac{3x_k^4 + 2x_k^2 + 1}{4x_k^3 + 4x_k}$$

$$x_1 = \frac{3x_0^4 + 2x_0^2 + 1}{4x_0^3 + 4x_0} \simeq 0,655$$

$$x_2 = \frac{3x_1^4 + 2x_1^2 + 1}{4x_1^3 + 4x_1} \simeq 0,643$$

On souhaite maintenant appliquer la méthode de **la sécante de Lagrange** dont la suite est notée $\overline{x}_n$. Choisir convenablement les points de départ $\overline{x}_0$ et $\overline{x}_1$ et calculer, en suite, les deux valeurs suivantes $\overline{x}_2$ et $\overline{x}_3$;
D'après la question 2) on a : $r \in]0.5, 0.75[$ on peut choisir $\overline{x}_0 = 0,5$ et $\overline{x}_1 = 0,75$ nous avons $f(0.5) \simeq -0.437$ et $f(0.75) \simeq 0.441$.

On a :

$$\overline{x}_{k+1} = \overline{x}_k - \frac{\overline{x}_k - \overline{x}_{k-1}}{f(\overline{x}_k) - f(\overline{x}_{k-1})} f(\overline{x}_k) = \frac{\overline{x}_{k-1} f(\overline{x}_k) - \overline{x}_k f(\overline{x}_{k-1})}{f(\overline{x}_k) - f(\overline{x}_{k-1})}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{\overline{x}_0 f(\overline{x}_1) - \overline{x}_1 f(\overline{x}_0)}{f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_0)} \simeq 0,624 \quad \text{et} \quad f(\overline{x}_2) \simeq -0.069$$

$$\overline{x}_3 = \frac{\overline{x}_1 f(\overline{x}_2) - \overline{x}_2 f(\overline{x}_1)}{f(\overline{x}_2) - f(\overline{x}_1)} \simeq 0,641$$

Quel est le rang de l'erreur commise en considérant $\overline{x}_3$ comme valeur approchée de r ?
On a :

$$|\overline{x}_3 - \overline{x}_2| \simeq |0,641 - 0,624| = 0,017$$

Donc la précision est à 10^{-2} près.

Exercice 6 :

On considère l'équation (E) donnée par : $(E) \qquad x^3 + 10x = 20 - 2x^2$.
- Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser.
- Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$.
- Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0, x_1 et x_2) de la solution de (E). En déduire une estimation de l'erreur commise en considérant x_3.
- On considère le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2+2x_n+10} & \qquad n = 0, 1, 2... \\ x_0 \in [1, 2] \end{cases}$$

- Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E).

- Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x\in[1,2]} |\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}| \leq \frac{40}{132}$).

- Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3.

Écrire (E) sous forme de $f(x) = 0$ avec f une fonction à préciser ;
On a :

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + 10x = 20 - 2x^2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ avec } f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$$

Vérifier que (E) admet une solution unique dans l'intervalle $[1, 2]$;
Utilisation du théorème des valeurs intermédiaires, f est continue sur $\mathbb{R}$ (Polynôme) et on a :

$$f(1) = 1^3 + 2 \times 1^2 + 10 \times 1 - 20 = -7 \text{ et } f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 + 10 \times 2 - 20 = 16$$

Donc, l'équation $f(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$. D'autre part :

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 > 0 \text{ car } \Delta = 16 - 120 = -104 < 0$$

On en déduit que f est croissante sur l'intervalle $[1, 2]$ et par conséquent, l'équation $f(x)$ admet au seule solution $\overline{x}$ dans cet intervalle.

Utiliser la méthode de Dichotomie pour donner trois valeurs approchées (x_0, x_1 et x_2) de la solution de (E). En déduire l'erreur commise en considérant x_3 (comme solution approchée) ;
$f(x)$ admet au seule solution dans l'intervalle $[1, 2]$:
On a :

$$x_0 = \frac{1+2}{2} = 1,5 \text{ et } f(1,5) = 2,875 \text{ avec } f(1) \times f(1,5) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1; 1,5]$$

et :

$$x_1 = \frac{1+1,5}{2} = 1,25 \text{ et } f(1,25) = -2,422 \text{ avec } f(1,25) \times f(1,5) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1,25; 1,5]$$

ensuite :

$$x_2 = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375 \text{ et } f(1,375) = 0,130 \text{ avec } f(1,25) \times f(1,375) < 0 \Rightarrow \text{ la solution est dans } [1,25; 1,3$$

La valeur exacte $\overline{x}$ et valeur approchée x_3 sont dans l'intervalle $[1,25; 1,375]$ donc

$$|\overline{x} - x_3| \leq 1,375 - 1,25 = 0,125$$

On peut aussi utiliser la formule du cours $|x_n - \overline{x}| \leq \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow |\overline{x} - x_3| \leq \frac{2-1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$

