Analyse Numérique et Algorithmique

Bouchaib FERRAHI

2023/2024

Plan

1. Analyse Numérique
   - Calculs numériques approchés
   - Zéros de fonctions non-linéaires
   - Approximation et Interpolation Polynômiale
   - Intégration numérique
   - Equations différentielles
   - Systèmes linéaires
2. Algorithmique
   - Introduction et initiation à l'algorithmique
   - Terminologie - Définitions
   - Notions Complémentaires et avancées

Interpolation Polynômiale

Approximation et Interpolation Polynômiale

- Une motivation pratique
- Position du problème
- Différence entre l'interpolation et l'approximation
- Polynômes d'interpolation de Lagrange
- Méthode directe
- Différences divisées et Interpolation de Newton
- Amélioration de l'interpolation
- Estimation de l'erreur
- D'autres formes d'interpolation
- Remarques et discussions

Approximation et Interpolation Polynômiale

Une motivation pratique - Position du problème:

Une expérience au laboratoire a permet de relever les températures T_1, T_2,..., T_n d'une solution au cours de différents instants t_1, t_2,..., t_n. Ces données peuvent être représentées graphiquement (en un ensemble de points).

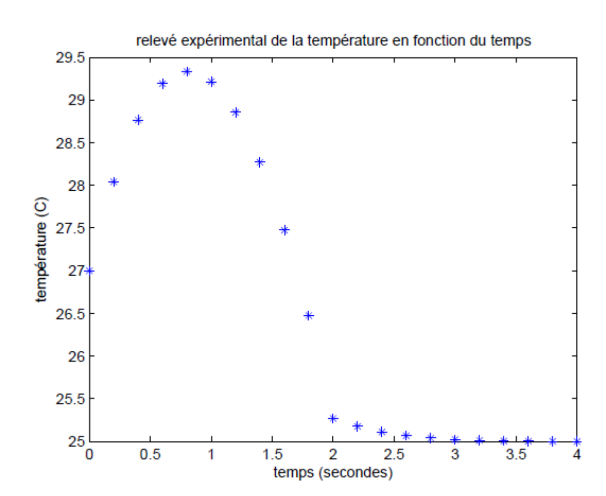
D'autre part, la théorie chimique permet d'exprimer la temperature comme fonction du temps: $T = f(t)$. La forme explicite de la fonction f peut être non déterminée!,

- Si f est connue explicitement, nous pouvons comparer T_i et $f(t_i)$ pour $i = 1, ..., n$ et vérifier si l'expérience a été effectuée dans de bonnes conditions.

- Si f n'est pas connue explicitement, nous pouvons chercher une approximation de f (comme fonction) vérifiant: $T_i = f(t_i)$ pour $i = 1, ..., n$.

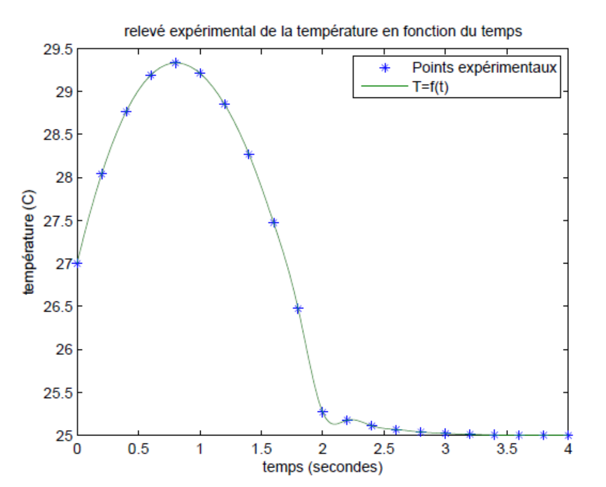
Approximation et Interpolation Polynômiale

Position du problème - une motivation pratique:



Approximation et Interpolation Polynômiale

Position du problème - une motivation pratique:



Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarques:

- En général, on cherche une approximation de f par des fonctions simples et régulières (Polynômes, Polynômes par morceaux, polynômes trigonométriques, exceptionnelles,...).
- Si la fonction f est donnée par sa forme explicite, l'approximation polynômiale permet de trouver une fonction "plus simple" (souvent polynôme P_n) qui coincide avec f en un nombre de points et qui permet plus de "flexibilité" dans l'étude de f.
- Si la fonction f n'est pas donnée par sa forme explicite, l'approximation polynômiale permet de trouver une fonction (souvent polynôme P_n) dont la courbe passe par les points déterminés d'une fonçon expérimentale et qu'elle peut être considérée comme une forme explicite de f.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarques:

- Lorsque la courbe de P_n passe par TOUS les points

$\rightarrow$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarques:

- Lorsque la courbe de P_n passe par TOUS les points
$\rightarrow$**Interpolation Polynômiale**.
- Lorsque la courbe de P_n ne passe pas par TOUS les points
$\rightarrow$

