

ANALYSE NUMÉRIQUE ET ALGORITHMIQUE

BOUCHAIB FERRAHI

2023/2024

PLAN

1 ANALYSE NUMÉRIQUE

- CALCULS NUMÉRIQUES APPROCHÉS
- ZÉROS DE FONCTIONS NON-LINÉAIRES
- INTERPOLATION POLYNÔMIALE
- INTÉGRATION NUMÉRIQUE
- EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

2 ALGORITHMIQUE

- INTRODUCTION ET INITIATION À L'ALGORITHMIQUE

-
-
-
-
-

Intégration numérique

Introduction et position du problème

Soit $I = \int_a^b f(x)dx$ où f est continue sur $[a, b]$

Intégration numérique

Introduction et position du problème

Soit $I = \int_a^b f(x)dx$ où f est continue sur $[a, b]$

Le calcul explicite de cette intégrale n'est pas toujours possible:

Intégration numérique

Introduction et position du problème

Soit $I = \int_a^b f(x)dx$ où f est continue sur $[a, b]$

Le calcul explicite de cette intégrale n'est pas toujours possible:

Par exemple: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$, $\int_0^1 \cos x^2 dx$

Intégration numérique

Introduction et position du problème

Soit $I = \int_a^b f(x)dx$ où f est continue sur $[a, b]$

Le calcul explicite de cette intégrale n'est pas toujours possible:

Par exemple: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$, $\int_0^1 \cos x^2 dx$

- f n'a pas de primitive explicite,
- Le calcul analytique est long et compliqué,
- Le résultat de l'intégrale est une fonction compliquée qui fait appel à d'autres fonctions elles-même longues à évaluer.
- f n'est pas donnée par une forme explicite mais seulement par un nombre fini de couple $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ (suite à une expérience)

Intégration numérique

Introduction et définition

Les méthodes d'intégration numérique permettent d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

En utilisant des polynômes d'interpolation de f (dont le calcul de l'intégrale est beaucoup plus simple!!).

En général, on cherche une approximation sous la forme:

$$\tilde{I} = (b - a) \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$$

Intégration numérique

Introduction et définition

L'approximation

$$\tilde{I} = (b - a) \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$$

est dite **une formule de quadrature** de I , avec:

- $x_i \in [a, b]$ sont les points d'intégration,
- ω_i sont les poids d'intégration et ils vérifient:

$$\sum_{i=0}^n \omega_i = 1$$

L'approximation par la quadrature \tilde{I} de I dépend de la manière dont on choisit les points d'intégration (x_i) et les poids (ω_i)

Intégration numérique

Exemples:

1) Un seul point $x_0 \in [a, b]$: On choisit un seul point d'intégration dans $[a, b]$ et on remplace f par un polynôme d'interpolation P_0 de degré zéro tel que $P_0(x) = f(x_0)$. Donc:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \tilde{I} = \int_a^b P_0(x) dx = \int_a^b f(x_0) dx = (b - a)f(x_0)$$

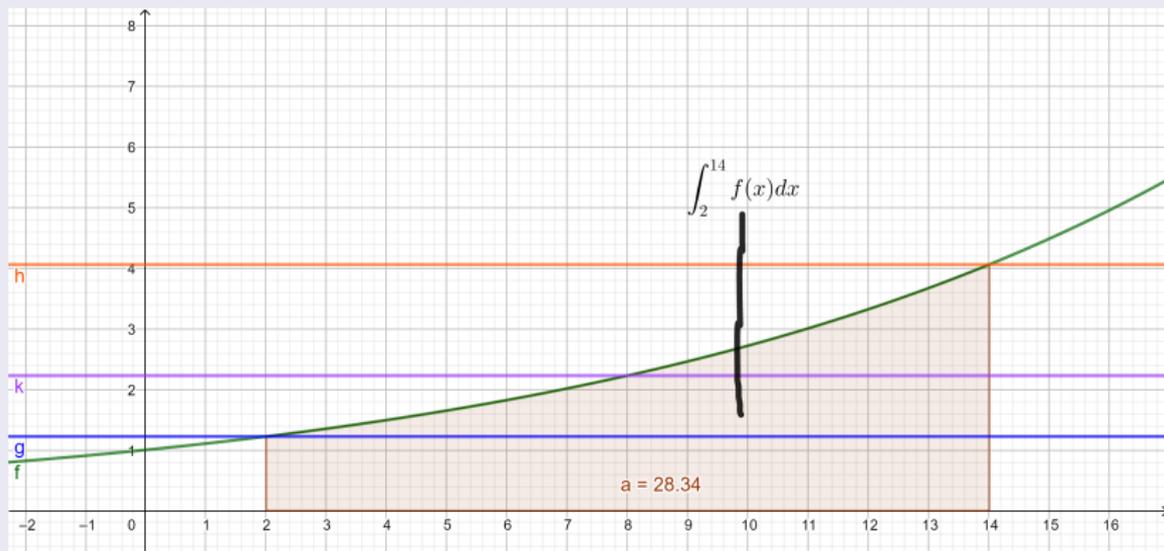
Généralement, les cas les plus utilisés sont:

- $x_0 = a$: Méthode rectangle à gauche (d'ordre 0),
- $x_0 = b$: Méthode rectangle à droite (d'ordre 0),
- $x_0 = \frac{a+b}{2}$: Méthode du point au milieu (d'ordre 1).