On considère le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{20}{x_n^2+2x_n+10} & \qquad n = 0,1,2... \\ x_0 \in [1,2] \end{cases}$$

Vérifier qu'on peut utiliser ce schéma pour trouver une valeur approchée de la solution de (E) ;
La méthode s'écrit :

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \text{ avec } g(x) = \frac{20}{x^2+2x+10} & \qquad n = 0,1,2... \\ x_0 \in [1,2] \end{cases}$$

Il s'agit d'une méthode de point fixe de fonction g et on a (remarquons que $x^2 + 2x + 10 > 0$) :

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{20}{x^2+2x+10} = x \Leftrightarrow 20 = x^3 + 2x^2 + 10x \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (E)$$

Autre méthode :

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 10) = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{x^2+2x+10} = g(x)$$

b. Étudier la convergence de cette méthode, (on donne $\sup_{x\in[1,2]} |\frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}| \leq \frac{40}{132}$) ;
On a :

$$g(x) = \frac{20}{x^2+2x+10} \Rightarrow g'(x) = -20\frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2} = \frac{-40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2} < 0 \text{ pour } x \in [1,2]$$

g est décroissante et on a :

$$g(1) = \frac{20}{13} = 1,538 \text{ et } g(2) = \frac{20}{18} = 1,111$$

On en déduit que

$$g([1,2]) \subset [1,2]$$

D'autre part, d'après le théorème de Accroissements finis (la fonction g est continue derivable), on a :

$$\text{pour tous } x, y \in [1,2], \text{ il existe } c \in]1,2[\text{ tel que } |g(x)-g(y)| = |g'(c)||x-y| \leq \sup_{x\in[1,2]} |g'(x)||x-y| \leq \frac{40}{132}|x-y|$$

On en déduit que g est contractante.
On conclusion, g vérifie les conditions de convergence et par conséquent la méthode de point fixe converge vers la solution de (E).

Pour $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3 ;
On a :

$$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = g(1) = \frac{20}{13} = 1,538$$

$$x_1 = \frac{20}{13} = 1,538 \Rightarrow x_2 = g(x_1) = \frac{20}{(\frac{20}{13})^2 + 2\frac{20}{13} + 10} = \frac{338}{261} = 1,295 \text{ ou } x_2 = g(1,538) = 1,295$$

$$x_2 = \frac{338}{261} = 1,295 \Rightarrow x_3 = g(\frac{338}{261}) = \frac{20}{(\frac{338}{261})^2 + 2\frac{338}{261} + 10} = \frac{136242}{97189} \text{ ou } x_3 = g(1,295) = 1,401$$

Exercice 7 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3}{x-2}$.

1. **Étudier** la fonction g sur $[-2,0]$, **dresser** son tableau de variations, remarquer que g est **bijective** et vérifier que le problème (PF) $g(x) = x$ admet **une solution unique** r. Quelle est la valeur **exacte** de r ?
   La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, continue sur son domaine (rationnelle) et on a $g'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $[-2,0]$ ce que implique que g est une bijection de $[-2,0]$ vers $g([-2,0]) = [-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}] \subset [-2,0]$. Cette dernière inclusion avec la

continuité de g implique l'existence d'au moins un point fixe et comme g est strictement décroissante ce point fixe est unique.

Pour $x \neq 2$, $\frac{3}{x-2} = x \Longrightarrow x(x-2) = 3 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ ou $x = 3$. Par conséquent, l'unique solution dans $[-2, 0]$ est $r = -1$.

2. Définir la suite $(x_n)_n$ donnée par **la méthode de point fixe**, pour obtenir une solution approchée de (PF), et vérifier qu'elle **convergente**. Évaluer $|x_{n+1} - x_n|$ et déterminer **le nombre d'itérations** nécessaire pour obtenir une solution approchée avec une précision de $\varepsilon = 10^{-4}$.

   La suite $(x_n)_n$ est définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [-2, 0] \\ x_{n+1} = g(x_n) = \frac{3}{x_n-2} \end{cases}$$

   Pour $x \in [-2, 0]$, on a :
   $-2 \leq x \leq 0 \Longrightarrow -4 \leq x - 2 \leq -2 \Longrightarrow 4 \leq (x-2)^2 \leq 16 \Longrightarrow \frac{3}{16} \leq \frac{3}{(x-2)^2} \leq \frac{3}{4}$
   $\Longrightarrow \sup_{x \in [-2,0]} |g'(x)| = \frac{3}{4} < 1$, par conséquent, la fonction g est Lipschitizienne ce que implique que la méthode du point fixe (et $(x_n)_n$) est convergente. D'autre part, on a :

   $|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1}))| \leq \frac{3}{4}|x_n - x_{n-1}| \leq (\frac{3}{4})^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq (\frac{3}{4})^n |x_1 - x_0| \leq 2(\frac{3}{4})^n$
   Il suffit de considérer n tel que :
   $2(\frac{3}{4})^n \leq 10^{-4} \Longrightarrow e^{n \ln(\frac{3}{4})} \leq 0.00005 \Longrightarrow n \geq \frac{\ln(0.00005)}{\ln(\frac{3}{4})} \simeq 34.4251 \Longrightarrow n = 35$ donc, il faut exécuter au moins 35 itérations.

