Série N^0 2 2021 - 2022

Exercice 1 : Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|$$

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que le schéma d'Euler explicite à pas de temps constant pour résoudre le problème précédent est consistant et stable.
2. Calculer la différentielle première et seconde de f.
3. En déduire l'ordre de convergence du schéma de Euler.

Exercice 2 : Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, on considère les deux problèmes :

$$\mathcal{P} \begin{cases} x'(t) = t\sin(x), & t \in [0, T], \\ x(0) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

et

$$\mathcal{S} \begin{cases} x'(t) = t^2 + x + 1, & t \in [1, T], \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

1. Donner le schéma d'Euler explicite en prenant un pas de temps constant.
2. Calculer les 2 premières itérations en prenant comme pas de temps $h = 0.1$.
3. Est-ce que ce schéma converge vers chacune des solutions de ces problèmes ?

Exercice 3 : Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in I = [t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

On utilise une partition de I avec un pas de temps constant. Étudier l'ordre de convergence du schéma :

1. Du point milieu explicite.
2. d'Heun explicite.

Exercice 4 : Construire un schéma de RK explicite d'ordre 3.

Exercice 5 : Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T]. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{3}$$

1. Est ce que le schéma d'Euler explicite est A-Stable ?

2. On prend dans le TSL : $L = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ et $T = 10$. Calculer la solution exacte du problème précédent.
3. Étudier la A-Stabilité du schéma.
4. Tracer le graphe des solutions approchées et exacte pour : $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{3}{2}$ et $h = \frac{5}{2}$.

Exercice 6 : Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1. Retrouver le schéma d'Euler implicite en utilisant une approximation de la dérivée.
2. Est ce que le schéma d'Euler implicite à pas constant est A-stable ?

Exercice 7 : Soit $L > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème (TLS) :

$$\begin{cases} x'(t) = -Lx(t), \quad \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 \quad \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Écrire le schéma du trapèze (Crank-Nicolson) permettant de calculer x_{n+1} à partir de x_n.
2. Étudier la A-Stabilité du schéma.
3. À partir du schéma du trapèze, en déduire le schéma de Heun, est-il A-Stable ?

Exercice 8 : L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{1 + t^2}.$$

Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la concentration est $x(0) = 5$, déterminer la concentration à $t = 2$ à l'aide de la méthode d'Euler implicite avec un pas $h = 0.5$.

Exercice 9 : On considère le schéma :

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{2k_2}{3} + \frac{k_3}{6}\right)$$

avec : $k_1 = f(t_n, x_n)$, $k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_1}{2})$ et $k_3 = f(t_n + h, x_n - hk_1 + 2hk_2)$.

1. Dresser le tableau du Butcher de ce schéma. Est ce que ce schéma est consistant ?
2. Appliquer le schéma à un problème du type (TLS) et exprimer, dans ce cas, x_n.
3. Étudier, dans ce cas, la $\lim_{n\to+\infty} x_n$ et déduire.

Exercice 10 : Nous considérons l'équation différentielle $x'(t) = x(t)t$ dont nous calculons une solution numérique par la formule suivante :

$$x_{n+1} = x_n + h(t_n + \frac{h}{2})(x_n + \frac{ht_nx_n}{2})$$

1. Sachant que nous avons utilisé un schéma de Runge-Kutta explicite de tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Déterminer toutes les valeurs sur le tableau précédent. Est ce que ce schéma est consistant ?

2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, x_n ;
3. Étudier, dans ce cas, la convergence de $(x_n)_n$ et déduire.

Exercice 11 : Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que le schéma (implicite) de Runge-Kutta de tableau de Butcher suivant :

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

Soit d'ordre, au moins, égal à 2 pour la fonction $f(t,x) = x$ et l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$.

Exercice 12 : Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = xt^2$ dont nous cherchons une solution numérique par le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n. Est ce que ce schéma est consistant ?
2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, x_n ;
3. Étudier, dans ce cas, la convergence de $(x_n)_n$ et déduire.

Exercice 13 : Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = x^2 + t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schéma d'Euler explicite puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces deux schémas :

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n ;
2. Sachant que $x_0 = 0$ et $h = 1$, calculer x_1.