Intégration numérique

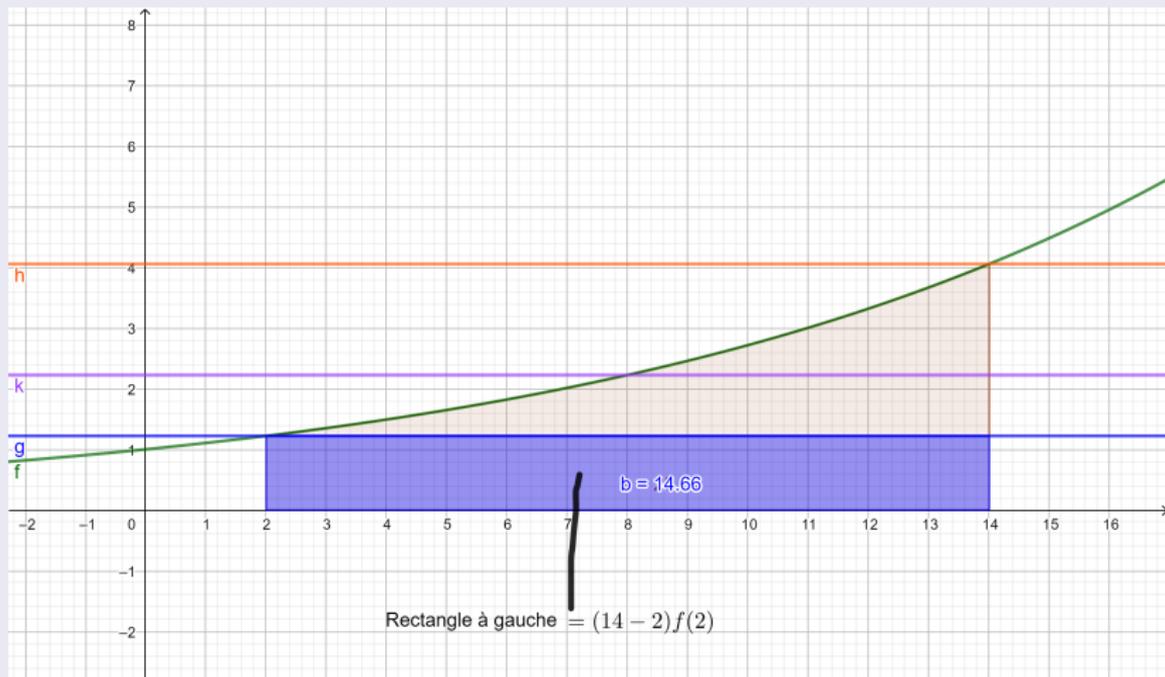
Exemples:

Nous présentons, par la suite, des illustrations géométriques des méthodes d'intégration numérique basées sur un seul point.



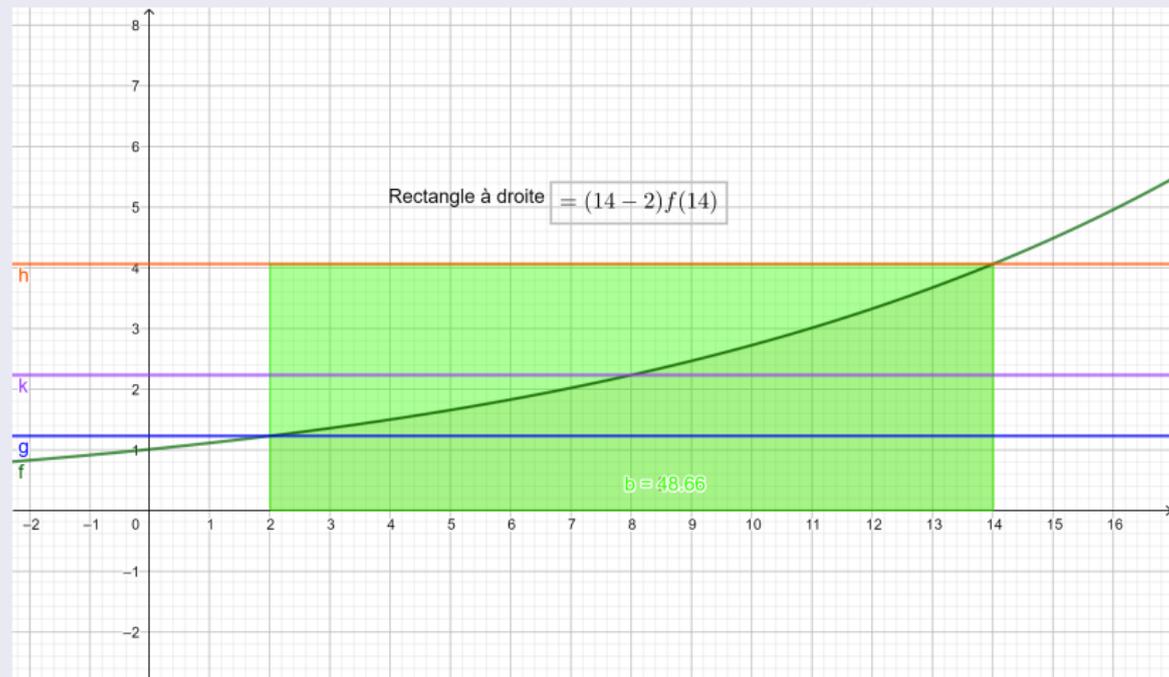
Intégration numérique

Exemples:



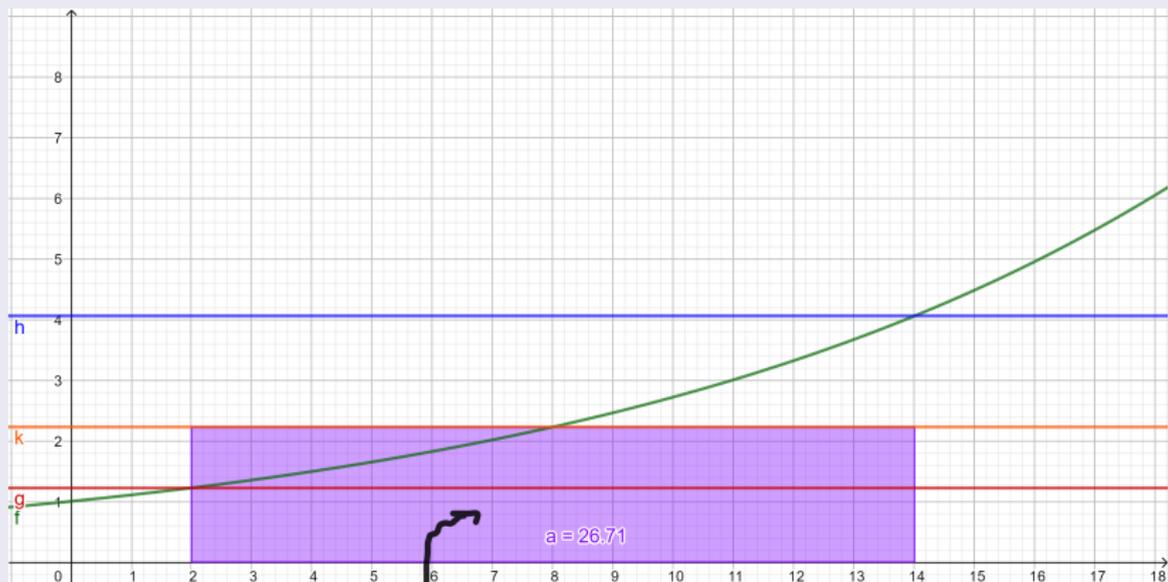
Intégration numérique

Exemples:



Intégration numérique

Exemples:



Point milieu = $(14 - 2)f\left(\frac{2 + 14}{2}\right) = (14 - 2)f(8)$

Intégration numérique

Exemples:

2) Deux points: On choisit deux point d'intégration $x_0 = a$ et $x_1 = b$ et on remplace f par un polynôme d'interpolation P_1 de degré un tel que:

$$P_1(x) = \frac{(x - a)f(b) - (x - b)f(a)}{b - a}$$

Donc:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tilde{I} = \int_a^b P_1(x)dx = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Méthode du trapèze (un seul) d'ordre 1.

Intégration numérique

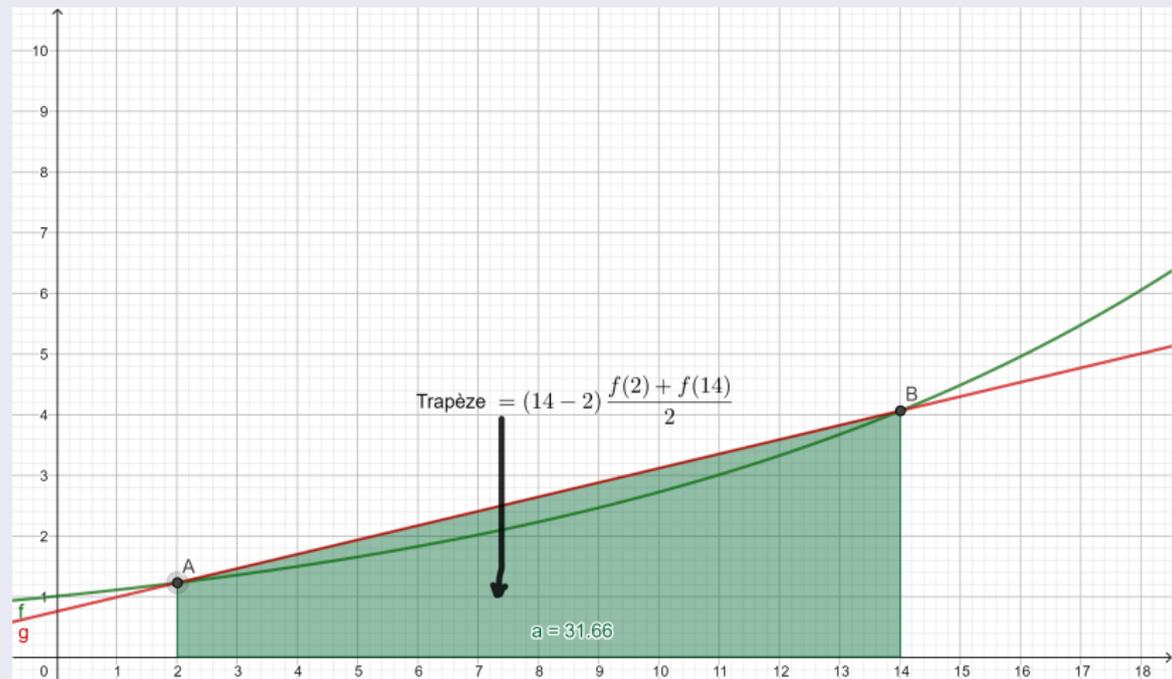
Exemples:

Nous présentons, par la suite, une illustration géométrique de la méthode d'intégration numérique basée sur deux points.



Intégration numérique

Exemples:



Intégration numérique

Méthodes de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthodes basées sur l'interpolation:

Intégration numérique

Méthodes de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthodes basées sur l'interpolation: On détermine P_n un polynôme d'interpolation et on a: $\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_n(x)dx$

Interpolation de Lagrange → Méthode de Newton-cotes. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de calculer P_n mais seulement les $L_i(x)$ puis utiliser la linéarité de l'intégrale.

Intégration numérique

Méthodes de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthodes basées sur l'interpolation: On détermine P_n un polynôme d'interpolation et on a: $\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_n(x)dx$

Interpolation de Lagrange → Méthode de Newton-cotes. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de calculer P_n mais seulement les $L_i(x)$ puis utiliser la linéarité de l'intégrale.

Interpolation de Newton

Intégration numérique

Méthodes de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthodes basées sur l'interpolation: On détermine P_n un polynôme d'interpolation et on a: $\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_n(x)dx$

Interpolation de Lagrange → Méthode de Newton-cotes. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de calculer P_n mais seulement les $L_i(x)$ puis utiliser la linéarité de l'intégrale.

Interpolation de Newton Cette Méthode utilise une base différente de l'espace $\mathbb{P}_n[X]$, à savoir:

$$\begin{cases} N_0(x) = 1 \\ N_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j), \quad k=1,2,\dots,n \end{cases}$$

Intégration numérique

Méthodes de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Dans cette base, le coefficient de $N_k(x)$ est donné par la différence divisée $DD[x_0, x_1, \dots, x_k]$ définie par récurrence (voir chapitre précédent).

Intégration numérique

Méthodes de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Dans cette base, le coefficient de $N_k(x)$ est donné par la différence divisée $DD[x_0, x_1, \dots, x_k]$ définie par récurrence (voir chapitre précédent).

Le calcul de $\int_a^b P_n(x)dx$ peut être réduit au calcul des différences divisées et des polynômes de la base $N_i(x)$ puis utiliser la linéarité de l'intégrale.

Intégration numérique

Méthodes de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Dans cette base, le coefficient de $N_k(x)$ est donné par la différence divisée $DD[x_0, x_1, \dots, x_k]$ définie par récurrence (voir chapitre précédent).

Le calcul de $\int_a^b P_n(x)dx$ peut être réduit au calcul des différences divisées et des polynômes de la base $N_i(x)$ puis utiliser la linéarité de l'intégrale.