3. Vérifier que (PF) peut être transformé en un problème de résolution d'un équation non linéaire de la forme $(Eqt)\ \ f(x) = 0$ avec f un polynôme de degré 2. En remarquant que r est solution de (Eqt), appliquer la méthode de **Dichotomie** sur l'intervalle $[-1.75; 0]$ et calculer les deux premières valeurs approchées de r.

   $(PF) \Longrightarrow \frac{3}{x-2} = x \Longrightarrow x(x-2) = 3 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ on pose donc $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et le problème (PF) peut être résolu en utilisant l'équation non linéaire $(Eqt)\quad f(x) = 0$. r est solution de (PF) alors $\frac{3}{r-2} = r \Longrightarrow r^2 - 2r - 3 = 0$ ce que signifie que r est solution de (Eqt).
   On a : f est une fonction continue, $f'(x) = 2x - 2 < 0$ sur $[-1.75; 0]$ et $f(-1.75) \times f(0) = 1.5625 \times (-3) < 0$ et par conséquent, r est la seule solution de (Eqt) dans $[-1.75; 0]$
   $x_0 = \frac{-1.75+0}{2} = -0.875$, $f(-0.875) = -0.4843$ on a $f(-1.75) \times f(-0.875) < 0 \Longrightarrow r \in [-1.75; -0.875]$
   $x_1 = \frac{-1.75+(-0.875)}{2} = -1.3125$

4. On définit la suite, $(y_n)_n$, des itérés données par : $\begin{cases} y_0 \in [-2, 0] \\ y_{n+1} = \frac{y_n^2+3}{2y_n-2} \end{cases}$

   Quelle méthode peut-on reconnaître ? Étudier la **convergence** de cette méthode.
   $y_{n+1} = \frac{y_n^2+3}{2y_n-2} = \frac{2y_n^2-y^2-2y_n+2y_n+3}{2y_n-2} = \frac{y_n(2y_n-2)-y^2+2y_n+3}{2y_n-2} = \frac{y_n(2y_n-2)}{2y_n-2} + \frac{-y^2+2y_n+3}{2y_n-2} = y_n - \frac{y^2-2y_n-3}{2y_n-2}$
   Donc $y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ et on reconnaît la méthode de Newton.
   On a f est classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-2, 0]$, $f'(x) = 2x - 2 <$ sur $[-2, 0]$ et $f''(x) = 2 > 0$
   Donc la convergence de la méthode dépend du choix de x_0, la méthode est convergente pour tout valeur x_0 tel que $f(x_0) > 0$ (C'est à dire $x_0 \in [-2, -1[$).

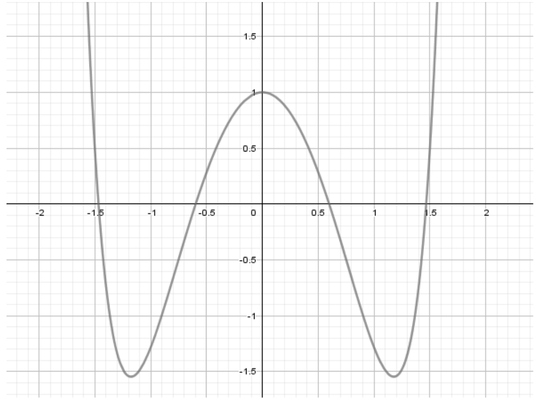
Exercice 8 :

Soit (E) l'équation suivante : $(E) \qquad e^{x^2} - 4x^2 = 0$

1. Utiliser la représentation graphique, ci-jointe, de la fonction $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$ pour localiser les quatres racines de (E) dans quatre intervalles d'amplitude 1 chacun et qui contient une seule racine ;

   La lecture graphique permet de localiser les racines (changement de la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses) dans les intervalles : $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, 2]$.

