Analyse Numérique et Algorithmique

Bouchaib FERRAHI

2023/2024

Plan

Zéros des fonctions non-linéaires

Position du problème:

Peut on résoudre explicitement l'équation: $e^{x.tan(x)} - 4 = 0$??

Zéros des fonctions non-linéaires

Position du problème:

Peut on résoudre explicitement l'équation: $e^{x.tan(x)} - 4 = 0$??
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il n'est pas toujours possible de résoudre explicitement une équation de la forme:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Zéros des fonctions non-linéaires

Position du problème:

Peut on résoudre explicitement l'équation: $e^{x.tan(x)} - 4 = 0$??
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il n'est pas toujours possible de résoudre explicitement une équation de la forme:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Les méthodes de résolution numérique nous permettent de "localiser" les "zéros" de f en cherchant des solutions approchées de l'équation(1).

Zéros de fonctions non-linéaires

Outils Mathématiques: Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que

$$f(a).f(b) < 0$$

Alors, il existe (**au moins**) $c \in]a, b[$ tel que:

$$f(c) = 0$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Outils Mathématiques: Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie et **monotone** sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que

$$f(a).f(b) < 0$$

Alors, il existe $c \in]a, b[$ **unique** tel que:

$$f(c) = 0$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Outils Mathématiques: Existence d'un point fixe

Soit g une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $g([a, b]) \subset [a, b]$. Alors il existe **au moins** $c \in [a, b]$ tel que:

$$g(c) = c$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Outils Mathématiques: Existence d'un point fixe

Soit g une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $g([a, b]) \subset [a, b]$. Alors il existe **au moins** $c \in [a, b]$ tel que:

$$g(c) = c$$

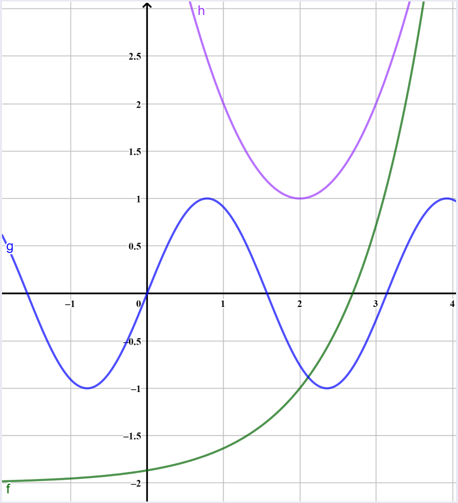
Outils Mathématiques: Existence et unicité d'un point fixe

Soit g une fonction continue définie et **monotone** sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $g([a, b]) \subset [a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ **unique** tel que:

$$g(c) = c$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Illustration graphique



Zéros de fonctions non-linéaires

Illustration graphique

Soient f, g et h les fonctions définies sur $[0, 4]$ par:

$$f(x) = \exp(x - 2) - 2 \qquad g(x) = \sin(2x) \qquad \text{et } h(x) = (x - 2)^2 + 1$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Illustration graphique

Soient f, g et h les fonctions définies sur $[0, 4]$ par:

$$f(x) = \exp(x-2) - 2 \qquad g(x) = \sin(2x) \qquad \text{et } h(x) = (x-2)^2 + 1$$

$f(x) = 0$ admet **une et une seule** solution sur $[0, 4]$
$g(x) = 0$ admet **au moins une** solution sur $[0, 4]$
$h(x) = 0$ **n'admet pas de** solution sur $[0, 4]$

Zéros de fonctions non-linéaires

Illustration graphique

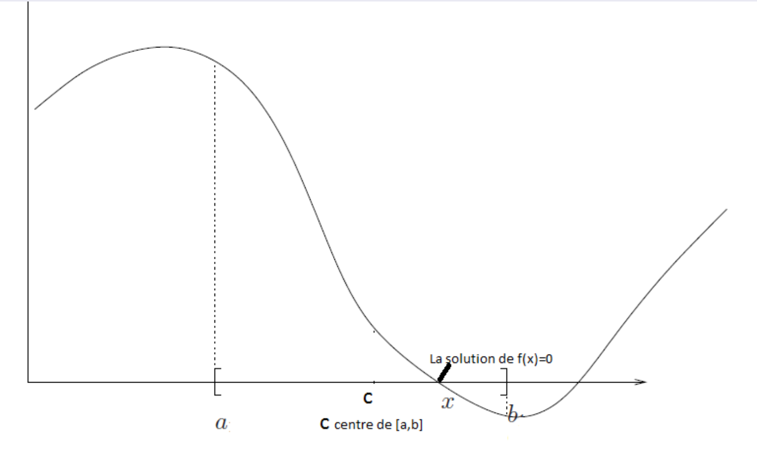
Zéros de fonctions non-linéaires

Remarques:

- Nous pouvons choisir l'intervalle $[a, b]$ de telle façon qu'il ne contient q'une seule solution de (1) (étude graphique, propriétés de f, données relatives au problème initial,...);
- En général, les méthodes de résolution numérique de l'équation (1) sont des méthodes itératives qui consistent à construire une suite $(x_n)_n$ qui converge vers la solution x_0 de (1);
- Nous pouvons comparer les méthodes suivant différents critères: l'erreur commise (différence entre la solution exacte et la solution approchée), la "rapidité" de la convergence,...

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de dichotomie ou de la bisection



Zéros de fonctions non-linéaires

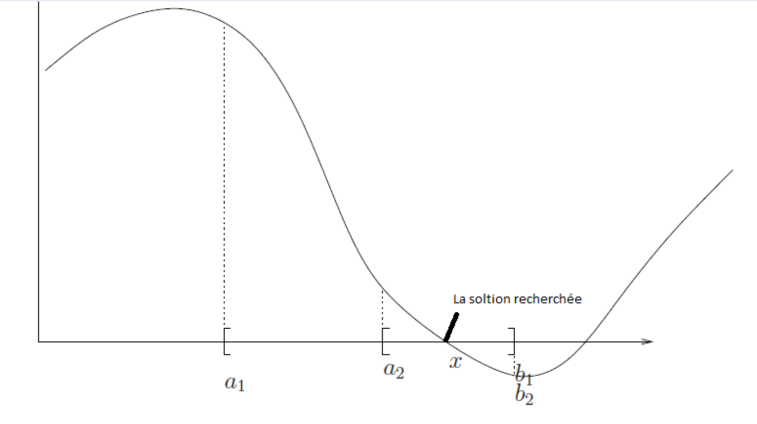
Méthode de dichotomie ou de la bisection

f continue sur $[a, b]$ et $f(a).f(b) < 0$. Soit $c = \frac{a+b}{2}$, on a:

- Si $f(c) = 0$ alors x_0 est solution de (1);
- Si $f(a).f(c) < 0$ alors c prend la place de b;
- $f(c).f(b) < 0$ alors c prend la place de a.