A noter, que cette méthode dépend de f , a , b et n et par conséquent, il faut refaire entièrement tous les calculs dès changement de l'une des valeurs! d'ou la nécessité de chercher des méthodes qui dépendent avec moins de paramètres.

La méthode de Newton-cotes présente une première réponse à cette situation.

Intégration numérique

Méthode de Newton-Cotes:

Méthode de Newton-Cotes (cas général): On choisit les $n + 1$ points équidistants définis par:

$$x_i = a + ih = a + i \frac{b - a}{n} \text{ avec } i = 0, 1, \dots, n$$

Le principe de la méthode est basé sur l'utilisation du polynôme d'interpolation de Lagrange pour déterminer les poids ω_i de la quadrature. On montre que le calcul des poids peut être effectué dans $[-1, 1]$ et qu'ils ne dépendent que du nombre de points d'intégration (autrement dit de n).

Intégration numérique

Méthode de Newton-Cotes:

D'abord, définissons le changement de variables affine, qui nous permet d'établir une correspondance entre les intervalles $[a, b]$ et $[-1, 1]$ ainsi que entre les $n + 1$ points d'intégration de chacun des deux intervalles $[a, b]$ et $[-1, 1]$:

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n} \quad \text{and} \quad \theta_i = -1 + i \frac{2}{n}$$

Le changement affine s'écrit sous la forme $\theta = mx + q$ et nous obtenons $m = \frac{2}{b-a}$ and $q = \frac{2}{b-a} \frac{b+a}{2}$ than:

$$x \in [a, b] \rightarrow \theta = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \left(x - \frac{b+a}{2} \right) = \frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} \in [-1, 1]$$

Intégration numérique

Méthode de Newton-Cotes:

Un simple calcul permet de vérifier que les $n + 1$ points de subdivisions des deux intervalles sont liés par:

$$\theta_i = \frac{x_i - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} = -1 + \frac{2i}{n} \text{ avec } i = 0, 1, \dots, n$$

Le polynôme d'interpolation d'une fonction $f \in C([-1, 1])$ est donné par: $P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(\theta_i)L_i(x)$, avec $(L_i(\cdot))_{i=0, \dots, n}$ les polynômes caractéristiques de Lagrange définies, sur $[-1, 1]$, par les $(\theta_i)_{i=0, \dots, n}$:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - \theta_j}{\theta_i - \theta_j}$$

Intégration numérique

Méthode de Newton-Cotes:

Donc:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &\approx \int_{-1}^1 P_n(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n f(\theta_i) L_i(x) dx \\ &\approx \sum_{i=0}^n f(\theta_i) \int_{-1}^1 L_i(x) dx = 2 \sum_{i=0}^n f(\theta_i) \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(x) dx}_{\omega_i} \\ &\approx 2 \sum_{i=0}^n f(\theta_i) \omega_i\end{aligned}$$

Les points θ_i sont distribués d'une manière symétrique autour de 0,
On a: $\theta_{n-i} = -\theta_i$, $L_{n-i}(x) = L_i(-x)$, $\omega_{n-i} = \omega_i$

Intégration numérique

Méthode de Newton-Cotes:

Sur $[a, b]$: calculons $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant le changement de variable:

$$\theta = \frac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}} \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}\theta + \frac{b+a}{2} = a + (\theta + 1)\frac{b-a}{2}$$

avec: $x = a \Rightarrow \theta = -1$, $x = b \Rightarrow \theta = 1$, $dx = \frac{b-a}{2}d\theta$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(a + (\theta + 1)\frac{b-a}{2}\right)d\theta$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \times 2 \sum_{i=0}^n f\left(a + (\theta_i + 1)\frac{b-a}{2}\right)\omega_i$$

Intégration numérique

Méthode de Newton-Cotes:

On en déduit:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n f\left(a + (\theta_i + 1) \frac{b-a}{2}\right) \omega_i = (b-a) \sum_{i=0}^n f(x_i) \omega_i$$

Finalement, en rappelons que $\omega_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(x) dx$, nous obtenons l'expression de la quadrature:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n f(x_i) \omega_i$$

Par conséquent, pour chaque valeur de n , il suffit de déterminer la discrétisation de l'intervalle $[a, b]$ calculer les x_i , puis utiliser les poids ω_i calculé, une seule fois, sur $[-1, 1]$.

Intégration numérique

Ordre d'une méthode d'intégration:

L'ordre, m , d'une méthode d'intégration est le plus grand degré des polynômes intégrés exactement ($I_f = \tilde{I}_f$). Pour vérifier qu'une méthode est d'ordre m , il suffit de considérer $f(x) = x^m$ puis $g(x) = x^{m+1}$ est de vérifier que:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^{i=n} \omega_i f(x_i)$$

et

$$\int_a^b g(x) dx \neq (b-a) \sum_{i=0}^{i=n} \omega_i g(x_i)$$

Intégration numérique

Ordre d'une méthode d'intégration:

Nous pouvons déterminer les ordres de quelques méthodes.

Méthode	Nombre de point	Ordre
Rectangle (à droite, à gauche)	1	0
Point milieu	1	1
Trapèze (un)	2	1
Simpson (Newton-Cotes $n = 2$)	3	3

Concernant la méthode de Newton-cotes, l'ordre dépend de n :
Lorsque n est impair, l'ordre de la méthode est n
Lorsque n est pair, l'ordre de la méthode est $n + 1$.

Intégration numérique

Une autre approche, les méthodes composites.

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Les méthodes composites se basent, généralement, sur le même principe suivant:

- subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en utilisant le pas $h = \frac{b-a}{n}$ et un système de points $x_i = a + ih$
- Appliquer la méthode d'intégration simple, choisie, sur un intervalle correspondant de la forme $[x_i, x_{i+j}]$ (à noter que cette intervalle doit contenir exactement le nombre, nécessaire, de points pour pouvoir appliquer la méthode simple).
- La formule de la méthode composite dépend de n et il se peut que, pour certaines méthodes, n doit vérifier quelques conditions.