Exercice 14 : Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t,x) = x.t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schémas d'Euler (explicite et implicite) puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces trois schémas :

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n ;
2. Sachant que $x_0 = 1$ et $h = 0.1$, calculer x_1.

Exercice 15 : Étude des méthodes RK avec $s = 2$ (cas général). Pour chaque cas : Formuler le schéma, donner un exemple et préciser si nous pouvons reconnaître un schéma classique ?

1. Schéma implicite RK à 2 étages.
2. Schéma semi-implicite RK à 2 étages.
3. Schéma explicite RK à 2 étages. Étudier la convergence et la A-stabilité de ces schémas explicites.

Exercice 1 : Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|$$

On considère le problème de Cauchy :

$$(4) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1. Montrer que le schéma d'Euler explicite à pas de temps constant pour résoudre le problème précédent est consistant et stable.
2. Calculer la différentielle première et seconde de f.
3. En déduire l'ordre de convergence du schéma de Euler.

Solution :
1. Avec les notation de la définition, pour le schéma d'Euler explicite on a $\Phi(t, x, h) = f(t, x)$. Donc Euler explicite est consistant. Puisque f est lipschitzienne alors on a :

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|$$

et donc

$$|\Phi(t,x,h) - \Phi(t,y,h)| \leq L|x - y|$$

ainsi le schéma est stable Conclusion : le schéma d'Euler est stable et consistant donc c'est un schéma convergeant .
2. On a $x'(t) = f(t, x(t))$, donc la différentielle de f est donnée en (t, x) par :

$$\begin{aligned} Df(t,x) &= \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t}\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + x'(t)\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + f(t,x)\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \end{aligned}$$

De même la différentielle seconde de f est donnée en (t, x) par :

$$\begin{aligned} D^2 f &= D[Df] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}Df + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}Df \\ &= \frac{\partial}{\partial t}Df + f\frac{\partial}{\partial x}Df \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x}\right) + f\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + f\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} + f\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{aligned}$$

3. On a

$$\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,x,0) = 0 \neq \frac{1}{2} Df(t,x)$$

donc le schéma d'Euler explicite est d'ordre 1.

Exercice 2 : Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, on considère les deux problèmes :

$$\mathcal{P} \begin{cases} x'(t) = t\sin(x), & t \in [0,T], \\ x(0) = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

et

$$\mathcal{S} \begin{cases} x'(t) = t^2 + x + 1, & t \in [1,T], \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

1. Donner le schéma d'Euler explicite en prenant un pas de temps constant.
2. Calculer les 2 premières itérations en prenant comme pas de temps $h = 0.1$.
3. Est-ce que ce schéma converge vers chacune des solutions de ces problèmes ?

Solution :

1. Le schéma d'Euler :

- Pour $\mathcal{P}$ on a $f(t_n, x_n) = t_n \sin(x_n)$ donc :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = x_n + hf(t_n, x_n) = x_n + \text{ h.t } n \cdot \sin(x_n) \\ x_0 & = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Pour $\mathcal{S}$ on a $f(t_n, x_n) = t_n^2 + x_n + 1$ donc :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = x_n + h \cdot (t_n^2 + x_n + 1) \\ x_0 & = 1 \end{cases}$$

2. Les 2 premières itérations x_1 et x_2 - Pour $\mathcal{P}$ on a $h = 0.1, t_0 = 0$ et $t_1 = t_0 + h = 0.1$. On trouve :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\pi}{2} \\ x_1 &= \frac{\pi}{2} + h \times t_0 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \simeq 1.57 \\ x_2 &= \frac{\pi}{2} + 0.1 \times t_1 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 0.1 \times 0.1 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 0.01 \simeq 1.58 \end{aligned}$$

- Pour $\mathcal{S}$ on a $h = 0.1, t_0 = 1$ et $t_1 = t_0 + h = 1.1$. On trouve :