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de dichotomie ou de la bisection



Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de dichotomie ou de la bisection

On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Alors:

- Si $f(x_n) = 0$

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de dichotomie ou de la bisection

On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Alors:

- Si $f(x_n) = 0 \rightarrow$ Fin;
- Si $f(a_n).f(x_n) > 0$

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de dichotomie ou de la bisection

On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Alors:

- Si $f(x_n) = 0 \rightarrow$ Fin;
- Si $f(a_n).f(x_n) > 0 \rightarrow$ on pose $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$,
- Si $f(a_n).f(x_n) < 0$

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de dichotomie ou de la bisection

On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Alors:

- Si $f(x_n) = 0 \rightarrow$ Fin;
- Si $f(a_n).f(x_n) > 0 \rightarrow$ on pose $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$,
- Si $f(a_n).f(x_n) < 0 \rightarrow$ on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$,

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = x^2 - 2$$

L'équation $f(x) = 0$ admet deux racines $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ cherchant une valeur approchée de $\sqrt{2}$ en utilisant la méthode de Dichotomie.

- **Localisation de la racine positive:**

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = x^2 - 2$$

L'équation $f(x) = 0$ admet deux racines $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ cherchant une valeur approchée de $\sqrt{2}$ en utilisant la méthode de Dichotomie.

- **Localisation de la racine positive:** On a $f(0) = -2$ et $f(3) = 7$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = x^2 - 2$$

L'équation $f(x) = 0$ admet deux racines $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ cherchant une valeur approchée de $\sqrt{2}$ en utilisant la méthode de Dichotomie.

- **Localisation de la racine positive:** On a $f(0) = -2$ et $f(3) = 7$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\overline{x} \in [0, 3]$.
- **Initialisation:**

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = x^2 - 2$$

L'équation $f(x) = 0$ admet deux racines $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ cherchant une valeur approchée de $\sqrt{2}$ en utilisant la méthode de Dichotomie.

- **Localisation de la racine positive:** On a $f(0) = -2$ et $f(3) = 7$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\overline{x} \in [0, 3]$.
- **Initialisation:** $a_0 = 0,\ b_0 = 3$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$.

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- - **Initialisation:** $a_0 = 0,\ b_0 = 3$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$
- - **Étape 1:**

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- - **Initialisation:** $a_0 = 0$, $b_0 = 3$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$.
- - **Étape 1:** On a: $f(1,5) = 2,25 - 2 = 0,25$ est de signe contraire à $f(a_0)$ donc:

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- \- **Initialisation:** $a_0 = 0$, $b_0 = 3$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$.
- \- **Étape 1:** On a: $f(1,5) = 2,25 - 2 = 0,25$ est de signe contraire à $f(a_0)$ donc:$a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = x_0 = 1,5$ et $x_1 = \frac{1,5+0}{2} = 0,75$.
- \- **Étape 2:**

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- \- **Initialisation:** $a_0 = 0$, $b_0 = 3$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$.
- \- **Étape 1:** On a: $f(1,5) = 2,25 - 2 = 0,25$ est de signe contraire à $f(a_0)$ donc:$a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = x_0 = 1,5$ et $x_1 = \frac{1,5+0}{2} = 0,75$.
- \- **Étape 2:** On a: $f(0,75) = 0,5625 - 2 = -1,4375$ est de même signe que $f(a_1)$ donc:

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- - **Initialisation:** $a_0 = 0,\ b_0 = 3$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$.
- - **Étape 1:** On a: $f(1,5) = 2,25 - 2 = 0,25$ est de signe contraire à $f(a_0)$ donc:$a_1 = a_0 = 0,\ b_1 = x_0 = 1,5$ et $x_1 = \frac{1,5+0}{2} = 0,75$.
- - **Étape 2:** On a: $f(0,75) = 0,5625 - 2 = -1,4375$ est de même signe que $f(a_1)$ donc:$a_2 = x_1 = 0,75,\ b_2 = b_1 = 1,5$ et $x_2 = \frac{1,5+0,75}{2} = 1,125$.
- - **Étape 3:**

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- \- **Initialisation:** $a_0 = 0,\ b_0 = 3$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$.
- \- **Étape 1:** On a: $f(1,5) = 2,25 - 2 = 0,25$ est de signe contraire à $f(a_0)$ donc:$a_1 = a_0 = 0,\ b_1 = x_0 = 1,5$ et $x_1 = \frac{1,5+0}{2} = 0,75$.
- \- **Étape 2:** On a: $f(0,75) = 0,5625 - 2 = -1,4375$ est de même signe que $f(a_1)$ donc:$a_2 = x_1 = 0,75,\ b_2 = b_1 = 1,5$ et $x_2 = \frac{1,5+0,75}{2} = 1,125$.
- \- **Étape 3:** On a: $f(1,125) = 1,265625 - 2 = -0,734375$ est de même signe que $f(a_2)$ donc:

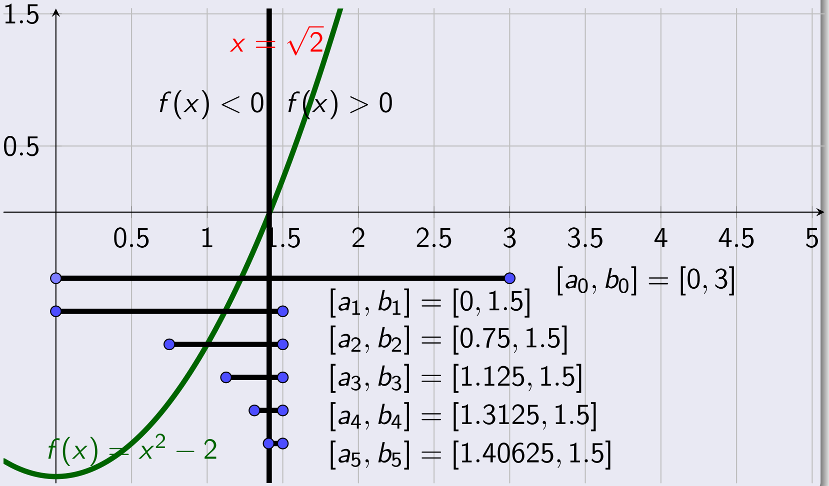
Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- - **Initialisation:** $a_0 = 0,\ b_0 = 3$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$
- - **Étape 1:** On a: $f(1,5) = 2,25 - 2 = 0,25$ est de signe contraire à $f(a_0)$ donc:$a_1 = a_0 = 0,\ b_1 = x_0 = 1,5$ et $x_1 = \frac{1,5+0}{2} = 0,75.$
- - **Étape 2:** On a: $f(0,75) = 0,5625 - 2 = -1,4375$ est de même signe que $f(a_1)$ donc:$a_2 = x_1 = 0,75,\ b_2 = b_1 = 1,5$ et $x_2 = \frac{1,5+0,75}{2} = 1,125.$
- - **Étape 3:** On a: $f(1,125) = 1,265625 - 2 = -0,734375$ est de même signe que $f(a_2)$ donc:$a_3 = x_2 = 1,125,$ $b_3 = b_2 = 1,5$ et $x_3 = \frac{1,5+1,125}{2} = 1,3125.$

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:



Zéros de fonctions non-linéaires

Remarques:

- En général, une majoration de l'erreur commise à l'étape (ou itération) n est donnée par:

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{1}{2^n}|b - a|$$

- Avec cette formule on peut déterminer le nombre minimum d'itérations nécessaires pour obtenir une précision donnée;

$$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{1}{2^n}|b - a| \leq \varepsilon \Longrightarrow n \geq \frac{\ln(b-a)| - \ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$$

- Pour obtenir une précision à 10^{-2}, il faudrait au moins 8 itérations (Indépendamment de la fonction f).

Zéros de fonctions non-linéaires

Remarques:

- La méthode de dichotomie converge toujours (mais la convergence est linéaire). L'erreur à chaque étape est divisée par 2, d'ou la nécessité d'exécuter un grand nombre d'itérations pour obtenir une meilleure précision.

Zéros de fonctions non-linéaires

Dichotomie - Algorithmes:

L'algorithme de la méthode peut être écrit de différentes méthodes suivant les données et les résultats attendus:

Algorithme 1

On suppose qu'une racine unique, de l'équation $f(x) = 0$ a été localiser dans un intervalle $[a, b]$ et ε précision préalablement fixée:

$a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$

While (Tant que) $|b_k - a_k| > \varepsilon$ Test d'arrêt avec l'amplitude de l'intervalle (ou $|f(x_k)| > \varepsilon$ Test d'arrêt avec la valeur de la fonction) **Do** (faire):

$x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$

If (si) $f(a_k) \times f(x_k)\, 0$ **than** (alors) $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$ **else** (sinon) $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$ **end if** (fin de la condition "si")

end while (fin de la boucle "tant que")

$x_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ est la valeur, approchée, recherchée

Zéros de fonctions non-linéaires

Dichotomie - Algorithmes:

L'algorithme 1, calcule et stocke (conserve) toutes les valeurs des suites a_k, b_k et x_k et donc utilise plus d'espace mémoire!

Algorithme 2

On suppose qu'une racine unique, de l'équation $f(x) = 0$ a été localiser dans un intervalle $[a, b]$ et ε précision préalablement fixée:

$c = \frac{a+b}{2}$

While $|b - a| > \varepsilon$ (ou $|f(c)| > \varepsilon$) **do**:

$c = \frac{a+b}{2}$

If $f(a) \times f(c) > 0$ **than** $a := c$ **else** $b := c$

end if   end while

$c = \frac{a+b}{2}$ est la valeur, approchée, recherchée.

L'algorithme 2, calcule et écrase (supprime et remplace) les valeurs a, b et c, à chaque itération, et donc utilise moins d'espace mémoire!

Zéros de fonctions non-linéaires

Dichotomie - Algorithmes:

Nous pouvons ajouter d'autres algorithmes en utilisant différents tests d'arrêt.
Lorsque on souhaite exécuter exactement N itérations, on utilise la boucle: **for** $k = 1$ **to** $k = N$ **do** (de... à... faire...).

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de Lagrange

Méthode de Lagrange (utilisant la droite qui passe par $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$):
Recherche de la racine $\overline{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$ ($\overline{x}$ est la seule racine dans $[a, b]$) avec une précision ε.
La méthode est une généralisation de la méthode de dichotomie: la valeur de x_k est déterminée comme intersection de la droite qui passe par les deux points $(a_k, f(a_k))$ et $(b_k, f(b_k))$ et l'axe des abscisses.

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de Lagrange

- Initialisation: $a_0 = a$, $b_0 = b$
- Tant que $|b_k - a_k| > \varepsilon \rightarrow$ faire $\downarrow$ (une boucle de calcul à refaire tant que la condition est vérifiée):
- Calculer $x_k = a_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a-k)} f(a_k) = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$ et:
- Si $f(a_k)f(x_k) < 0$ Alors $a_{k+1} := a_k$ et $b_{k+1} := x_k$
  Sinon $a_k := x_k$ et $b_{k+1} := b_k$
- Si $|b_n - a_n| \leq \varepsilon \rightarrow$ Fin.

Conclusion: $x_{n+1} = a_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} f(a_n) = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$ est une valeur approchée de $\overline{x}$ avec une précision ε.

Zéros de fonctions non-linéaires

Illustration des trois premiers itérations, avec la méthode de Lagrange, pour l'exemple précédent ($f(x) = x^2 - 2 = 0$) sur $[0, 3]$.