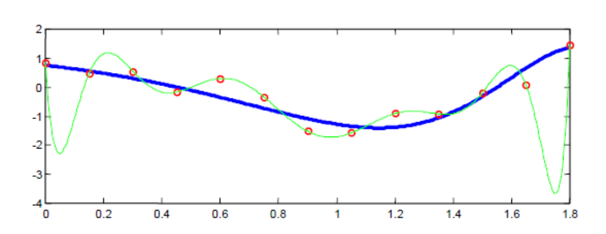
Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarques:

- Lorsque la courbe de P_n passe par TOUS les points
$\rightarrow$**Interpolation Polynômiale**.
- Lorsque la courbe de P_n ne passe pas par TOUS les points
$\rightarrow$**Approximation Polynômiale**.

Approximation et Interpolation Polynômiale

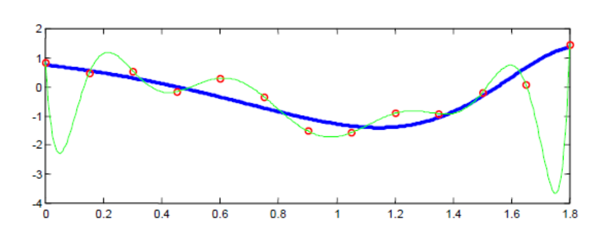
Remarque:



- La courbe Bleu $\rightarrow$

Approximation et Interpolation Polynômiale

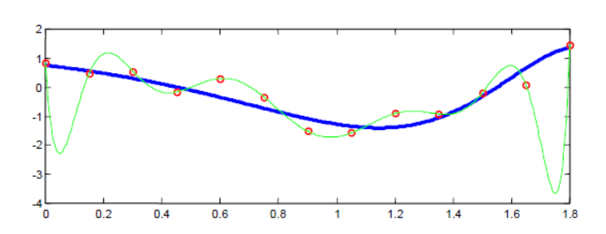
Remarque:



- La courbe Bleu →Approximation Polynômiale,
- La courbe verte →

Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarque:



- La courbe Bleu →Approximation Polynômiale,
- La courbe verte →Interpolation Polynômiale.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Outils Mathématiques:

- $\mathbb{P}_n[X]$, muni de la somme et la multiplication par un nombre réel, est l'espace vectoriel des fonctions polynômes: $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. On a: $dim\mathbb{P}_n[X] = n + 1$ et une base de $\mathbb{P}_n[X]$ est donnée par: $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Outils Mathématiques:

- $\mathbb{P}_n[X]$, muni de la somme et la multiplication par un nombre réel, est l'espace vectoriel des fonctions polynômes: $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. On a: $dim\mathbb{P}_n[X] = n+1$ et une base de $\mathbb{P}_n[X]$ est donnée par: $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$.
- **Position du problème:** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ (i.e: $f \in C^0([a, b])$) et $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ $n+1$ points distincts dans $[a, b]$.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Outils Mathématiques:

- $\mathbb{P}_n[X]$, muni de la somme et la multiplication par un nombre réel, est l'espace vectoriel des fonctions polynômes: $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. On a: $dim\mathbb{P}_n[X] = n + 1$ et une base de $\mathbb{P}_n[X]$ est donnée par: $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$.
- **Position du problème:** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ (i.e: $f \in C^0([a, b])$) et $x_0, x_1, ..., x_n \in [a, b]$ $n + 1$ points distincts dans $[a, b]$.

On cherche un polynôme P_n de degré au plus égal à n ($P_n \in \mathbb{P}_n[X]$) tel que: $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, ..., n$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Outils Mathématiques:

- $\mathbb{P}_n[X]$, muni de la somme et la multiplication par un nombre réel, est l'espace vectoriel des fonctions polynômes: $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n. On a: $dim\mathbb{P}_n[X] = n+1$ et une base de $\mathbb{P}_n[X]$ est donnée par: $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$.
- **Position du problème:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ (i.e: $f \in C^0([a,b])$) et $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$ $n+1$ points distincts dans $[a,b]$.

On cherche un polynôme P_n de degré au plus égal à n $(P_n \in \mathbb{P}_n[X])$ tel que: $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, ..., n$

Lorsque P_n existe, il est appelé **Polynôme d'interpolation** de f.

Remarque: On peut aussi chercher le polynôme d'interpolation aux points (x_i) des $n+1$ valeurs $y_0, y_1, ..., y_n$ en remplaçant $f(x_i)$ par y_i.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarques:

- Le polynôme d'interpolation n'est pas forcément de degré égal à n, il peut être inférieur strictement à n,
- Le problème tel que défini à une et une seule solution (voir La Méthode de Lagrange),
- La situation n'est plus la même si on cherche, dans les mêmes conditions, un polynôme de degré $m \neq n$. Dans ce cas, le problème peut avoir plusieurs solutions ou aucune solution!