2. Montrer qu'il y a une seule racine $\overline{x}$ de (E) dans $[0; 1]$; On a :
   $f(0) = 1$ et $f(1) = e - 4 < 0$ donc $f(0)f(1) < 0$
   f est continue (fonction exponentielle et polynôme sont continues), f est strictement croissante ;



$f'(x) = 2xe^{x^2} - 8x = 2x(e^{x^2} - 4) < 0$ car $0 < x < 1$ et la fonction exponentielle est croissante impliquent : $0 < x^2 < 1 \Rightarrow 1 < e^{x^2} < e < 4$.
On en déduit, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $[0; 1]$

3. Transformer l'équation (E) en problèmes de recherche de points fixes, sous les formes suivantes :
$(PF1)$: $g_1(x) = x$ tel que g_1 est une fonction définie par une racine carrée et la fonction exceptionnelle,
$f(x) = 0 \Rightarrow e^{x^2} - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{e^{x^2}}{4} \Rightarrow x = \mp\frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2}$ et comme la racine recherchée est positive, nous choisissons :
$$x = \frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2} = g_1(x)$$
$(PF2)$: $g_2(x) = x$ tel que g_2 est une fonction définie par la fonction exponentielle et un polynôme de degré 2,
$f(x) = 0 \Rightarrow f(x)+x = x \Rightarrow e^{x^2} - 4x^2 + x = x \Rightarrow g_2(x) = e^{x^2} - 4x^2 + x = x$ $(PF3)$: $g_3(x) = x$ tel que g_3 une autre fonction à déterminer ;
$f(x) = 0 \Rightarrow e^{x^2} - 4x^2 = 0 \Rightarrow e^{x^2} = 4x^2 \Rightarrow x^2 = \ln(4x^2) \Rightarrow x = g_3(x) = \sqrt{\ln(4x^2)}$ pour $x > \frac{1}{2}$.
4. Écrire les schémas numériques pour calculer $\overline{x}$ en utilisant $(PF1)$ puis $(PF2)$. Exécuter les calculs des quatres premières itérations de chacun des deux schémas ;
$$(PF1)\begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_{k+1} = g_1(x_k) = \frac{\sqrt{e^{x_k^2}}}{2} & \end{cases}$$

k	x_k	g(x_k)	|g(x_k)-x_k|	|x_{k+1}-x_k|
0	0,5	0,56657	0,06657	
1	0,56657	0,58705	0,02048	0,06657
2	0,58705	0,59403	0,00697	0,02048
3	0,59403	0,59648	0,00245	0,00697
4	0,59648	0,59735	0,00087	0,00245

$$(PF2)\begin{cases} x_0 & \text{donnée} \\ x_{k+1} = g_2(x_k) = e^{x_k^2} - 4x_k^2 + x_k & \end{cases}$$

5. Étudier la convergence des deux schémas relatifs à $(PF1)$ et à $(PF2)$. Évaluer l'erreur commise lorsque le schéma converge ;
Conditions suffisantes de convergence d'un schéma point fixe de fonction g définie sur $[a, b]$:
   - g est contractante ;
   - $g([a, b]) \subset [a, b]$

k	x_k	g(x_k)	|g(x_k)-x_k|	|x_{k+1}-x_k|
0	0,5	0,78403	0,28403	
1	0,78403	0,17434	0,60969	0,28403
2	0,17434	1,08362	0,90929	0,60969
3	1,08362	-0,37765	1,46128	0,90929
4	-0,37765	0,20515	0,58281	1,46128

On a $g_1(x) = \frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2}$ et

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 1 \Rightarrow 1 \le e^{x^2} \le e \Rightarrow \frac{1}{2} \le g_1(x) \le \frac{\sqrt{e}}{2} \simeq 0,82$$

Donc :

$$g_1([0,1]) \subset [0,1]$$

Noter qu'il faut montrer que $0 \le f(x) \le 1$ pour tout $x \in [0,1]$ et il ne suffit pas de montrer que $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$.

D'autre part : $g_1'(x) = \frac{xe^{x^2}}{2\sqrt{e^{x^2}}} = \frac{x\sqrt{e^{x^2}}}{2}$ et

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow 1 \le e^{x^2} \le e \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2} \le \frac{\sqrt{e}}{2} \Rightarrow 0 \le g_1'(x) \le \frac{\sqrt{e}}{2} \simeq 0,82$$

On en déduit que :

$$|g_1'(c)| \le \sup_{x\in[0,1]} |g_1'(x)| \le \frac{\sqrt{e}}{2}$$

En utilisant le théorème des accroissements finies pour x et y dans $[0,1]$, il existe $c \in]0,1[$ telle que :

$$|g_1(x) - g_a(y)| = |g_1'(c)||x-y| \le \frac{\sqrt{e}}{2}|x-y|$$

et g_1 est $\frac{\sqrt{e}}{2}-$ contractante.

On déduit que la méthode de point fixe converge vers la solution $\overline{x}$ de l'équation telle que $g_1(\overline{x}) = \overline{x}$

Concernant le méthode point fixe avec $g_2(x) = e^{x^2} - 4x^2 + x$ on a $g_2(0,3) \simeq 1,03 > 1$ (ou $g_2(1) = e - 3 < 0$) donc $g_2([0,1])$ n'est pas incluse dans $[0,1]$, les conditions suffisantes de convergence ne sont pas vérifiées et ne pouvons rien déduire dans ce cas.