Méthode de Lagrange

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de Lagrange: Algorithmes

Algorithme 1:

$a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$

While $|b_k - a_k| > \varepsilon$ (ou $|f(x_k)| > \varepsilon$) **Do**:

$x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$

If $f(a_k) \times f(x_k)\, 0$ **than** $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$ **else** $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$ **end if**

end while

$x_{k+1} = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$ est la valeur, approchée, recherchée

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de Lagrange: Algorithmes

Algorithme 2:

On suppose qu'une racine unique, de l'équation $f(x) = 0$ a été localiser dans un intervalle $[a, b]$ et ε précision préalablement fixée:

$c = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

While $|b - a| > \varepsilon$ (ou $|f(c)| > \varepsilon$) **do**:

$c = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

If $f(a) \times f(c) > 0$ **than** $a := c$ **else** $b := c$

end if

end while

$c = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$ est la valeur, approchée, recherchée.

Zéros de fonctions non-linéaires

Outils Mathématiques

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, derivable autant de fois que nécessaire et $f(a).f(b) < 0$. Soit $\alpha_0 \in [a, b]$. une approximation affine de f autour de α_0 est donnée par la tangente d'équation:

$$y = g(x) = f(\alpha_0) + (x - \alpha_0)f'(\alpha_0) \tag{2}$$

Cette tangente coupe l'axe des abscisse au point de coordonnes $(\alpha_0 - \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}, 0)$. On pose:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)}$$

et on peut renouveler la même démarche avec α_1

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de Newton

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée et x_0 un point donné. En utilisant la méthode précédente, on peut construire une suite $(x_k)_k$ de la manìre suivante:

- 1er terme: x_0 bien choisi (conditions de convergence)
- à partir du terme x_k, on construit x_{k+1} comme étant l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et la tangente T_{x_k} à la courbe de la fonction qui passe par le point $(x_k, f(x_k))$. On a:

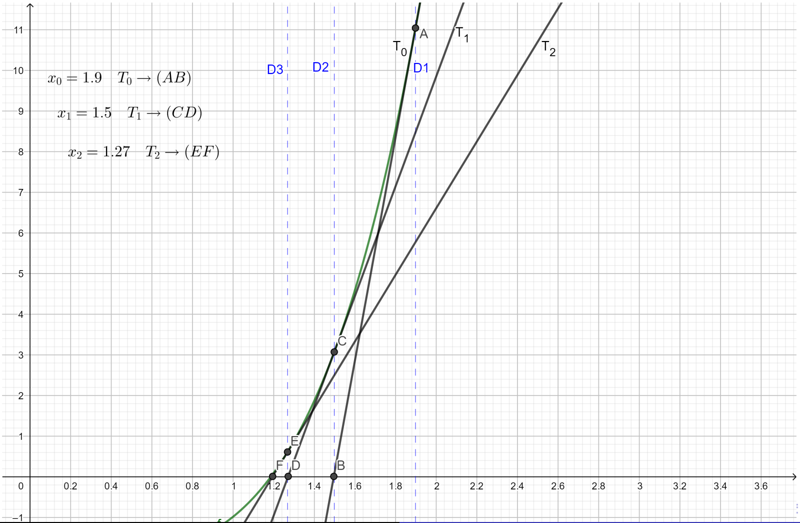
$$(T_{x_k})\ y = g(x) = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k)$$

et

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Illustration: $f(x) = x^4 - 2$, $\overline{x} = \sqrt[4]{2}$, $[a, b] = [1, 2]$ et $x_0 = 1.9$



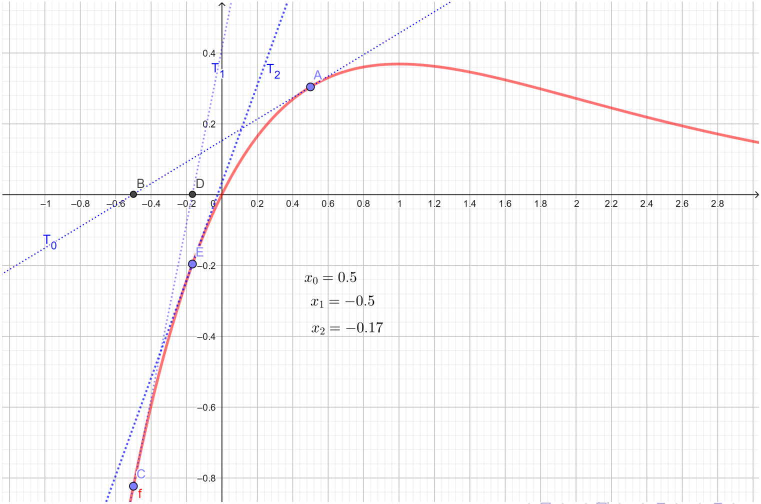
Zéros de fonctions non-linéaires

Remarques:

- Lorsque la méthode de Newton converge, la convergence est beaucoup plus rapide que la méthode de dichotomie,
- La convergence n'est pas automatique, elle dépend des conditions initiales comme le montre l'example suivant: Soit $f(x) = xe^{-x}$ l'équation $f(x) = 0$ admet $x = 0$ comme racine, mais la méthode converge pour $0 < x_0 < 1$ et ne converge pas (diverge) pour $x_0 > 1$ (Voir illustrations ci-après)

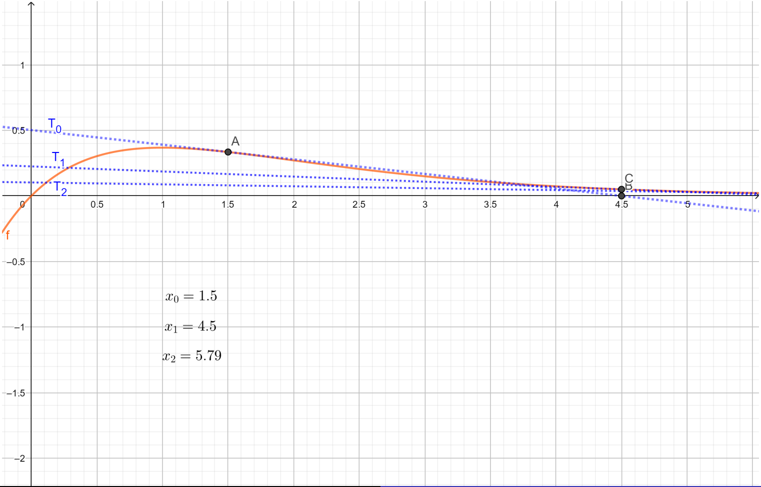
Zéros de fonctions non-linéaires

Illustration: $f(x) = xe^{-x}$, $\overline{x} = 0$ et $x_0 = 0.5$ La méthode converge