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 + 0.1\left(t_0^2 + 1 + 1\right) = 1 + 0.1\left(1^2 + 2\right) = 1.3 \\ x_2 &= 1.3 + 0.1\left(t_1^2 + 1.3 + 1\right) = 1.3 + 0.1\left((1.1)^2 + 2.3\right) = 1.651 \end{aligned}$$

3. Convergence : Le schéma d'Euler progressif est consistant avec n'importe quel problème de Cauchy, car $\Phi(t,x,h) = f(t,x)$. Pour la stabilité il faut que la fonction f soit lipschitzienne :

$-$ Pour $\mathcal{P}$: on a :

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= |t\sin(x) - t\sin(y)| \\ &= |t||\sin(x) - \sin(y)| \\ &= t|\cos(c)||x-y| \end{aligned}$$

avec c une valeur comprise entre x et y d'après le théorème des accroissements finis : Pour $f(x) = \sin(x)$, il existe c entre x et y tel que :

$$f'(c) = \cos(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x-y}$$

Donc $\forall t \in [0,T]$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq t|\cos(c)||x-y| \leq T|x-y| \quad \forall x, y$$

Conclusion : f est lipschitzienne de constante T donc le problème est stable. Le schéma d'Euler utilisé est stable et consistant donc c'est un schéma convergeant. - Pour $\mathcal{S}$

$$|f(t,x)-f(t,y)| = \left|t^2+x+1-t^2-y-1\right| = |x-y|$$

Conclusion : f est lipschitzienne de constante 1 donc le problème est stable. Le schéma d'Euler utilisé est stable et consistant donc c'est un schéma convergeant.

Exercice 3 : Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I = [t_0, t_0+T] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{5}$$

On utilise une partition de I avec un pas de temps constant. Étudier l'ordre de convergence du schéma :

1. Du point milieu explicite.
2. d'Heun explicite.

Solution :

(1) Pour le schéma du point milieu on a :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f\left(t_n, x_n\right)\right), \text{ Pour } n = 0, \ldots, N-1 \\ x\left(t_0\right) = x_0 \end{cases}$$

donc

$$\Phi(t,x,h) = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} f(t,x)\right)$$

- Stabilité : On a : f lipschitzienne donc

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

Donc

$$\begin{aligned} |\Phi(t,x,h)-\Phi(t,y,h)| &= \left|f\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right) - f\left(t+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(t,y)\right)\right| \\ &\leq L\left|x+\frac{h}{2}f(t,x)-y-\frac{h}{2}f(t,y)\right| \\ &\leq L|x-y| + L\frac{h}{2}|f(t,x)-f(t,y)| \\ &\leq L|x-y| + \frac{h}{2}L^2|x-y| \\ &\leq \left(L+\frac{h}{2}L^2\right)|x-y| \\ &\leq K|x-y| \end{aligned}$$

Avec $K = L + \frac{h}{2}L^2$ Donc Φ est lipschitzienne ce qui implique que le schéma est stable.
Consistance :
On a $\Phi(t,x,0) = f(t,x) \Longrightarrow$ Schéma consistant.
Conclusion : Le schéma est stable et consistant donc il converge. Et :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,x,h) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right) + \frac{1}{2}f(t,x)\frac{\partial f}{\partial x}\left(t+\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}f(t,x)\right)$$

Donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,x,0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + f(t,x)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right]$$

On peut facilement vérifier que :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial h^2}(x,t,0) \neq \frac{1}{2}D^2 f(t,x)$$

ainsi le schéma est consistant d'ordre 2. (2) Pour le schéma de Heun on a :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left[f\left(t_n, x_n\right) + f\left(t_n + h, x_n + hf\left(t_n, x_n\right)\right)\right], \text{ Pour } n = 0, \ldots, N-1 \\ x\left(t_0\right) = x_0 \end{cases}$$

et

$$\Phi(t,x,h) = \frac{1}{2}(f(t,x) + f(t+h, x+hf(t,x)))$$

- Stabilité : On a : f lipschitzienne donc

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|.$$

Done

$$|\Phi(t,x,h) - \Phi(t,y,h)| = |\frac{1}{2}(f(t,x) + f(t+h, x+hf(t,x))) - \frac{1}{2}(f(t,y) + f(t+h, y+hf(t,y)))|$$