Approximation et Interpolation Polynômiale

Méthode d'interpolation de Lagrange:

Pour $x_0, x_1, ..., x_n$, on définit les polynômes caractéristiques de Lagrange (L_i) avec $i = 0, 1, ..., n$ par:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{j=n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \text{ avec } i = 0, 1, ..., n$$

On a:
- L_i est de degré n,
- $L_i(x_i) = 1$ et si $j \neq i$ alors $L_i(x_j) = 0$ ce que nous pouvons noter avec le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ avec } i = 0, 1, ..., n \text{ et } j = 0, 1, ..., n$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Méthode d'interpolation de Lagrange:

- Les $n+1$ polynômes caractéristiques de Lagrange $(L_i)_i$ constituent une base de $\mathbb{P}_n[X]$ (il suffit de montrer que cette famille est libre);
- Le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ est donnée par:

$$P_n(X) = \sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)L_i(X)$$

- Ce polynôme est unique, en effet, soit $Q_n(X)$ un autre polynôme d'interpolation, alors: $P(x_i) - Q(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$;

Le polynôme $P - Q$ de degré n s'annule en $n+1$ points distincts donc $P - Q = 0$ d'ou l'unicité.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Théorème: Existence et unicité

Le problème de trouver un polynôme P_n d'interpolation d'une fonction f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$, admet une solution et une seule donnée par:

$$P_n(X) = \sum_{i=0}^{i=n} f(x_i) L_i(X)$$

$(L_i)_i$: les $n+1$ polynômes caractéristiques de Lagrange.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarque:

Le problème de chercher le polynôme d'interpolation des $n+1$ points $y_0, y_1, ..., y_n$ (données expérimentales par exemple) s'obtient en remplaçant $f(x_i)$ par y_i.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

• $n = 1$: Nous avons deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) et nous cherchons le polynôme de degré 1 (ou la droite qui passe par les deux points) tel que: $y = ax + b$, on a:

$$y_0 = ax_0 + b \text{ et } y_1 = ax_1 + b$$

donc:

$$a = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \text{ et } b = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}$$

On obtient:

$$y = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} x + \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1} = y_0 \underbrace{\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}}_{L_0(x)} + y_1 \underbrace{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}}_{L_1(x)}$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

• $n = 2$ Soit f avec fonction telle que: $f(-1) = 8$, $f(0) = 3$ et $f(1) = 6$ cherchons le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. On a:

$$L_0(x) =$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

- $n = 2$ Soit f avec fonction telle que: $f(-1) = 8$, $f(0) = 3$ et $f(1) = 6$ cherchons le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. On a:

$$L_0(x) = \prod_{j=0, j\neq 0}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} =$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

• $n = 2$ Soit f avec fonction telle que: $f(-1) = 8$, $f(0) = 3$ et $f(1) = 6$ cherchons le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. On a:

$$L_0(x) = \prod_{j=0, j\neq 0}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

$$L_1(x) =$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

- $n = 2$ Soit f avec fonction telle que: $f(-1) = 8$, $f(0) = 3$ et $f(1) = 6$ cherchons le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. On a:

$$L_0(x) = \prod_{j=0, j\neq 0}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

$$L_1(x) = \prod_{j=0, j\neq 1}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} =$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

- $n = 2$ Soit f avec fonction telle que: $f(-1) = 8$, $f(0) = 3$ et $f(1) = 6$ cherchons le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. On a:

$$L_0(x) = \prod_{j=0, j\neq 0}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

$$L_1(x) = \prod_{j=0, j\neq 1}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -x^2 + 1$$

$$L_2(x) =$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

- $n = 2$ Soit f avec fonction telle que: $f(-1) = 8$, $f(0) = 3$ et $f(1) = 6$ cherchons le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. On a:

$$L_0(x) = \prod_{j=0, j\neq 0}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

$$L_1(x) = \prod_{j=0, j\neq 1}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -x^2 + 1$$

$$L_2(x) = \prod_{j=0, j\neq 2}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} =$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

- $n = 2$ Soit f avec fonction telle que: $f(-1) = 8$, $f(0) = 3$ et $f(1) = 6$ cherchons le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. On a:

$$L_0(x) = \prod_{j=0, j\neq 0}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$

$$L_1(x) = \prod_{j=0, j\neq 1}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = -x^2 + 1$$

$$L_2(x) = \prod_{j=0, j\neq 2}^{j=2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

Donc:

$$P_2(x) =$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

Donc:

$$P_2(x) = 8L_0(x) + 3L_1(x) + 6L_2(x)$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

Donc:

$$P_2(x) = 8L_0(x) + 3L_1(x) + 6L_2(x)$$

$$P_2(x) = 8(\frac{1}{2}(x^2 - x) + 3(-x^2 + 1) + 6(\frac{1}{2}(x^2 + x))$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

Donc:

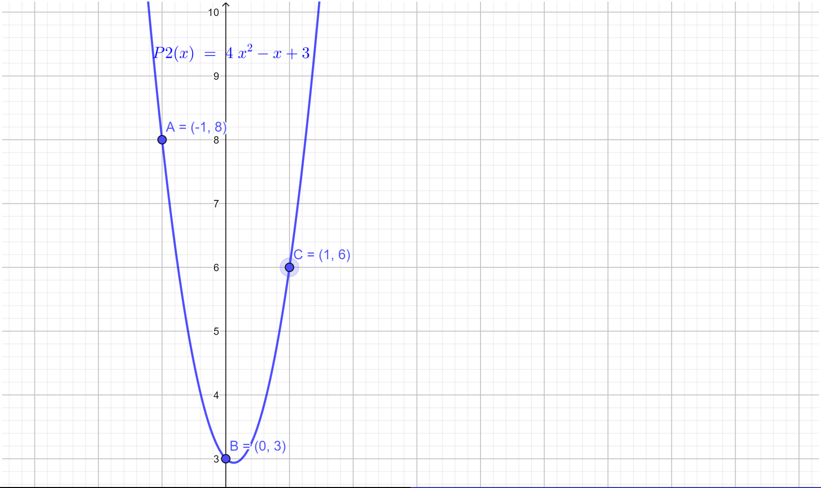
$$P_2(x) = 8L_0(x) + 3L_1(x) + 6L_2(x)$$

$$P_2(x) = 8(\frac{1}{2}(x^2 - x) + 3(-x^2 + 1) + 6(\frac{1}{2}(x^2 + x))$$

$$P_2(x) = 4x^2 - x + 3$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

$P_2(x)$ est le seul polynôme de degré, au plus, égal à 2 dont la courbe passe par les trois points.



Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

Cas ou f est donnée par sa forme explicite: Soit $f(x) = e^x$ et soient les points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Alors, le polynôme d'interpolation de f par rapport aux trois points est donnée par:

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

Cas ou f est donnée par sa forme explicite: Soit $f(x) = e^x$ et soient les points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Alors, le polynôme d'interpolation de f par rapport aux trois points est donnée par:

$$P_2(x) =$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

Cas ou f est donnée par sa forme explicite: Soit $f(x) = e^x$ et soient les points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Alors, le polynôme d'interpolation de f par rapport aux trois points est donnée par:

$$P_2(x) = e^{-1}L_0(x) + e^0 L_1(x) + e^1 L_2(x)$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemples:

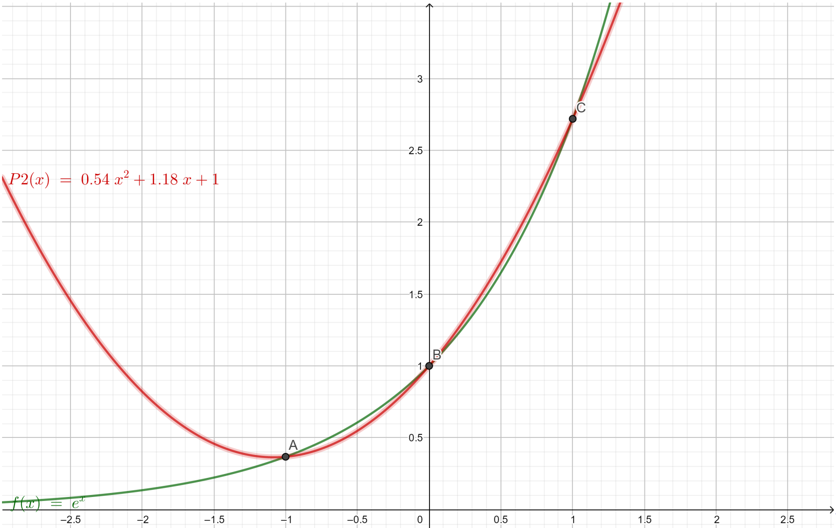
Cas ou f est donnée par sa forme explicite: Soit $f(x) = e^x$ et soient les points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Alors, le polynôme d'interpolation de f par rapport aux trois points est donnée par:

$$P_2(x) = e^{-1}L_0(x) + e^0 L_1(x) + e^1 L_2(x)$$

$$P_2(x) = (\frac{e^1 + e^{-1}}{2} - 1)x^2 + \frac{e^1 - e^{-1}}{2}x + 1 \approx 0.54x^2 + 1.18x + 1$$

On a: $P_2(-1) = e^1$, $P_2(0) = e^0$ et $P_2(1) = e^1$
On peut utiliser $P_2(.)$ pour obtenir des valeurs approchées:
$f(-0.5) = e^{-0.5} \approx P_2(0.5)$ et $f(0.9) = e^{0.9} \approx P_2(0.9)$
Remarquons que cette approximation n'est valable que sur l'intervalle $[-1, 1]$

Approximation et Interpolation Polynômiale



Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarque:

Le problème peut être abordé d'un autre point vue. En effet, P_n peut s'écrire sous la forme:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

En exploitant les égalités $P_n(x) = f(x_i) = y_i$ pour $i = 0, 1, ..., n$, nous obtenons un système de $n+1$ équations avec $n+1$ inconnus:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + ... + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + ... + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_n x_1^n = y_1 \\ .... \\ a_0 + a_1 x_n + ... + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_n x_n^n = y_n, \end{cases}$$

ce système s'écrit:

Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarque:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ce système admet une solution et une seule car son matrice est une matrice de **Van de Monde** qui est inversible car son déterminant qui est égal à:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (xi - x_j)$$

est non nul puisque les x_i sont supposés distincts!

Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarque:

Ce résultat n'a qu'un caractère théorique: s'il énonce une condition nécessaire et suffisante simple pour que le problème d'interpolation admette une solution unique, il est pratiquement inutilisable en pratique si l'on veut calculer de manière effective le polynôme d'interpolation P_n. Il faut, en effet, résoudre un système linéaire plein.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarque:

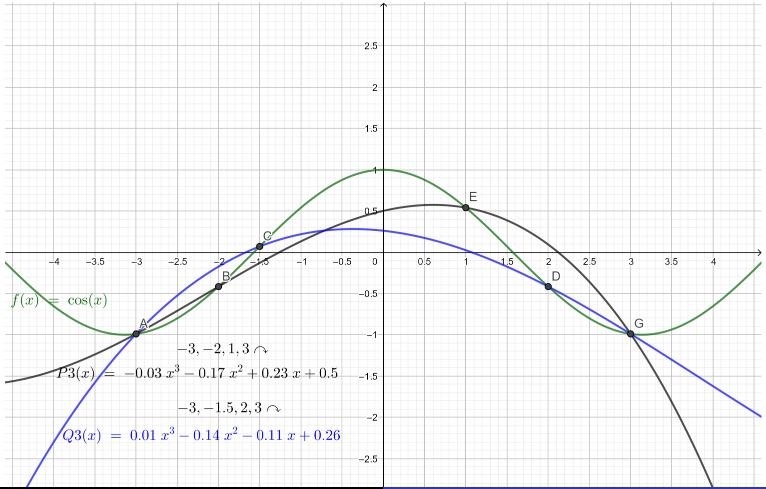
Ce résultat n'a qu'un caractère théorique: s'il énonce une condition nécessaire et suffisante simple pour que le problème d'interpolation admette une solution unique, il est pratiquement inutilisable en pratique si l'on veut calculer de manière effective le polynôme d'interpolation P_n. Il faut, en effet, résoudre un système linéaire plein.

Remarque:

Soit $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation d'une fonction f par rapport aux points x_0, x_1,..., x_n.
et $\overline{P}_n(x)$ le polynôme d'interpolation d'une fonction f par rapport aux points a_0, a_1,..., a_n.
Existe-t-elle une relation entre $P_n(x)$ et $\overline{P}_n(x)$??

Approximation et Interpolation Polynômiale

Deux polynômes d'interpolation de degré 3, de la même fonction, en utilisant deux systèmes de points.



Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarque:

Lorsque on change les points utilisés (appelés Noeuds), le polynôme d'interpolation change aussi!
Exemple: Soit $f(x) = e^x$ et soient les points $x_0 = -1.5$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1.5$.
Polynôme d'interpolation: $Q_2(x) \approx 0.6x^2 + 1.42x + 1$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarque:

Lorsque on change les points utilisés (appelés Noeuds), le polynôme d'interpolation change aussi!

Exemple: Soit $f(x) = e^x$ et soient les points $x_0 = -1.5$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1.5$.

Polynôme d'interpolation: $Q_2(x) \approx 0.6x^2 + 1.42x + 1$

à comparer avec

$P_2(x) = (\frac{e^1+e^{-1}}{2} - 1)x^2 + \frac{e^1-e^{-1}}{2}x + 1 \approx 0.54x^2 + 1.18x + 1.$

Différences divisées et Interpolation de Newton

Exemple de calcul des différences divisées

x_i	$DD0 = y_i$	$DD1$	$DD2$	$DD3$
x_0	$[x_0] = y_0$			
x_1	$[x_1] = y_1$	$[x_1, x_0] = \frac{[x_1]-[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_2	$[x_2] = y_2$	$[x_2, x_1] = \frac{[x_2]-[x_1]}{x_2-x_1}$	$[x_2, x_1, x_0] = \frac{[x_2,x_1]-[x_1,x_0]}{x_2-x_0}$	
x_3	$[x_3] = y_3$	$[x_3, x_2] = \frac{[x_3]-[x_2]}{x_3-x_2}$	$[x_3, x_2, x_1] = \frac{[x_3,x_2]-[x_2,x_1]}{x_3-x_1}$	$[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{[x_3,x_2,x_1]-[x_2,x_1,x_0]}{x_3-x_0}$