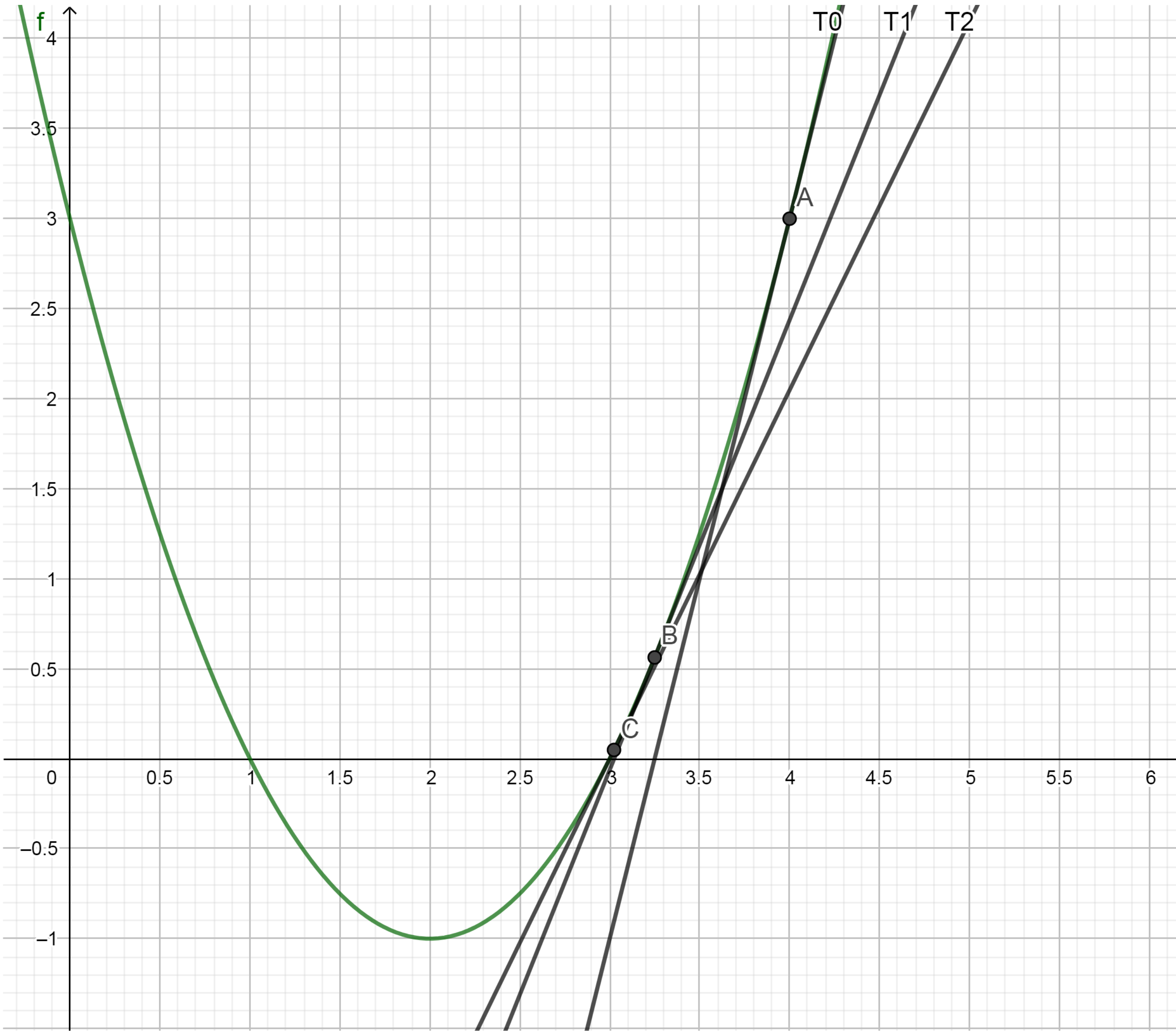
6. Écrire la méthode de Newton pour déterminer la racine $\overline{x}$ de (E). Quel est son ordre ? Quel est le meilleur choix parmi les deux méthodes ? Justifier la réponse.
Utilisant la méthode de Newton pour trouver une solution approchée de l'equation $f(x) = e^{x^2} - 4x^2 = 0$ dans l'intervalle $[0,1]$ (une seule racine telle que localiser dans une question précédente). La méthode de Newton définie une suite $(x_n)_n$ telle que :

$$\begin{cases} x_0 & \text{bien choisie} \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{e^{x_k^2} - 4x_k^2}{2x_k e^{x_k^2} - 8x_k} = x_k - \frac{e^{x_k^2} - 4x_k^2}{2x_k(e^{x_k^2} - 4)} & \end{cases}$$