Zéros de fonctions non-linéaires

Illustration: $f(x) = xe^{-x}$, $\overline{x} = 0$ et $x_0 = 1.5$ la méthode ne converge pas



Zéros de fonctions non-linéaires

Conditions de convergence et précision:

- f définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ qui contient une racine $\overline{x}$ et un point d'initialisation x_0 bien choisi ($f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$),
- La fonction f est deux fois derivable et à dérivée seconde continue ($\mathcal{C}^2$) sur l'intervalle $[a, b]$,
- La fonction dérivée f' ne s'annule pas sur cet intervalle (f est strictement monotone),
- la dérivée seconde f'' est continue et ne s'annule pas (f n'a pas de point d'inflection),
- Pour obtenir une solution approchée avec une précision ε, il suffit d'exécuter la méthode jusqu'au obtention de :

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon \quad \text{ou} \quad |f(x_k)| \leq \varepsilon$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = x^2 - 2$$

f est deux derivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, 3]$ et:

$$f'(x) = 2x \text{ et } f''(x) = 2$$

Les conditions de convergences sont vérifiées, pour tout x_0 tel que $f(x_0) > 0$. Cherchons une approximation de la solution $\overline{x} = \sqrt{2}$ en utilisant successivement les deux valeurs initiales $x_0 = 0,5$ (ne vérifie pas la condition) et $x_0 = 2,5$

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- On a $x_0 = 0,5$
  -
$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} =$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- On a $x_0 = 0,5$
  - $$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 0,5 - \frac{0,5^2 - 2}{2 \times 0,5} = 2,25$$
  - $$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} =$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- On a $x_0 = 0,5$
  -
  $$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 0,5 - \frac{0,5^2 - 2}{2 \times 0,5} = 2,25$$
  -
  $$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = 2,25 - \frac{2,25^2 - 2}{2 \times 2,25} = 1,569444$$
  -
  $$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 2}{2x_2} =$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- On a $x_0 = 0,5$
  -
  $$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 0,5 - \frac{0,5^2 - 2}{2 \times 0,5} = 2,25$$
  -
  $$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = 2,25 - \frac{2,25^2 - 2}{2 \times 2,25} = 1,569444$$
  -
  $$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 2}{2x_2} = 1,569444 - \frac{1,569444^2 - 2}{2 \times 1,569444} = 1,42189$$

  En trois itérations nous avons déjà une approximation à 10^{-2} de $\sqrt{2}$

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- On a $x_0 = 2,5$
  -
$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} =$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

- On a $x_0 = 2,5$
  -
  $$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 2,5 - \frac{2,5^2 - 2}{2 \times 2,5} = 1,65$$
  -
  $$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} =$$

Zéros de fonctions non-linéaires

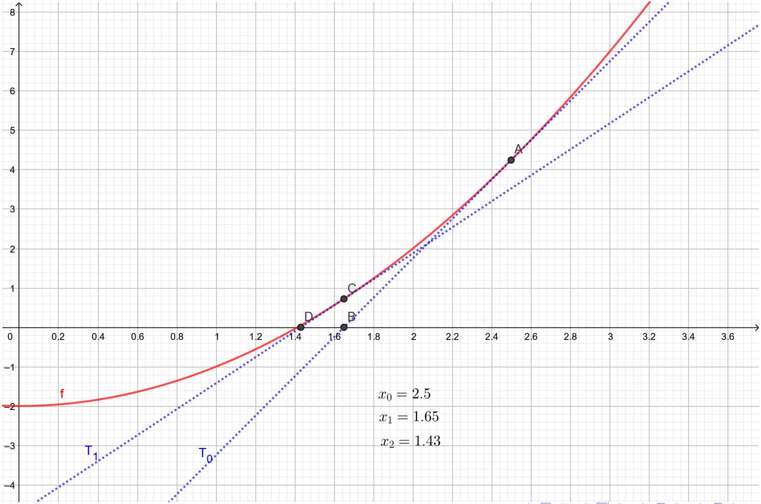
Exemple:

- On a $x_0 = 2,5$
  -
  $$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 2,5 - \frac{2,5^2 - 2}{2 \times 2,5} = 1,65$$
  -
  $$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = 1,65 - \frac{1,65^2 - 2}{2 \times 1,65} = 1,431061$$

  En seulement deux itérations nous avons obtenu l'approximation souhaitée.

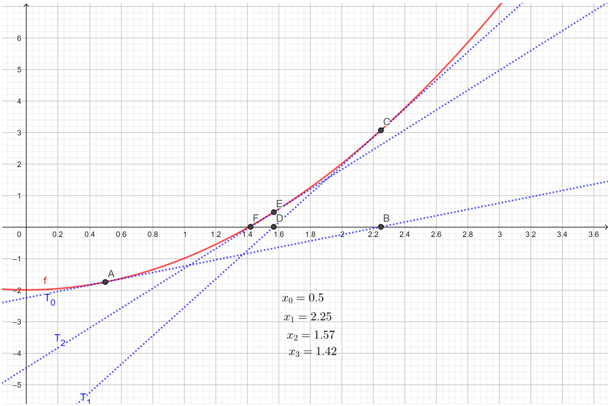
Zéros de fonctions non-linéaires

illustration: $x_0 = 2.5$ ($f(x_0)$ est de même signe que $f''(x)$).



Zéros de fonctions non-linéaires

illustration: $x_0 = 0.5$ ($f(x_0)$ n'est pas de même signe que $f''(x)$).



Les quatre conditions sont suffisantes! Ici, en absence d'une condition, la suite x_n converge vers $\overline{x}$.