En général, les différences divisées sont calculées par récurrence:

$$[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - [x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

Différences divisées et Interpolation de Newton

Le polynôme d'interpolation de Newton sur la base des points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_, y_n)$ est donnée par:

$$P_n(x) = [x_0] + (x - x_0)[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)[x_2, x_1, x_0] + ...$$

$$+(x - x_0)...(x - x_{n-1})[x_n, ..., x_0]$$

Les polynômes de Newton: $N_0(x) = 1$, $N_1(x) = (x - x_0)$,
$N_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$, ...,
$N_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$ constituent une passe de $\mathbb{P}[X]$ et le polynôme P_n est défini par les coefficients suivants (donnés par les différences divisées) : $[x_0]$, $[x_1, x_0]$,...,$[x_n, ..., x_0]$.
Il est à noter que le polynôme d'interpolation de Newton ainsi défini coincide avec le polynôme de Lagrange lorsque on utilise la même base de points.

Différences divisées et Interpolation de Newton

Exemples

Calculer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \cos(x)$ en utilisant les trois points $x_i = \frac{\pi}{2} i$ avec $i = 0, 1, 2$.

Différences divisées et Interpolation de Newton

Exemples

Calculer le polynôme d'interpolation de la fonction $f(x) = \cos(x)$ en utilisant les trois points $x_i = \frac{\pi}{2} i$ avec $i = 0, 1, 2$.
Méthode de Newton:

0	1		
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{0-1}{\frac{\pi}{2}-0} = -\frac{2}{\pi}$	
π	-1	$\frac{-1-0}{\pi-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$	$\frac{-\frac{2}{\pi}-(-\frac{2}{\pi})}{\pi-0} = 0$

Donc:

$$P_2(x) = 1 - \frac{2}{\pi}(x-0) + 0(x-0)(x-\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{2}{\pi}x$$

Différences divisées et Interpolation de Newton

Exemples

Calculer ensuite le polynôme d'interpolation de la même fonction en utilisant les quatre points $x_i = \frac{\pi}{2} i$ avec $i = 0, 1, 2, 3$ (c'est à dire en ajoutant le point $x_3 = \dfrac{3\pi}{2}$).

Méthode de Newton:

0	1			
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{0-1}{\frac{\pi}{2}-0} = -\frac{2}{\pi}$		
π	-1	$\frac{-1-0}{\pi-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$	$\frac{-\frac{2}{\pi}-(-\frac{2}{\pi})}{\pi-0} = 0$	
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{0-(-1)}{\frac{3\pi}{2}-\pi} = \frac{2}{\pi}$	$\frac{\frac{2}{\pi}-(-\frac{2}{\pi})}{\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi^2}$	$\frac{\frac{4}{\pi^2}-0}{\frac{3\pi}{2}-0} = \frac{8}{3\pi^3}$

Différences divisées et Interpolation de Newton

Exemples

Donc:

$$P_3(x) = 1 - \frac{2}{\pi}(x-0) + 0(x-0)(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{8}{3\pi^3}(x-0)(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)$$

$$P_3(x) = \frac{8}{3\pi^3}x^3 - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \frac{2}{3\pi}x + 1$$

Résumé des trois méthodes

Pour une fonction f et un système de point x_0, x_1, ..., et x_n, $P_n(x)$, le polynôme d'interpolation, est unique. Les trois méthodes résultent de l'utilisation de différentes bases dans l'espace des polynômes de degré au plus égal à n.

Base canonique: $\{1, X, ..., X^n\}$: Méthode directe

$$P_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$$

Base de Lagrange: $\{L_0(x), ..., L_n(x)\}$: Méthode de Lagrange

$$P_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + ... + f(x_n)L_n(x)$$

Base de Newton: $\{N_0(x), ..., N_n(x)\}$: Méthode de Newton

$$P_n(x) = [x_0]N_0(x) + [x_0, x_1]N_1(x) + ... + [x_0, x_1, ..., x_n]N_n(x)$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Estimation de l'erreur:

Théorème: Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $n+1$ points distincts dans $[a, b]$ et soit $f \in C^{n+1}([a, b])$. Alors, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$:

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} |\mathbb{T}_{n+1}(x)| |f^{(n+1)}(\xi)|$$

Où $\mathbb{T}_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ et $\xi \in [a, b]$.