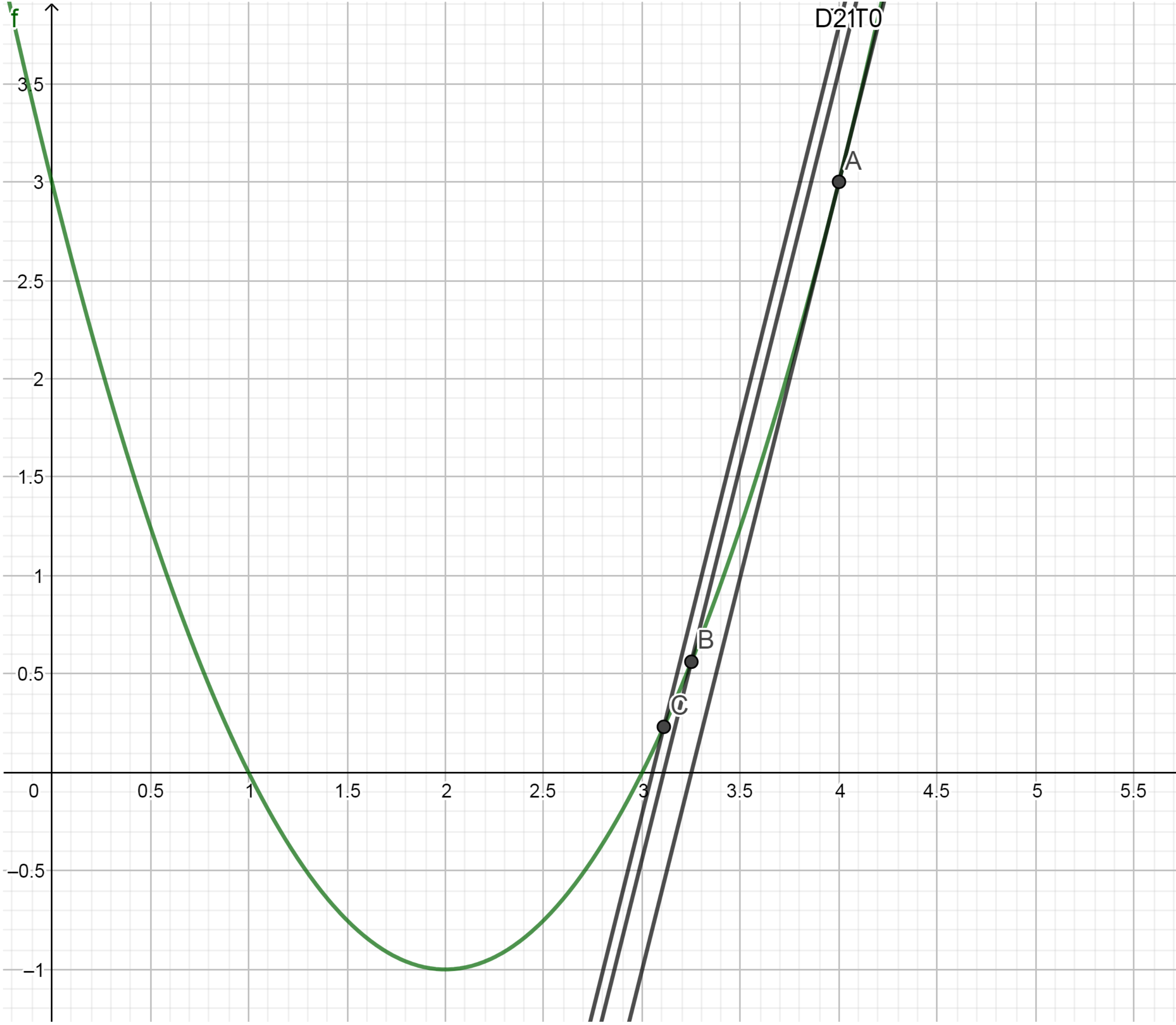
On a $f'(x) = 2x(e^{x^2} - 4) < 0$ sur $]0,1]$ donc la méthode de Newton est d'ordre deux tandis que la méthode de point fixe est d'ordre un. La méthode de Newton, lorsqu'elle vérifiée les conditions de convergence, est le meilleur choix pour cet exemple.

Exercice 9 :

Exemple de la construction de la méthode de Newton classique : T_0, T_1 et T_2 sont respectivement les tangentes à la courbe de f aux points x_0, x_1 et x_2.