Zéros de fonctions non-linéaires

Remarques:

- L'application de la méthode de Newton demande le calcul de la dérivée f' et éventuellement de la dérivée seconde f'' (si elles existent!!)
- Lorsque la fonction n'est pas derivable ou que le calcul de la dérivée est difficile, nous pouvons remplacer $f'(x_k)$ par

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode la sécante(Cas particulier de la méthode de Newton)

- Initialisation: x_0 et x_1 dans le même intervalle qui contient la racine,
- $$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \times \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$
- la tangente est remplacée par la droite qui passe par les points $(x_k, f(x_k))$ et $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemple:

Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = x^2 - 2$$

Initialisation: dans l'intervalle $[0, 3]$ soient $x_0 = 0,5$ et $x_1 = 2,5$

x_k	$f(x_k)$
$x_0 = 0,5$	$f(x_0) = 0,5^2 - 2 = -1,75$
$x_1 = 2,5$	$f(x_1) = 2,5^2 - 2 = 4,25$
$x_2 = x_1 - f(x_1) \times \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 2,5 - 4,25 \times \frac{2,5-0,5}{4,25+1,75} = 1,4166$	...

Zéros de fonctions non-linéaires

Remarques:

Il existe plusieurs variantes de la méthode de Newton:

- Dans la méthode de la sécante, on peut remplacer x_{k-1} par b pour obtenir la variante suivante:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \times \frac{x_k - b}{f(x_k) - f(b)}$$

- **(Méthode de la corde)** Dans la méthode de Newton, on peut remplacer $f'(x_k)$ par une constante q (souvent $q = f'(x_0)$ ou $q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$),
- La méthode de Newton est appelée dans plusieurs références méthode de **Newton-Raphson**.

Zéros de fonctions non-linéaires

Méthode de Newton: Algorithme

- Localiser la racine dans un intervalle $[a, b]$
- Vérifier les conditions de convergence (en particulier bien choisir x_0)
- Exécuter l'algorithme:

Tant que $|f(x_k)| > \varepsilon$ (ou $|x_{k+1} - x_k| = |\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}| > \varepsilon$) faire:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Lorsque la boucle s'arrête, la dernière valeur de la suite $(x_k)_k$ est une valeur approchée de la solution avec une précision ε.

Méthode de point fixe

Outils Mathématiques: Existence d'un point fixe

- Soit g une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $g([a, b]) \subset [a, b]$. Alors il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que:

$$g(\alpha) = \alpha$$

- La résolution de l'équation $f(x) = 0$, sur un intervalle $[a, b]$, peut être transformée à un problème de recherche d'un point fixe d'une fonction auxiliaire $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que:

$$f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = x$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Définitions:

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction

- $\overline{x} \in \mathbb{R}$ est dit point fixe de g s'il vérifie $g(\overline{x}) = \overline{x}$,
- k un réel positif, g est dite **k-lipschitzienne** si:

$$|f(y) - f(x)| \leq k|y - x| \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}$$

- g est dite **contractante** s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que g est **k**-lipschitzienne:

Il existe $k \in [0, 1[$ tel que $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

Zéros de fonctions non-linéaires

Exemples:

- La fonction constante $f(x) = a$ est 0-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$,
- La fonction affine $f(x) = ax + b$ est a-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$,
- $f(x) = x^2$ est lipschitzienne sur tout intervalle $[a, b]$ (k dépend de l'intervalle) et elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$,
- $f(x) = x^3$ est lipschitzienne sur tout intervalle $[a, b]$ (k dépend de l'intervalle) et elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$,
- $f(x) = \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur tout intervalle $[a, +\infty]$ avec $a > 0$ (k dépend de l'intervalle) et elle n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$,
- $f(x) = \frac{1+x}{2+x}$ est contractante ($k = \frac{1}{4}$) sur $[0, +\infty]$.

Méthode de point fixe

Point fixe d'une application contractante

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application contractante, Alors:

- g est continue.
- g admet un point fixe unique $\overline{x} \in \mathbb{R}$,
- et, pour tout point initial x_0, la suite itéré (ou récurrente) $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers $\overline{x}$.

Remarque: On peut localiser la racine et travailler sur un intervalle $[a, b]$ on considérant $g : [a, b] \to [a, b]$ et $x_0 \in [a, b]$.

Méthode de point fixe

Remarques:

- La méthode de Newton est une méthode de point fixe

Méthode de point fixe

Remarques:

- La méthode de Newton est une méthode de point fixe:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Les variantes de la méthode de Newton (la sécante, la corde,...) peuvent être formulées comme des méthodes de point fixe.
- La méthode de dichotomie ne peut pas être décrite comme méthode de point fixe:

Méthode de point fixe

Remarques:

- La méthode de Newton est une méthode de point fixe:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Les variantes de la méthode de Newton (la sécante, la corde,...) peuvent être formulées comme des méthodes de point fixe.
- La méthode de dichotomie ne peut pas être décrite comme méthode de point fixe:
  x_{n+1} ne s'écrit pas comme $g(x_n)$.

Méthode de point fixe

Exemple:

Soit g définie sur $[0, +\infty]$ par:

$$g(x) = \frac{1+x}{2+x}$$

On sait que g est contractante et que pour tout $x \geq 0$, on a $g(x) > 0$ et $g([0, +\infty]) \subset [0, +\infty]$. On applique la méthode de pont fixe pour résoudre l'équation $g(x) = x$:

$$x_0 = 4 \text{ et } x_{n+1} = g(x_n)$$

$$x_1 = g(x_0) = \frac{5}{6} \text{ et } x_2 = g(x_1) = \frac{11}{17}$$

$$x_3 = g(x_2) = \frac{28}{45} = 0.62 \text{ et } x_4 = g(x_3) = \frac{73}{118} \simeq 0.6186...$$

Méthode de point fixe

Exemple:

Solution exacte:

Méthode de point fixe

Exemple:

Solution exacte:

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1+x}{2+x} = x \Leftrightarrow 1 + x = 2x + x^2 \Leftrightarrow -x^2 - x + 1 = 0$$

Deux solutions $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ dont $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0.0743 \in [0, +\infty]$

On a :