$$\leq \frac{L}{2}\cdots$$

On vérifie facilement que Φ est lipschitzienne ce qui implique que le schéma est stable.
- Consistance :
On a

$$\Phi(t,x,0) = \frac{1}{2}(f(t,x) + f(t,x)) = f(t,x).$$

$$\Phi(t,x,0) = f(t,x) \Longrightarrow \text{ Schéma consistant.}$$

Pour l'ordre de consistance, utilisons les tableaux de Butcher :

$$k_1 = f\left(t_n, x_n\right)$$

$$k_2 = f\left(t_n + h, x_n + hk_1\right)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$

Qu'on peut écrire :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Donc $s = 2, \quad b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ et $c_1 = 0, \quad c_2 = a_{21} = 1$ ainsi :

$$-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i.$$

$$-\sum_{i=1}^{s} b_i = b_1 + b_2 = 1.$$

$$-\sum_{i=1}^{s} b_i c_i = b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{1}{2}.$$

Conclusion le schéma est consistant d'ordre 2.

Exercice 4 : Construire un schéma de RK explicite d'ordre 3.

Solution :

Le tableau de Butcher pour $s = 3$ est :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}$$

Pour que les méthodes d'intégrations à chaque ligne soient d'ordre au moins 1 on impose :

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i \text{ et } \sum_{i=1}^{s} b_i = 1.$$

Donc :

$$a_{21} = c_2, \quad a_{31} + a_{32} = c_3.$$

et

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

La deuxième condition de consistance $\sum_{i=1}^{s} b_i c_i = \frac{1}{2}$, donne (avec $c_1 = 0$) :

$$b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}$$

La troisième condition $\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$ donne :

$$b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{3}$$

Et la quatrième condition $\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$ donne

$$b_3 a_{32} c_2 = \frac{1}{6}$$

i ne prend que la valeur 3 (car $i = 1$ est impossible on n' a pas a_{1j}.$i = 2$ corresponds à a_{21} et c_1 qui est nul). Finalement on doit résoudre le système :

$$\begin{aligned} a_{21} &= c_2 \\ a_{31} + a_{32} &= c_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\ b_2 c_2 + b_3 c_3 &= \frac{1}{2} \\ b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 &= \frac{1}{3} \\ b_3 a_{32} c_2 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Le système admet plusieurs solutions.
Quelques solutions possible :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ 0 & -1 & 1 & \\ \hline & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Exercice 5 : Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$(6) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, t_0 + T]. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1. Est ce que le schéma d'Euler explicite est A-Stable ?
2. On prend dans le TSL : $L = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ et $T = 10$. Calculer la solution exacte du problème précédent.
3. Étudier la A-Stabilité du schéma.
4. Tracer le graphe des solutions approchées et exacte pour : $h = \frac{1}{2}$, $h = \frac{3}{2}$ et $h = \frac{5}{2}$.

Solution :

(1) Le schéma d'Euler explicite est :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf\left(t_n, x_n\right) \quad n = 0 \ldots . N-1 \\ x\left(t_0\right) = x_0 \end{cases}$$

Pour le test linéaire standard (TLS) on prend $f(t,x) = -Lx$, avec L la constante de Lipschitz, on trouve :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - hLx_n = (1 - Lh)x_n \quad n = 0 \ldots, N-1 \\ x\left(t_0\right) = x_0 \end{cases}$$

x_n est donc une suite géométrique de raison $1 - Lh$ son terme général est :

$$x_n = (1 - Lh)^n x_0$$

Done

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0 \Longrightarrow |1 - Lh| < 1 \Longrightarrow -1 < 1 - Lh < 1 \Longrightarrow -2 < -Lh < 0$$

Comme L et h sont positifs alors h doit vérifier :

$$h < \frac{2}{L}$$

Conclusion :
Euler progressif n'est pas A-Stable.
Il faut prendre h très petit si le problème est très raide. Sinon $(1 - Lh)^n \to \infty$.
On obtient alors des fortes oscillations.
(2) Pour $L = 1, x(0) = 1$ et $T = 10$. Le problème à résoudre s'écrit donc :