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih$ avec $i = 0, 1, \dots, n$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih$ avec $i = 0, 1, \dots, n$

Méthode composite des rectangles à gauche:

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

On pose $h = \frac{b-a}{n}$ et $x_i = a + ih$ avec $i = 0, 1, \dots, n$

Méthode composite des rectangles à gauche:

La méthode simple utilise deux points, les intervalles élémentaires sont sous la forme $[x_i, x_{i+1}]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a + ih)$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode composite des rectangles à droite:



Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode composite des rectangles à droite: $\int_a^b f(x)dx$ La méthode simple utilise deux points, les intervalles élémentaires sont sous la forme $[x_i, x_{i+1}]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} hf(a + (i+1)h)$$

cette formule s'écrit aussi: $\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^n hf(x_i) = \sum_{i=1}^n hf(a+ih)$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode composite des rectangles au milieu:

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode composite des rectangles au milieu:

La méthode simple utilise trois points, les intervalles élémentaires sont sous la forme $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ (n pair)

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} 2hf(x_{2i+1}) = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} 2hf(a + (2i + 1)h)$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Nous pouvons aussi utiliser les points $a_i = a + i\frac{h}{2}$ avec $i = 0, \dots, 2n$ et écrire:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{2n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right)$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Nous pouvons aussi utiliser les points $a_i = a + i\frac{h}{2}$ avec $i = 0, \dots, 2n$ et écrire:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{2n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right)$$

Intégration numérique

Formule ou méthode des trapèzes (composite)

Une discrétisation de l'intervalle $[a, b]$ est un ensemble de points d'intégration x_i qui sont équidistants tels que:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Pour $i = 1, \dots, n$: $h = x_{i+1} - x_i$ est une constante. Notons que:

$$h = \frac{b - a}{n} \quad \text{et} \quad x_i = a + ih$$

Soit I_n la valeur approchée de $I = \int_a^b f(x) dx$ donnée par:

$$I_n = \frac{h}{2} f(a) + h(f(x_1) + \cdots + f(x_i) + \cdots + f(x_{n-1})) + \frac{h}{2} f(b)$$

Intégration numérique

Formule des trapèzes (composite)

que nous pouvons écrire:

$$I_n = \frac{h}{2}f(a) + \frac{h}{2}f(x_1) + \frac{h}{2}f(x_1) + \cdots + \frac{h}{2}f(x_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}) + \cdots + \\ \cdots + \frac{h}{2}f(x_{n-1}) + \frac{h}{2}f(x_{n-1}) + \frac{h}{2}f(b)$$

Soit:

$$I_n = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) + \cdots + \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})) + \\ \cdots + \frac{h}{2}(f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Intégration numérique

Formule des trapèzes (composite)

Remarquons que la quantité:

$$\frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

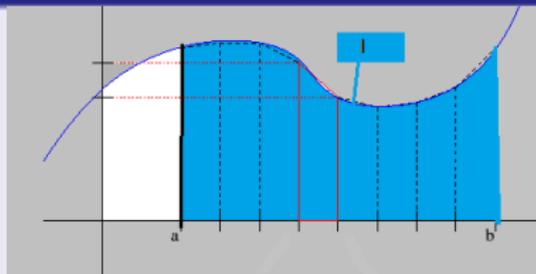
Représente l'aire du Trapèze T_i déterminé par l'axe des abscisses, $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ et la droite qui passe par les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Cette méthode consiste à remplacer l'intégrale I (qui est égale à l'aire comprise entre l'axe des abscisses, $x = a$, $x = b$ et la courbe de f) par la valeur approchée donnée par la somme des aires des n trapèzes T_0, \dots, T_{n-1} :

$$I_n = T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1}$$

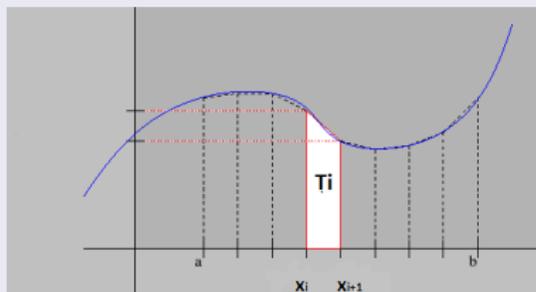
Intégration numérique

Formule des trapèzes - Illustration géométrique

$$I = \int_a^b f(x) dx$$



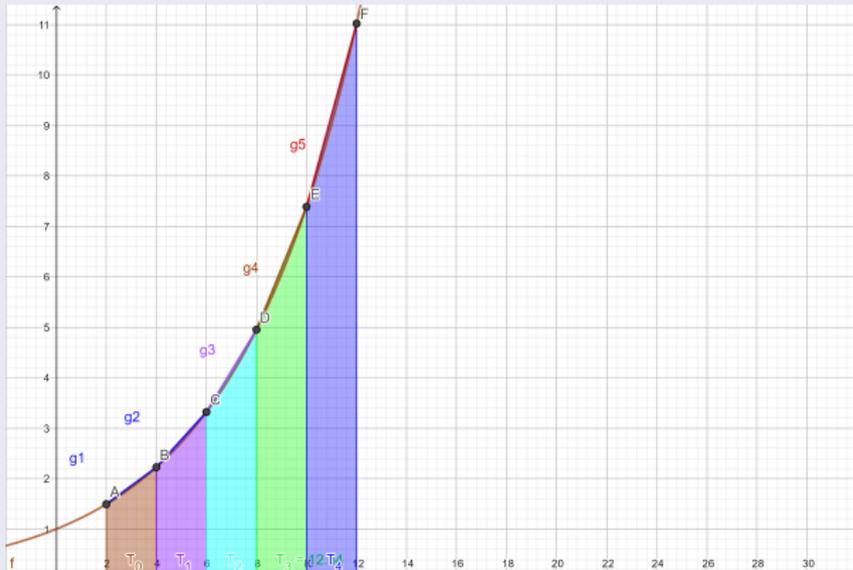
$$I_n = T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1}$$



Intégration numérique

Exemples:

Exemple avec 5 trapèzes



Intégration numérique

Formule des trapèzes

Remarques: 1) Si les points x_i ne sont pas équidistants, nous pouvons généraliser la méthode en posant:

$$h_i = x_{i+1} - x_i \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n$$

L'aire du trapèze T_i est donnée par:

$$\frac{h_i}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

et une valeur approchée de I est donnée par:

$$I_n = T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1}$$

Intégration numérique

Formule des trapèzes

Remarques: 2) Les sommes de Riemann définies par:

$$S_n = \sum_{j=0}^n (a_{j+1} - a_j) f(\theta_j) \text{ avec } \theta_j \in [a_j, a_{j+1}]$$

converge vers l'intégrale de Riemann de f ($I = \int_a^b f(x) dx$).