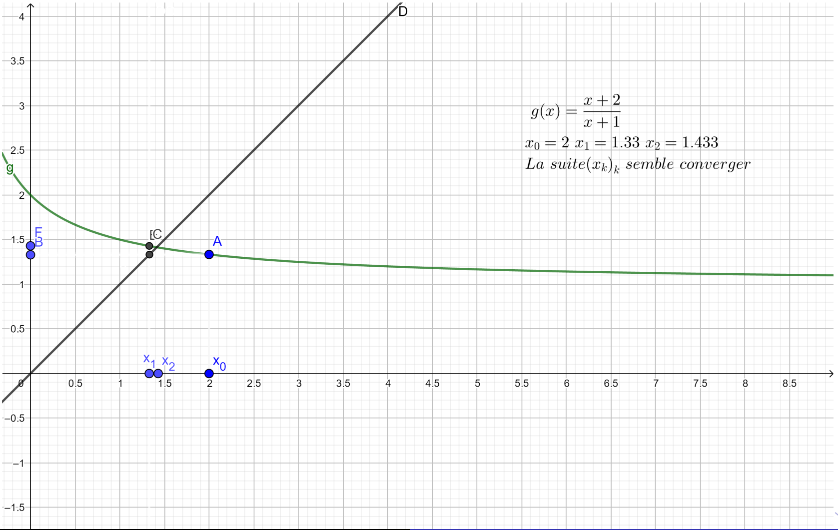
$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Méthode de point fixe

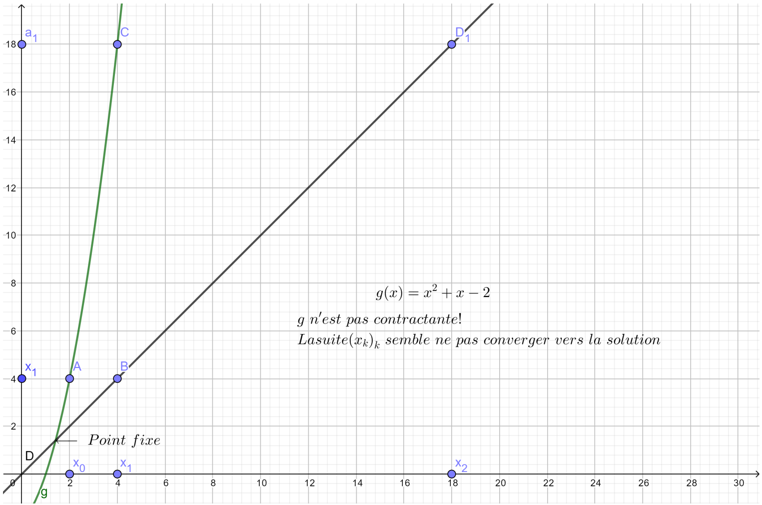
Remarque

L'équation $f(x) = 0$ peut donner lieu à plusieurs problèmes de point fixe avec différentes fonctions g, le choix de la bonne fonction dépend essentiellement des conditions de convergence. Par la suite, nous donnons deux transformations de l'exemple précédent $f(x) = x^2 - 2 = 0$.

Méthode de point fixe



Méthode de point fixe



Méthode de point fixe

Méthode point fixe: Algorithme

- Vérifier les conditions d'existence et localiser un point fixe $g(\overline{x}) = \overline{x}$ dans un intervalle $[a, b]$
- Vérifier les conditions de convergence et choisir un point initial $x_0 \in [a, b]$
- Puis, pour une précision ε exécuter la boucle suivante:

Tant que $|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - x_n| > \varepsilon$ faire

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

A la sortie de cette boucle, x_n est une valeur approchée du point fixe avec une précision ε.

Zéros de fonctions non-linéaires

Convergence - Erreur - ordre de convergence

- Une méthode numérique de résolution de l'équation ($f(x) = 0$ ou $g(x) = x$) est dite convergente si elle définie une suite $(x_n)_n$ telle que:
  $\lim_{n\to+\infty} x_n = \overline{x}$ ou $\overline{x}$ est la solution exacte de l'équation
- à l'étape n, l'erreur absolue est donnée par: $r_n = |x_n - \overline{x}|$.
  L'erreur relative est égale à:

$$\frac{r_n}{\overline{x}} = \frac{|x_n - \overline{x}|}{\overline{x}}$$

- La méthode est dite d'ordre p si:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|r_{n+1}|}{|r_n|^p} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x_{n+1} - \overline{x}|}{|x_n - \overline{x}|^P} > 0$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Convergence - Erreur - ordre de convergence

- La solution exacte $\overline{x}$ étant inconnue, on utilise des outils Mathématiques pour chercher une majoration de l'erreur:

$$r_n = |x_n - \overline{x}| \leq \rho_n \text{ avec } \rho_n \text{ ne dépend pas de } \overline{x}$$

- $p = 1$: la convergence est dite linéaire (Exemple: Méthode de dichotomie)
- $p = 2$: la convergence est dite quadratique (Exemple: Méthode de Newton)

conditions d'arrêt:

conditions d'arrêt:

Nous pouvons distinguer trois type de conditions d'arrêt:

1) Majoration de l'erreur absolue par une quantité qui ne dépends pas de la racine recherchée $\overline{x}$ ni de x_k, par exemple, dans les méthodes de Dichotomie et de la Lagrange on a:

$$|x_k - \overline{x}| \leq |b_k - a_k|$$

Il st suffisant de choisir $|b_k - a_k| \leq \varepsilon$ pour obtenir la précision recherchée

2) Test basé sur le résidu: $|f(x_k)| \leq \varepsilon$

3) Test basé sur l'incrément: $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$
Suivant la situation et les conditions initiales, chaque test peut être considéré comme satisfaisant ou trop restrictif.

Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

On cherche à résoudre l'équation dans $[0, +\infty[$: $\cos(x) - x = 0$

Solution exacte:

Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

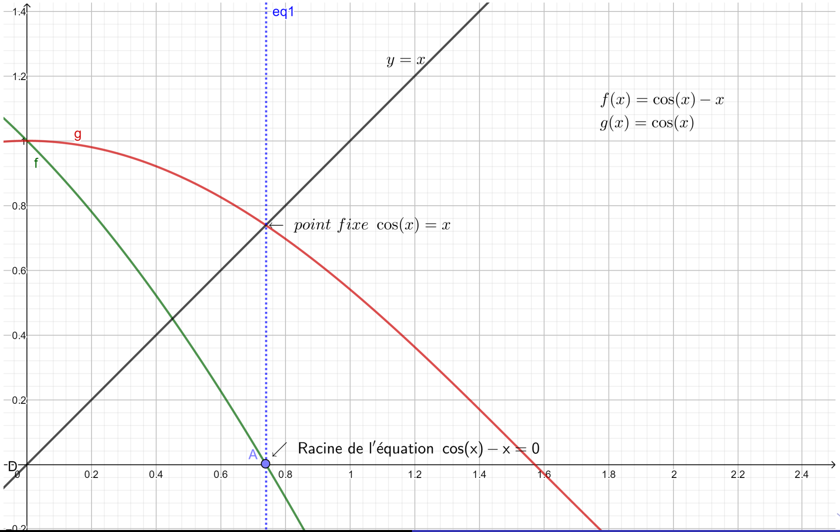
On cherche à résoudre l'équation dans $[0, +\infty[$: $\cos(x) - x = 0$
Solution exacte: aucune méthode (à ce niveau),
Méthode numérique:

Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

On cherche à résoudre l'équation dans $[0, +\infty[$: $\cos(x) - x = 0$
Solution exacte: aucune méthode (à ce niveau),
Méthode numérique: Localisation d'une racine: $f(x) = \cos(x) - x$

Zéros de fonctions non-linéaires



Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

f est continue sur $\mathbb{R}$,
$f(0,5) = \cos(0,5) - 0,5 > 0$ et $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$.
Donc, d'après le théorème des VI, l'équation admet une solution dans $[0,5;1]$. Pour obtenir une valeur approchée, il faut utiliser une méthode numérique:
1) Méthodes pour résoudre $f(x) = 0$: Dichotomie, Newton ou l'une des variantes,
2) Méthode de point fixe: $g(x) = x$ ou $g(x) = \cos(x)$.

Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

f est continue sur $\mathbb{R}$,
$f(0,5) = \cos(0,5) - 0,5 > 0$ et $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$.
Donc, d'après le théorème des VI, l'équation admet une solution dans $[0,5;1]$. Pour obtenir une valeur approchée, il faut utiliser une méthode numérique:
1) Méthodes pour résoudre $f(x) = 0$: Dichotomie, Newton ou l'une des variantes,
2) Méthode de point fixe: $g(x) = x$ ou $g(x) = \cos(x)$.
Peut-on appliquer la méthode de point fixe? quelles conditions??

Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

f est continue sur $\mathbb{R}$,
$f(0,5) = \cos(0,5) - 0,5 > 0$ et $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$.
Donc, d'après le théorème des VI, l'équation admet une solution dans $[0,5;1]$. Pour obtenir une valeur approchée, il faut utiliser une méthode numérique:
1) Méthodes pour résoudre $f(x) = 0$: Dichotomie, Newton ou l'une des variantes,
2) Méthode de point fixe: $g(x) = x$ ou $g(x) = \cos(x)$.
Peut-on appliquer la méthode de point fixe? quelles conditions??
g est elle contractante??

Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

g est continue et derivable avec: $g'(x) = -\sin(x)$.

Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

g est continue et derivable avec: $g'(x) = -\sin(x)$.
On a

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos(1) \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

g est continue et derivable avec: $g'(x) = -\sin(x)$.
On a

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos(1) \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow g([0,1]) \subset [0,1]$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

g est continue et derivable avec: $g'(x) = -\sin(x)$.
On a

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos(1) \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow g([0,1]) \subset [0,1]$$

et

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow |g'(x)| = |-\sin(x)| \leq \sin(1)$$

Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

g est continue et derivable avec: $g'(x) = -\sin(x)$.
On a

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos(1) \leq \cos(x) \leq 1 \Rightarrow g([0,1]) \subset [0,1]$$

et

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow |g'(x)| = |-\sin(x)| \leq \sin(1)$$

Donc, d'après l'inégalité des AF, on a pour tout $x, y \in [0,1]$:

$$|g(x) - g(y)| \leq sin(1)|x - y|$$

On en déduit que g est $sin(1)$-contractante sur $[0,1]$

Zéros de fonctions non-linéaires

Etude de cas

La méthode de point fixe nous permet de construire une suite $(x_n)_n$ telle que:

- x_0 est donnée (par exemple 0.5 centre de l'intervalle $[0, 1]$)
- $x_{n+1} = g(x_n)$

En plus:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \overline{x} \text{ ou } \overline{x} \text{ est solution de } g(x) = x$$

Remarque:

La méthode ne permet pas le calcule de la solution exacte $\overline{x}$ mais une valeur approchée x_k avec une précision donné.

Zéros de fonctions non-linéaires

Estimation de l'erreur

Démontrons par récurrence que, pour tout n,
$r_n = |x_n - \overline{x}| \leq k^n |x_0 - \overline{x}|$.
Pour $n = 1$, on a: $|x_1 - \overline{x}| = |g(x_0) - g(\overline{x})| \leq k|x_0 - \overline{x}|$.
Hypothèse de récurrence: $|x_n - \overline{x}| \leq k^n |x_0 - \overline{x}|$,
Pour $n + 1$ on a:

$$|x_{n+1} - \overline{x}| = |g(x_n) - g(\overline{x})| \leq k|x_n - \overline{x}| \leq kk^n|x_0 - \overline{x}| = k^{n+1}|x_0 - \overline{x}|$$

On en déduit que:

$$r_n = |x_n - \overline{x}| \leq (\sin(1))^n |0,5 - \overline{x}| \leq \frac{1}{2}(\sin(1))^n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \frac{(\sqrt{3})^n}{2^{n+1}}$$

Car: $\sin(1) \leq \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $|0,5 - \overline{x}| \leq \frac{1}{2}$ ($\overline{x} \in [0,5; 1]$).

Zéros de fonctions non-linéaires

Estimation de l'erreur

n	Précision inférieure à
1 ≈ 0,877582...	0,433
2 ≈ 0,639012...	0,375
3 ≈ 0,802685...	0,324
5 ≈ 0,768195...	0,243
7 ≈ 0,752355...	0,182
10 ≈ 0,7535006...	0,118
16 ≈ 0,738704...	0,050
27 ≈ 0,739081...	0,008
44 ≈ 0,739085...	0,0008

Zéros de fonctions non-linéaires

TD

Décrire les méthodes de la dichotomie et de Lagrange pour le calcul d'une solution approchée de l'équation $f(x) = 0$ et les utiliser pour calculer le zéro de la fonction f, définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, dans l'intervalle $[1; 2]$ avec une précision de 10^{-2} et en précisant le test d'arrêt utilisé.