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \quad t \in [0, 10] \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Il s'agit d'une EDO à variables séparables. En tenant compte des conditions aux limites on trouve la solution

$$x(t) = \exp^{-t}$$

(3) Le schéma d'Euler (5) s'écrit :

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - h)x_n \quad n = 0 \ldots \ldots, N-1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

On obtient la suite

$$x_n = (1 - h)^n$$

La solution exacte

$$x\left(t_n\right) = \exp^{-t_n} = \exp^{-nh} \operatorname{car} t_n = t_0 + nh = nh.$$

(4) De la formule $x_n = (1 - h)^n$ on déduit que
- Si $0 < h < 1$ alors la solution numérique est stable et convergente.
- Si $1 < h < 2$ alors la solution numérique oscille mais converge.
- Si $h > 2$ alors la solution numérique oscille et diverge.

(5) Application numérique
- si $h = \frac{1}{2}$ alors $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et la solution exacte $x\left(t_n\right) = \exp^{-n/2} \longrightarrow 0$. On a $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ donc le schéma est A-Stable.
- si $h = \frac{3}{2}$ alors $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et $x\left(t_n\right) = \exp^{-3n/2}$, numériquement on verra que le schéma converge lentement avec des oscillations.
- si $h = \frac{5}{2}$ alors $x_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ et $x\left(t_n\right) = \exp^{-5n/2}$. Le Schéma diverge.

Exercice 6 : Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $T \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $f : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L \in \mathbb{R}^+$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0+T]. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1. Retrouver le schéma d'Euler implicite en utilisant une approximation de la dérivée.
2. Est ce que le schéma d'Euler implicite à pas constant est A-stable ?

Solution :
(1) pour $n \geq 1$ on approche

$$x'(t_n) = f(t_n, x(t_n))$$

par

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{h} = f(t_n, x_n)$$

c'est à dire

$$x_n = x_{n-1} + hf(t_n, x_n)$$

Qu'on peut écrire :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1} + x_{n+1})$$

Pour tout $n \geq 0$ et x_0 donné.
(2) Appliqué au (TLS) on trouve :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - hLx_{n+1} \quad n \in \mathbb{N} \\ x_0 \quad \text{donné} \end{cases}$$

Done pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+hL)x_{n+1} = x_n \Longrightarrow x_{n+1} = \frac{1}{1+hL}x_n$$

ce qui implique

$$x_n = \left(\frac{1}{1+hL}\right)^n x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or $\forall h \geq 0$ et $L > 0$ on $\frac{1}{1+hL} < 1$ donc $x_n \to 0$.
Euler implicite est donc A-Stable.

Exercice 7 : Soit $L > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème (TLS) :

$$\begin{cases} x'(t) = -Lx(t), \quad \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 \quad \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Écrire le schéma du trapèze (Crank-Nicolson) permettant de calculer x_{n+1} à partir de x_n.
2. Étudier la A-Stabilité du schéma.
3. À partir du schéma du trapèze, en déduire le schéma de Heun, est-il A-Stable ?

Solution :
(1) Si nous intégrons l'EDO $x'(t) = f(t, x(t))$ entre t_n et t_{n+1} nous obtenons

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt$$

On utilise la formule du trapèze :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \approx \frac{h}{2}\left(f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x_{n+1})\right).$$

Soit x_n l'approximation de $x(t_n)$. On obtient le schéma du trapèze ou de Crank-Nicolson

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}\left(f\left(t_n, x_n\right)+f\left(t_{n+1}, x_{n+1}\right)\right), \quad \text{pour } n=0,1,2, \ldots \\ x_0=x\left(t_0\right) \end{array}\right.$$

Il s'agit d'un schéma implicite car il ne permet pas d'écrire directement x_{n+1} en fonction de x_n lorsque la fonction f n'est pas triviale.