Présentation de premiers termes avec la méthode de Newton modifiée : en utilisant la tangente $T0$ puis les droites $D1$ et $D2$ parallèles à la première tangente $T0$ (au lieu des tangentes $T1$ et $T2$) aux points x_0, x_1 et x_2.



x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite parallèle à $T0$ et qui passe par le point $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des abscisses (OX). On a :
$D_n : y = f'(x_0)x + p$ et $(x_n, f(x_n)) \in D_n$ donc : $p = f(x_n) - f'(x_0)x_n$ et on en déduit :

$$D_n : y = f'(x_0)x + f(x_n) - f'(x_0)x_n$$

Par conséquent :

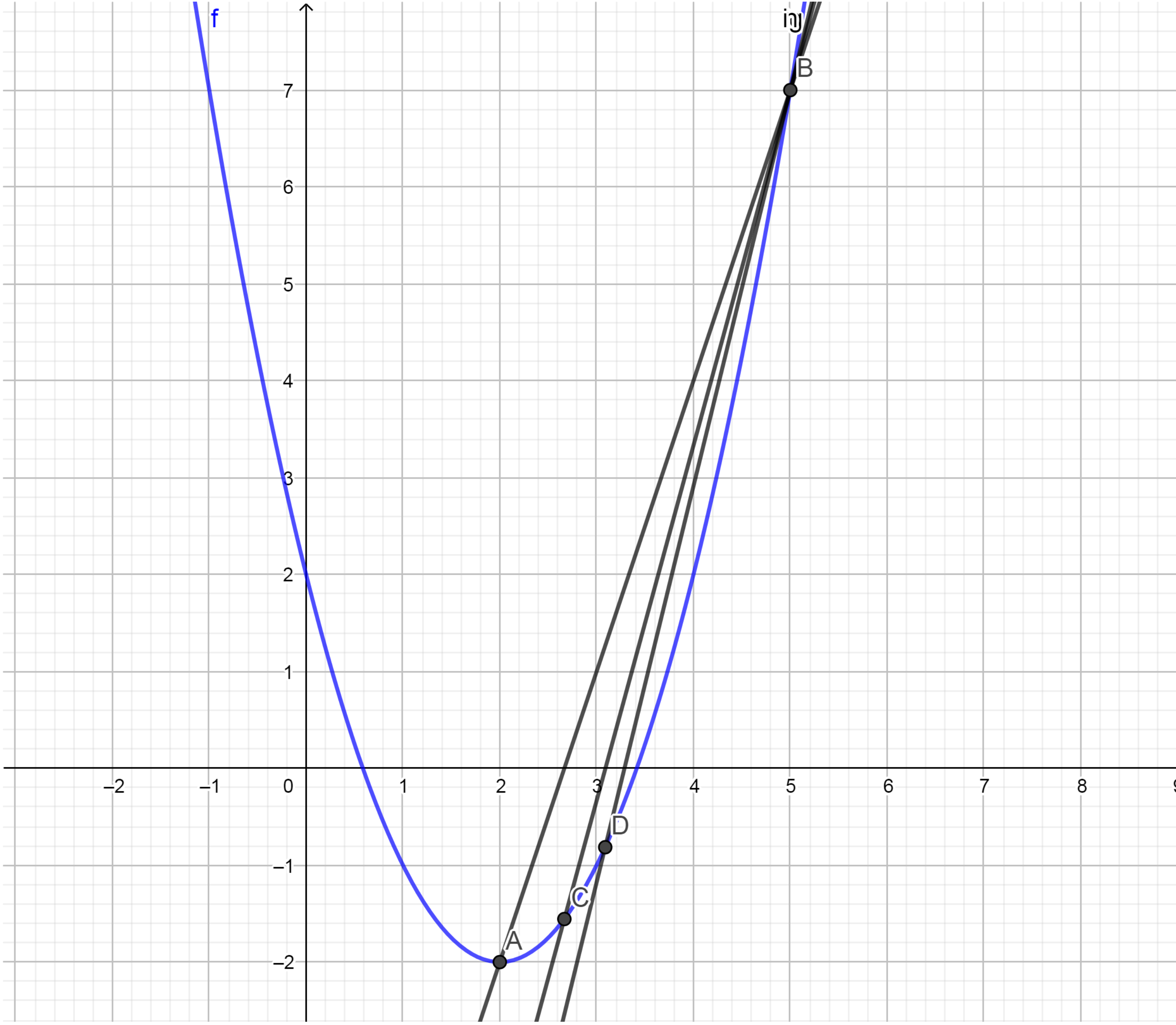
$$(x_{n+1}, 0) \in D_n \Longrightarrow f'(x_0)x_{n+1} = -f(x_n) + f'(x_0)x_n$$

Soit :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Exemple de construction d'une fonction croissante convexe sur l'intervalle $[2, 5]$:

Exemple de construction d'une fonction décroissante concave sur l'intervalle $[2, 5]$:



Equation de la droite D_k qui passe par $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ a pour équation :

$$D_n : y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k+1}}(x - f(x_k))$$

et par conséquent :

$$0 = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k+1}}(x_{k+1} - f(x_k))$$