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode composite des trapèzes:

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode composite des trapèzes:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} hf(x_i) = \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} hf(a+ih)$$

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode de Simpson (Newton-cotes avec $n = 2$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Méthode composite de Simpson:

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode de Simpson (Newton-cotes avec $n = 2$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Méthode composite de Simpson: Application de la méthode de Simpson dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+2}]$ (n est pair):

Intégration numérique

Méthodes composites de calcul de $\int_a^b f(x)dx$

Méthode de Simpson (Newton-cotes avec $n = 2$)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Méthode composite de Simpson: Application de la méthode de Simpson dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+2}]$ (n est pair):

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(a_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(a_{2j-1}) + f(b) \right]$$

Intégration numérique

Evaluation de l'erreur

A l'image des autres chapitres, l'erreur est la valeur absolue de la différence entre la valeur exacte I et la valeur approchée

$\tilde{I} = \int_a^b P(x)dx$ et nous pouvons écrire:

$$E_{[a,b]}(f) = \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - P(x)|dx$$

$$E_{[a,b]}(f) \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|$$

Remarquons que $|f(x) - P(x)|$ est l'erreur ponctuelle de l'interpolation, par conséquent, nous pouvons utiliser l'évaluation et la majoration de cette erreur telle qu'elle est donnée dans le chapitre précédent.

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur

A titre de rappel, l'estimation et majoration de l'erreur d'interpolation sont données respectivement par: Il existe $\eta \in [a, b]$ tel que:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n) f^{(n+1)}(\eta)$$

et:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |(x - x_0) \cdots (x - x_n)| \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur: Rectangle à gauche

$n = 0$ et $x_0 = a$: donc, il existe $\eta \in [a, b]$ tel que:

$$f(x) - P_0(x) = \frac{1}{(0+1)!} (x - x_0) f^{(1)}(\eta) = (x - a) f'(\eta)$$

$$E_{[a,b]}(f) \leq \int_a^b |f(x) - P_0(x)| dx = |f'(\eta)| \int_a^b |x - a| dx$$

$$E_{[a,b]}(f) \leq |f'(\eta)| \int_a^b (x - a) dx \leq \frac{(b - a)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur: Rectangle à gauche (composite)

Méthode composite de n sous-intervalles de $[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$

$$E_{[a,b]}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} E_{[x_i, x_{i+1}]}(f) \leq n \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

$$E_{[a,b]}(f) \leq \frac{(b-a)h}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| = \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur: Rectangle à droite

$n = 0$ et $x_0 = b$: donc, il existe $\eta \in [a, b]$ tel que:

$$f(x) - P_0(x) = \frac{1}{(0+1)!} (x - x_0) f^{(1)}(\eta) = (x - b) f'(\eta)$$

$$E_{[a,b]}(f) \leq \int_a^b |f(x) - P_0(x)| dx = |f'(\eta)| \int_a^b |x - b| dx$$

$$E_{[a,b]}(f) \leq |f'(\eta)| \int_a^b (b - x) dx \leq \frac{(b - a)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur: Rectangle à droite (composite)

Méthode composite de n sous-intervalles de $[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$

$$E_{[a,b]}^n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} E_{[x_i, x_{i+1}]}(f) \leq n \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

$$E_{[a,b]}^n(f) \leq \frac{(b-a)h}{2} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| = \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur: Rectangle au milieu

$n = 0$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$ et $P_0(x) = f(\frac{a+b}{2})$. La formule de Taylor appliquée au point $\frac{a+b}{2}$ assure l'existence de $\eta \in [a, b]$ tel que:

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\eta)$$

L'erreur est formulée par:

$$E_{[a,b]}(f) = \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx \right| = \left| \int_a^b \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right) dx \right|$$

$$E_{[a,b]}(f) = \left| \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\eta) \right) dx \right|$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur: Rectangle au milieu

$$E_{[a,b]}(f) \leq \left| \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2} \right) f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) dx \right| + \left| \int_a^b \left(\frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 f''(\eta) \right) dx \right|$$

et:

$$E_{[a,b]}(f) \leq \underbrace{\left| \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2} \right) f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right) dx \right|}_{=0} + \underbrace{\left| \int_a^b \left(\frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 f''(\eta) \right) dx \right|}_{\leq \frac{(b-a)^3}{24} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|}$$

$$E_{[a,b]}(f) \leq \frac{(b-a)^3}{24} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur: Rectangle au milieu (composite)

Méthode composite de n sous-intervalles de $[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$

$$E_{[a,b]}^n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} E_{[x_i, x_{i+1}]}(f) \leq n \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{24} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$E_{[a,b]}^n(f) \leq \frac{(b-a)h^2}{24} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur: Trapèze

On montre que:

$$E_{[a,b]}(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur: Trapèze (composite)

Méthode composite de n sous-intervalles de $[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$

$$E_{[a,b]}^n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} E_{[x_i, x_{i+1}]}(f) \leq n \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{12} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

$$E_{[a,b]}^n(f) \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur: Simpson

On montre que:

$$E_{[a,b]}(f) \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Intégration numérique

Estimation de l'Erreur: Simpson (composite)

Méthode composite de n sous-intervalles de $[a, b]$, $h = \frac{b-a}{n}$

$$E_{[a,b]}^n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} E_{[x_i, x_{i+1}]}(f) \leq n \frac{(x_{i+1} - x_i)^5}{2880} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

$$E_{[a,b]}^n(f) \leq \frac{(b-a)h^4}{2880} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)| = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Intégration numérique

Les méthodes précédentes fixent d'abord les points x_i et cherchent les poids ω_i . Pour améliorer la méthode, on peut chercher à optimiser le choix des x_i pour obtenir la meilleure approximation (de maximiser l'ordre de la méthode, $n + 1$ au maximum). On se place sur $[-1, 1]$ et on cherche les points x_i et les poids ω_i pour minimiser la différence:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{i=0}^n f(x_i) \omega_i$$

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre:

Théorème:

Il existe un choix et un seul des points x_i et des poids ω_i de sorte que la méthode soit d'ordre $p = 2n + 1$. Les points x_i sont les zéros du polynôme de Legendre \mathbb{L}_{n+1} . Les poids ω_i sont donnés par plusieurs formules, en particulier:

D'autre part, l'erreur est donnée par:

$$E(f) = c \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \text{ où } \xi \in [-1, 1] \text{ à condition: } f \text{ suffisamment régulière}$$

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre:

\mathbb{L}_{n+1} définit par la relation de récurrence:

$$(n+1)\mathbb{L}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathbb{L}_n(x) - n\mathbb{L}_{n-1}(x), \text{ avec } \mathbb{L}_0 = 1 \text{ et } \mathbb{L}_1 = x$$

Pour déterminer les racines, $(x_i)_{i=0,\dots,n}$, de $\mathbb{L}_{n+1}(x)$ nous pouvons utiliser la formule équivalente suivante:

$$x\mathbb{L}_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}\mathbb{L}_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}\mathbb{L}_{n-1}(x)$$

et x est une valeur propre d'une matrice tridiagonale (à déterminer).

En pratique, nous pouvons utiliser une méthode numérique pour déterminer des valeurs approchées des racines $(x_i)_{i=0,\dots,n}$.

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre:

$$\mathbb{L}_0 = 1, \mathbb{L}_1 = x \text{ et } \mathbb{L}_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Un seul point d'intégration: $x_0 = 0$ et $\omega_0 = 2$

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre:

$$\mathbb{L}_0 = 1, \mathbb{L}_1 = x \text{ et } \mathbb{L}_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Un seul point d'intégration: $x_0 = 0$ et $\omega_0 = 2$

Deux points $\mp \sqrt{\frac{1}{3}}$ et les poids: $\omega_i = 1, i = 0, 1$

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre:

$$\mathbb{L}_0 = 1, \mathbb{L}_1 = x \text{ et } \mathbb{L}_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Un seul point d'intégration: $x_0 = 0$ et $\omega_0 = 2$

Deux points $\mp \sqrt{\frac{1}{3}}$ et les poids: $\omega_i = 1, i = 0, 1$

Trois points d'intégration: $\mathbb{L}_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \Rightarrow x_i = \mp \sqrt{\frac{3}{5}}, 0$ et
 $\omega_i = \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{5}{9}$

Intégration numérique

Méthode de Gauss-Legendre:

- 1) Les points d'intégration, $(x_i)_{i=0,\dots,n-1}$, racines du polynôme de Legendre \mathbb{L}_n ,
- 2) Les poids $(\omega_i)_{i=0,\dots,n-1}$ sont aussi donnés par:

$$\omega_i = \frac{-2}{(n+1)\mathbb{L}'_n(x_i)\mathbb{L}_{n+1}(x_i)} = \frac{2}{(1-x_i^2)(\mathbb{L}'_n(x_i))^2} \text{ pour } i = 0, \dots, n$$

- 3) \mathbb{L}_n est défini aussi comme solution de l'équation de Legendre:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0$$

C'est à dire que \mathbb{L}_n vérifie: $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\mathbb{L}_n}{dx} \right] + n(n+1)\mathbb{L}_n = 0$.

Résolution des Équations différentielles

Introduction et Position du problème

Une équation différentielle d'inconnu y (une fonction) s'écrit:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Lorsque on ne peut pas appliquer les méthodes usuelles (forme explicite compliquée), on cherche à appliquer des méthodes numériques.

Résolution des Équations différentielles

Introduction et Position du problème

Une équation différentielle d'inconnu y (une fonction) s'écrit:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Lorsque on ne peut pas appliquer les méthodes usuelles (forme explicite compliquée), on cherche à appliquer des méthodes numériques.

En particulier, nous considérons le **problème de Cauchy**:

$$y'(t) = f(y(t), t) \text{ si } t > 0 \text{ avec la condition initiale } y(0) = y_0$$

$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Résolution des Équations différentielles

Introduction et Position du problème

Théorème (Cauchy-Lipschitz) Si $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable: Il existe $L > 0$ tel que:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \text{ pour tout } t > 0 \text{ et tout } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Alors, le problème de Cauchy admet une solution globale (définie pour tout $t > 0$) et cette solution est unique.

Résolution numérique des équations différentielles

Méthodologie

Soit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{n+1} < \dots < t_n = b$ une partition de points équidistants de $[a, b]$ avec $h = t_{i+1} - t_i$ le pas de la partition.

Une solution numérique de l'équation différentielle consiste à trouver une suite de valeurs $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ qui constituent des approximations des valeurs de la solution $y(t)$ aux points $(t_i)_{i=0, \dots, n}$;

Chaque y_i est une approximation de $y(t_i)$ et le problème de Cauchy s'écrit pour $t = t_i$ comme suit:

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) = f(t_i, y_i)$$

Résolution numérique des équations différentielles

Méthodologie

Deux approches possibles:

- Intégrer, entre t_i et t_{i+1} , ou sur un intervalle de la forme $[x_i, x_{i+j}]$, les deux membres de l'équation et utiliser une méthode numérique pour calculer l'intégrale du second membre,
- Utiliser les méthodes de calcul numérique de la dérivée pour obtenir une approximation de $y'(t_i)$.

Étude générale des méthodes à un pas:

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2:

L'intégration de l'équation $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_i et t_{i+1} , on obtient:

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

La méthode de rectangle à gauche donne la méthode progressive d'Euler (explicite):

$$y_{i+1} - y_i = hf(t_i, y(t_i)) = hf(t_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

La méthode de rectangle à droite donne la méthode retrograde d'Euler (implicite):

$$y_{i+1} - y_i = hf(t_{i+1}, y(t_{i+1})) = hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

Étude générale des méthodes à un pas:

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2:

En calculant l'intégrale du second membre dans:

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

par la méthode du trapèze, on obtient le schéma implicite suivant (appelée: Méthode de **Crank-Nicolson** ou du trapèze):

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})] \text{ pour } i = 0, 1, \dots$$

Étude générale des méthodes à un pas:

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2:

Cette méthode implicite peut être adaptée à un schéma explicite (appelée: Méthode de **Heun**)

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_i + hf(t_i, y_i))] \text{ pour } i = 0, 1, \dots$$

Remarque: Les deux méthodes sont d'ordre 2 par rapport à h .