(2) En appliquant le schéma du trapèze au problème (TLS) on obtient la suite définie par récurrence suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}\left(-L x_n-L x_{n+1}\right) \\ x_0=x\left(t_0\right) \end{array}\right.$$

Donc

$$x_{n+1}\left(1+\frac{h}{2} L\right)=x_n\left(1-\frac{h}{2} L\right) \Longrightarrow x_{n+1}=\frac{1-\frac{h}{2} L}{1+\frac{h}{2} L} x_n=\frac{2-h L}{2+h L} x_n$$

On trouve finalement

$$x_n=\left(\frac{2-L h}{2+L h}\right)^n x_0$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow+\infty} x_n=0$ si et seulement si $\left|\frac{2-L h}{2+L h}\right|<1$.

Notons x le produit $a h>0$ et q la fonction $q(x)=\frac{2-x}{2+x}=1-2 \frac{x}{2+x}$.

Nous avons $0<\frac{x}{2+x}<1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_{+}^*$, donc $|q(x)|<1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_{+}^*$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow+\infty} x_n=0$ pour tout $h>0$, et le schéma est A-Stable.

(3) Pour éviter le calcul implicite de x_{n+1} dans le schéma du trapèze, nous pouvons utiliser une prédiction d'Euler explicite et remplacer le x_{n+1} dans le terme $f\left(t_{n+1}, x_{n+1}\right)$ par

$$x_{n+1}=x_n+h f\left(t_n, x_n\right) .$$

On trouve ainsi le schéma de Heun :

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}\left[f\left(t_n, x_n\right)+f\left(t_n+h, x_n+h f\left(t_n, x_n\right)\right)\right] \\ x(0)=x_0 \end{array}\right.$$

En appliquant le schéma de Heun au TLS, on obtient la suite suivante :

$$\begin{gathered} x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}\left[-L x_n+f\left(t_n+h, x_n-h L x_n\right)\right] \\ \left.x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}\left[-L x_n-L\left(x_n-h L x_n\right)\right)\right] \\ x_{n+1}=\left(1-L h+\frac{(L h)^2}{2}\right) x_n . \end{gathered}$$

Done

$$x_n=\left(1-L h+\frac{(L h)^2}{2}\right)^n x_0$$

Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow+\infty} x_n=0$ si et seulement si

$$\left|1-L h+\frac{(L h)^2}{2}\right|<1 .$$

Notons x le produit $L h(x>0)$ et $p(x)$ le polynôme $p(x)=\frac{1}{2} x^2-x+1$. Nous avons $|p(x)|<1$ si et seulement si $x<2$. En effet

$$\begin{aligned} |p(x)|<1 & \Leftrightarrow\left|\frac{1}{2} x^2-x+1\right|<1 \\ & \Leftrightarrow\left|x^2-2 x+2\right|<2\left(\text{ comme } \Delta=-4<0 \text{ donc } x^2-2 x+2>0\right) \\ & \Leftrightarrow x^2-2 x+2<2 \\ & \Leftrightarrow x(x-2)<0(\text{ comme } x>0) \\ & \Leftrightarrow x-2<0 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ si et seulement si $h < \frac{2}{L}$.

Exercice 8 : L'évolution de la concentration de certaines réactions chimiques au cours du temps peut être décrite par l'équation différentielle

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{1+t^2}.$$

Sachant qu'à l'instant $t = 0$ la concentration est $x(0) = 5$, déterminer la concentration à $t = 2$ à l'aide de la méthode d'Euler implicite avec un pas $h = 0.5$.

Solution :
On a $f(t,x) = -\frac{x(t)}{1+t^2}$ donc le schéma d'Euler implicite est donné par le système :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_{n+1}) = x_n - h\frac{x_{n+1}}{1+t_n^2} & n = 0\ldots, N \\ x_0 = 5 \end{cases}$$

On trouve (8)

$$x_{n+1}\left(1 + \frac{h}{1+t_n^2}\right) = x_n$$

Qu'on peut écrire :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+\frac{h}{1+t_n^2}}$$

A l'instant $t = 0$ la concentration est $x_0 = 5$, et comme $h = 1/2$, alors $t_n = nh = n/2$ done pour $n \geq 1$ l'équation (9) donne :

$$x_{n+1} = \frac{4+(n+1)^2}{6+(n+1)^2}x_n$$

$t = 2$ correspond à $n = 4$, on obtient donc :

Exercice 9 : On considère le schéma :

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{2k_2}{3} + \frac{k_3}{6}\right)$$

avec : $k_1 = f(t_n, x_n)$, $k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_1}{2})$ et $k_3 = f(t_n + h, x_n - hk_1 + 2hk_2)$.