Démonstration:

Extension du théorème de Rolle : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, derivable sur $]a, b[$ et admettant $n > 1$ zéros sur $[a, b]$ notés $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Alors f' admet au moins $(n-1)$ zéros.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Estimation de l'erreur:

Si $x = x_i$, on a $f(x_i) = P_n(x_i)$ et $\mathbb{T}_{n+1}(x_i) = 0$ donc la propriété est vraie pour tout ξ.
Si $x \neq x_i$, soit $P_{n+1}(t)$ le polynôme d'interpolation de f sur la base des points x, x_0, x_1, ..., x_n. Par construction, f coincide avec P_{n+1} dans les points de d'interpolation, en particulier: $f(x) = P_{n+1}(x)$
Donc:

$$f(x) - P_n(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x)$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Estimation de l'erreur :

Or, $P_{n+1}(x) - P_n(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à $n+1$ et s'annule aux $n+2$ points: x_0, x_1, ..., x_n et $x_{n+1} = x$. Donc:

$$P_{n+1}(t) - P_n(t) = c\mathbb{T}_{n+1}(t) \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Soit la fonction g définie par:

$$g(t) = f(t) - P_{n+1}(t) = f(t) - P_n(t) - c\mathbb{T}_{n+1}(t)$$

La fonction f s'annule en $n+2$ points (x_0, x_1, ..., x_n et $x_{n+1} = x$) Donc d'après **l'extension du théorème de Rolle**, il existe ξ tel que

$$g^{(n+1)}(\xi) = 0$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Estimation de l'erreur :

D'où:

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P_n^{(n+1)}(\xi) - c\mathbb{T}_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)! = 0$$

car:

$$P_n^{(n+1)}(\xi) = 0 \text{ et } \mathbb{T}_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$$

On obtient:

$$c = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

On en déduit:

$$f(x) - P_n(x) = P_{n+1}(x) - P_n(x) = c\mathbb{T}_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\mathbb{T}_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi)$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Amélioration de l'interpolation sur un intervalle:

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Comment doit-on choisir les $n+1$ points pour obtenir un polynôme d'interpolation avec la meilleure précision possible?

Approximation et Interpolation Polynômiale

Amélioration de l'interpolation sur un intervalle:

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Comment doit-on choisir les $n + 1$ points pour obtenir un polynôme d'interpolation avec la meilleure précision possible?

Comment choisir les points pour obtenir la meilleure interpolation (Le polynôme qui donne la meilleure approximation de la fonction)?

Approximation et Interpolation Polynômiale

Amélioration de l'interpolation sur un intervalle:

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Comment doit-on choisir les $n+1$ points pour obtenir un polynôme d'interpolation avec la meilleure précision possible?

Comment choisir les points pour obtenir la meilleure interpolation (Le polynôme qui donne la meilleure approximation de la fonction)?

La construction des nœuds donnant la meilleure interpolation est basée sur les polynômes de Tchebychev.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Amélioration de l'interpolation sur un intervalle:

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Comment doit-on choisir les $n+1$ points pour obtenir un polynôme d'interpolation avec la meilleure précision possible?
Comment choisir les points pour obtenir la meilleure interpolation (Le polynôme qui donne la meilleure approximation de la fonction)?
La construction des nœuds donnant la meilleure interpolation est basée sur les polynômes de Tchebychev. A noter que ces polynômes sont un exemple d'une large catégorie de polynômes avec des propriétés remarquables et qui sont les polynômes orthogonaux.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Polynômes de Tchebychev:

- On se propose de répondre au problème suivant:
Existe-il un polynôme rél T_n tel que: $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Polynômes de Tchebychev:

- On se propose de répondre au problème suivant:
Existe-il un polynôme rél T_n tel que: $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
- Les polynômes de Tchebychev, définies comme suit, permettent de formuler une réponse à ce problème:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \text{ avec}$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Polynômes de Tchebychev:

- On se propose de répondre au problème suivant:
Existe-il un polynôme rél T_n tel que: $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
- Les polynômes de Tchebychev, définies comme suit, permettent de formuler une réponse à ce problème:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \text{ avec } x \in [-1, 1] \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Polynômes de Tchebychev:

Les polynômes de Tchebychev, T_n, sont définies par la formule récurrente suivante:

$$\begin{cases} T_0(x) = \\ \end{cases}$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Polynômes de Tchebychev:

Les polynômes de Tchebychev, T_n, sont définies par la formule récurrente suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0(x) = 1 \text{ et } T_1(x) = \\ \end{array} \right.$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Polynômes de Tchebychev:

Les polynômes de Tchebychev, T_n, sont définies par la formule récurrente suivante:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \text{ et } T_1(x) = x \\ T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$$

Approximation et Interpolation Polynômiale

Polynômes de Tchebychev:

Les polynômes de Tchebychev, T_n, vérifient les propriétés suivantes:

- $T_n(x)$ est un polynôme de degré n dont le coefficient de x^n est 2^{n-1},
- $T_n(x)$ est pair si n est pair et impair sinon,
- $|T_n(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$,
- $T_n(\cos(\frac{k\pi}{n})) = (-1)^k$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$,
- $T_n(\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. Donc, les racines du polynôme $T_n(x)$ sont données par:

$$\overline{x}_k = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}) \text{ avec } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Les racines $\overline{x}_k$ avec $k = 0, 1, \dots, n-1$ sont répartis

Approximation et Interpolation Polynômiale

Propriétés et définitions:

- Les racines $\overline{x}_k = \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ avec $k = 0, 1, ..., n-1$ sont appelés: Les abscises de Tchebychev d'ordre n (sur $[-1, 1]$).
- Rappelons que les polynôme de Tchebychev sont définis sur $[-1, 1]$. Pour obtenir les abscises sur un intervalle $[a, b]$ quelconque, il suffit d'utiliser la transformation suivante:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\overline{x}_k \text{ avec } k = 0, 1, ..., n-1$$

de point de vue géométrique, cette transformation est équivalente à une action de translation et de homothétie.
- Les x_k avec $k = 0, 1, ..., n-1$ sont appelés: Les abscises de Tchebychev d'ordre n (sur $[a, b]$).

Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarques :

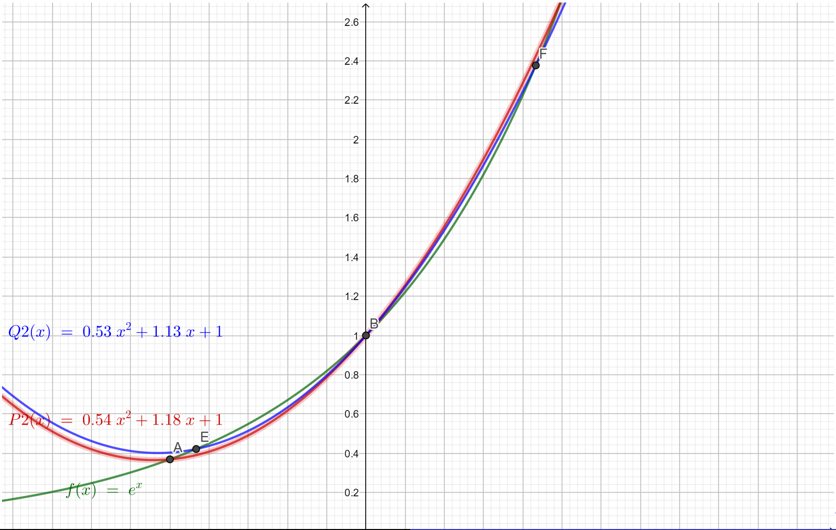
1) Les polynômes de Tchebychev, interviennent dans l'interpolation de Lagrange pour:
- Démonter la convergence de la suite des polynômes interpolant une fonction f (limite égale à f);
- Choisir les points d'interpolation pour obtenir la meilleure interpolation (racines de Tchebychev);
- Estimer l'erreur commise.

Approximation et Interpolation Polynômiale

Exemple :

Soit $f(x) = e^x$ et $P_2(x)$ le polynôme d'interpolation sur la base des points d'abscisses -1, 0 et 1 et $Q_2(x)$ le polynôme d'interpolation sur la base des racines du polynôme de Tchebychev $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ soient $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0 et $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Sur la figure suivante nous pouvons remarquer que la courbe bleu de $Q_2(x)$ est "plus proche" de la courbe rouge de $P_2(x)$.
Cette remarque, à savoir, le polynôme d'interpolation basé sur le système de points défini par les racines du Polynôme de Tchebychev donne une meilleure approximation par rapport à un système de points basé sur une discrétisation uniforme est généralement vraie et peut être démontrée.

Approximation et Interpolation Polynômiale



Approximation et Interpolation Polynômiale

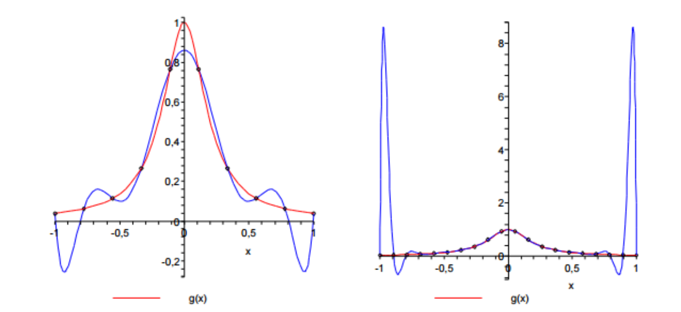
Remarques :

2) Il existe d'autres méthodes d'interpolation:
- Méthode d'Hermite qui permet de construire un polynôme P qui coincide avec f et dont la dérivée P' coincide avec f';
- Interpolation par morceaux: l'intervalle $[a, b]$ est divisé à des intervalle $[a, a_1]$, $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$...$[a_{n-1}, b]$ et on cherche un polynôme d'interpolation sur chaque sous intervalle;
- Interpolation par splines consiste à construire une polynôme d'interpolation par morceaux avec des polynômes présentant plus de régularité

Approximation et Interpolation Polynômiale

Remarques : Phénomène de Runge

Lorsque le système contient un grand nombre de points, le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ à un degré élevé et fourni une très bonne approximation de la fonction, mais un phénomène de Runge peut apparaître dans les deux extremities de l'intervalle d'interpolation.



. . . .