Étude générale des méthodes à un pas:

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2:

Si l'intégrale est approchée par la méthode du point milieu, on obtient:

$$y_{i+1} - y_i = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

avec $y_{i+\frac{1}{2}}$ est une approximation de $y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)$. Si on utilise l'approximation:

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2}f(t_i, y_i)$$

On trouve la méthode d'Euler modifiée:

$$y_{i+1} - y_i = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(t_i, y_i)\right)$$

Étude générale des méthodes à un pas:

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2:

Une variante consiste à appliquer la méthode point milieu sur l'intervalle $[x_i, x_{i+2}]$:

$$y_{i+2} - y_i = 2hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

Étude générale des méthodes à un pas:

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2:

Les méthodes de **Heun** et d'**Euler modifiée** sont des cas particuliers dans la famille des méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2. il existe d'autres méthodes plus avancées, comme par exemple, la méthode d'ordre 4 suivante (Obtenue en calculant l'intégrale par la méthode de Simpson):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

avec:

$$K_1 = f(t_i, y_i), \quad K_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_2\right), \quad K_4 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_3\right)$$

Dérivation numérique et résolution des Équations ...

Dérivée numérique:

Soit y une fonction de classe $C^1([a, b])$ et $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, une partition de $n + 1$ points équidistants dans $[a, b]$ et $h = \frac{b-a}{n}$ la distance entre deux points consécutifs.

La dérivée est donnée par l'une des trois formules:

$$y'(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h}$$

$$y'(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t_i) - y(t_i - h)}{h}$$

$$y'(t_i) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(t_i + h) - y(t_i - h)}{2h}$$

Dérivation numérique et résolution des Équations ...

Dérivée numérique:

Une approximation numérique $(Dy)_i$ de $y'(t_i)$ peut être définie:

- Différence finie progressive (ou décentrée à droite):

$$(Dy)_i^P = \frac{y(t_i + h) - y(t_i)}{h} = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} \text{ avec } i = 0, 1, \dots, n-1$$

- Différence finie rétrograde (ou décentrée à gauche):

$$(Dy)_i^R = \frac{y(t_i) - y(t_i - h)}{h} = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{h} \text{ avec } i = 1, \dots, n$$

- Différence finie centrée :

$$(Dy)_i^C = \frac{y(t_i + h) - y(t_i - h)}{2h} = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1})}{2h} \text{ avec } i = 1, \dots, n-1$$

Dérivation numérique et résolution des Équations ...

Dérivée numérique:

Si y une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$, il existe θ entre t_i et t avec (Formule de Taylor):

$$y(t) = y(t_i) + y'(t_i)(t - t_i) + \frac{y''(\theta)}{2}(t - t_i)^2$$

- Pour $t = t_{i+1}$ on obtient:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(\theta)}{2}(t_{i+1} - t_i)^2$$

Soit:

$$(Dy)_i^P = y'(t_i) + \frac{h}{2}y''(\theta)$$

Dérivation numérique et résolution des Équations ...

Dérivée numérique:

D'ou:

$$|y'(t_i) - (Dy)_i^P| \leq Kh \text{ avec } K = \frac{1}{2} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} y''(t)$$

- Pour $t = t_{i-1}$ on obtient:

$$y(t_{i-1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i-1} - t_i) + \frac{y''(\theta)}{2}(t_{i-1} - t_i)^2$$

Soit: $(Dy)_i^R = y'(t_i) - \frac{h}{2}y''(\theta)$. D'ou:

$$|y'(t_i) - (Dy)_i^R| \leq Kh \text{ avec } K = \frac{1}{2} \max_{t \in [t_{i-1}, t_i]} y''(t)$$

Dérivation numérique et résolution des Équations ...

Dérivée numérique:

Si y une fonction de classe $C^3(\mathbb{R})$, il existe θ entre t_i et t avec (Formule de Taylor):

$$y(t) = y(t_i) + y'(t_i)(t - t_i) + \frac{y''(t_i)}{2}(t - t_i)^2 + \frac{y'''(\theta)}{6}(t - t_i)^3$$

On obtient pour $t = t_{i+1}$ et $t = t_{i-1}$:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{y''(t_i)}{2}(t_{i+1} - t_i)^2 + \frac{y'''(\theta_1)}{6}(t_{i+1} - t_i)^3$$

$$y(t_{i-1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i-1} - t_i) + \frac{y''(t_i)}{2}(t_{i-1} - t_i)^2 + \frac{y'''(\theta_2)}{6}(t_{i-1} - t_i)^3$$

Dérivation numérique et résolution des Équations ...

Dérivée numérique:

Soit:

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(t_i)(h) + \frac{y''(t_i)}{2}(h)^2 + \frac{y'''(\theta_1)}{6}(h)^3$$

$$y(t_{i-1}) - y(t_i) = y'(t_i)(-h) + \frac{y''(t_i)}{2}(-h)^2 + \frac{y'''(\theta_2)}{6}(-h)^3$$

On obtient donc:

$$(Dy)_i^C = y'(t_i) + \frac{y'''(\theta_1) + y'''(\theta_2)}{12} h^2$$

et

$$|y'(t_i) - (Dy)_i^C| \leq Kh^2 \text{ avec } K = \frac{1}{6} \max_{t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]} y'''(t)$$

Dérivation numérique et résolution des Équations ...

Dérivée numérique:

L'erreur lié à ce calcul:

$$e_i^P = |y'(t_i) - (Dy)_i^P|$$

$$e_i^R = |y'(t_i) - (Dy)_i^R|$$

$$e_i^C = |y'(t_i) - (Dy)_i^C|$$

Cet erreur est appelé: **Erreur de troncature au point t_i en utilisant la différence progressive** (resp. Rétrograde) (resp. centrée).

Remarque: Les méthodes progressive et rétrograde sont d'ordre 1 et la méthode centrée est d'ordre 2.

Dérivation numérique et résolution des Équations ...

Méthodes d'Euler:

Par la suite, on utilise l'une des formules de dérivée numérique pour $y'(t_i)$ et on obtient les approximations suivantes:

Schéma d'Euler Progressif:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(t_i, y_i) & \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

Schéma d'Euler retrograde:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}-y_i}{h} = f(t_{i+1}, y_{i+1}) & \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