Soit

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

Remarquons que cette méthode est une variante de la méthode de Newton, la dérivée $f'(x_k)$ est remplacée par le taux de variation : $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k+1}}$

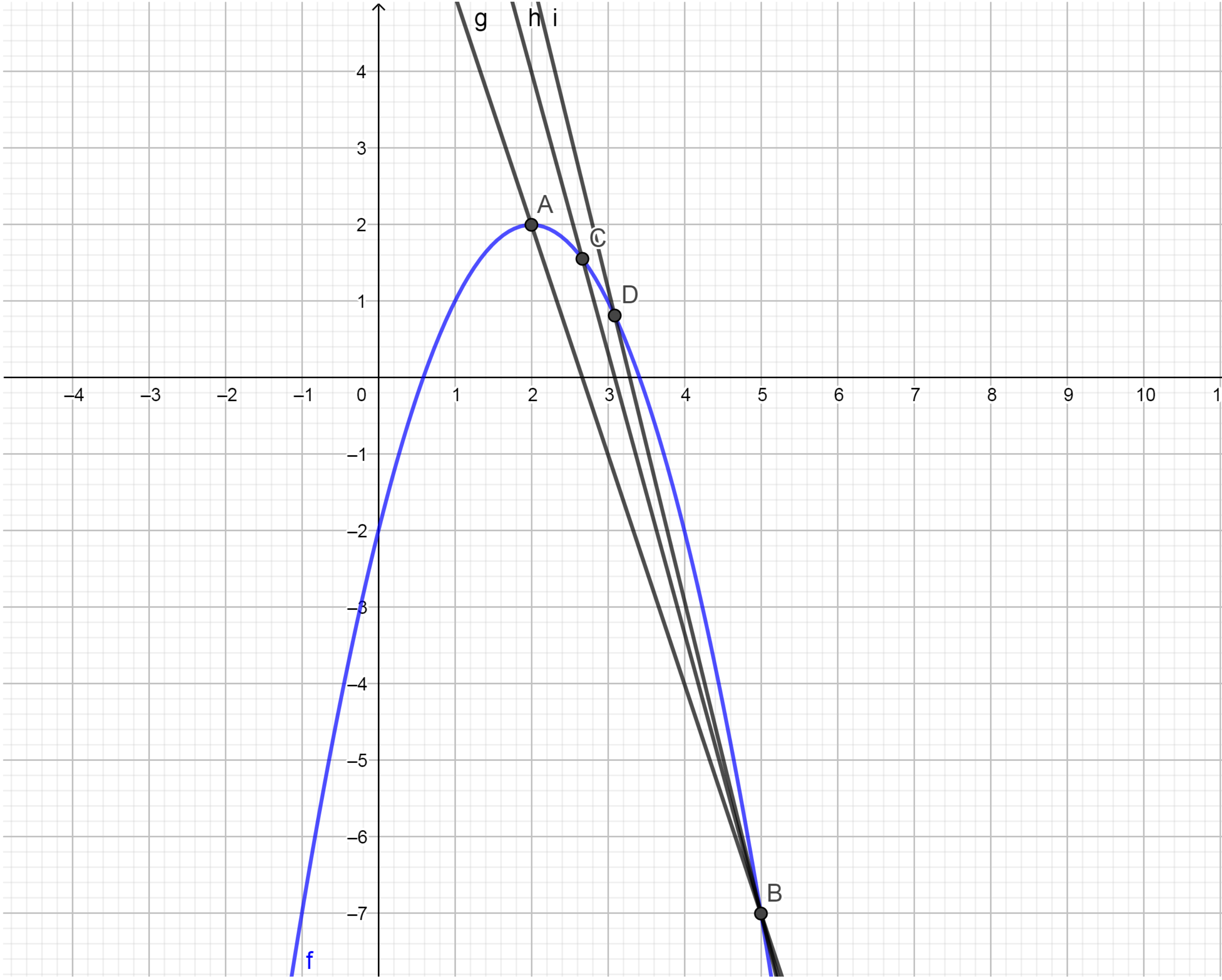
L'algorithme de cette méthode s'écrit :

x_0 donnée

Tant que $|f(x_k)| > \varepsilon$ faire :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

Concernant la 2ème variante, il faut d'abord déterminer k' puis utiliser la même méthode en remplaçant x_k par $x_{k'}$



L'algorithme s'écrit (avec test sur la précision) :

x_0 donnée

Tant que $|f(x_k)| > \varepsilon$ faire :

$i = 1$

Tant que $f(x_k)f(x_{k-i}) > 0$ faire $i = i + 1$

$k' = k - i$ (cette boucle détermine k' en commençant par $k - 1$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k'}}{f(x_k) - f(x_{k'})} f(x_k)$$