1. Dresser le tableau du Butcher de ce schéma. Est ce que ce schéma est consistant ?
2. Appliquer le schéma à un problème du type (TLS) et exprimer, dans ce cas, x_n.
3. Étudier, dans ce cas, la $\lim_{n\to+\infty} x_n$ et déduire.

Solution : On considère le schéma :

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{2k_2}{3} + \frac{k_3}{6}\right)$$

avec : $k_1 = f(t_n, x_n)$, $k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_1}{2}\right)$ et $k_3 = f(t_n + h, x_n - hk_1 + 2hk_2)$. 1. Dresser le tableau du Butcher de ce schéma. Est ce que ce schéma est consistant ?

$$\begin{aligned} &k_1 = f(t_n, x_n) \longrightarrow c_1 = 0 \\ &k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_1}{2}\right) \longrightarrow c_2 = \frac{1}{2}, a_{21} = \frac{1}{2} \\ &k_3 = f(t_n + h, x_n - hk_1 + 2hk_2) \longrightarrow c_3 = 1, a_{31} = -1, a_{32} = 2 \end{aligned}$$

Donc : On a :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ --- & -- & -- & -- \\ | & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \sum_{i=1}^{i=3} b_i = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1 & & & \end{array}$$

Donc, la schéma est consistant 2. Appliquer le schéma à un problème du type (TLS) et exprimer, dans ce cas, x_n. TLS $\longrightarrow x'(t) = -Lx(t) \longrightarrow f(t,x) = -Lx$ donc :

$$k_1 = f(t_n, x_n) = -Lx_n$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{k_1}{2}\right) = -L\left(x_n + h\frac{k_1}{2}\right) = -L\left(x_n - \frac{Lh}{2}x_n\right) = -L\left(1 - \frac{Lh}{2}\right)x_n$$

$$k_3 = f(t_n + h, x_n - hk_1 + 2hk_2) = -L(x_n - hk_1 + 2hk_2) = -L\left(x_n + Lhx_n - 2Lh\left(1 - \frac{Lh}{2}\right)x_n\right)$$

$$k_3 = -L(1 + Lh - Lh(2 - Lh))x_n = -L\left(1 - Lh + (Lh)^2\right)x_n$$

Done :

$$x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{k_1}{6} + \frac{2k_2}{3} + \frac{k_3}{6}\right) = x_n + h\left(-\frac{L}{6}x_n - \frac{2L}{3}\left(1 - \frac{Lh}{2}\right)x_n\right.$$

$$x_{n+1} = x_n - Lh\left(1 + \frac{Lh}{2} + \frac{(Lh)^2}{6}\right)x_n$$

$$x_{n+1} = \left(1 - Lh\left(1 + \frac{Lh}{2} + \frac{(Lh)^2}{6}\right)\right)x_n$$

On pose : $Q(X) = 1 - X\left(1 + \frac{X}{2} + \frac{X^2}{6}\right)$ done :

$$x_{n+1} = Q(Lh)x_n$$

On en déduit que :

$$x_n = [Q(Lh)]^n x_0$$

3. Étudier, dans ce cas, la $\lim_{n\to+\infty} x_n$ et déduire. La suite $(x_n)_n$ est une suite géométrique de raison $[Q(Lh)]$ et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } Q(Lh) > 1 \\ 1 & \text{si } Q(Lh) = 1 \\ 0 & \text{si } |Q(Lh)| < 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } Q(Lh) \leq -1 \end{cases}$$

On en déduit que la zone de A-stabilité peut être décrite par :

$$\{X = Lh > 0 \quad \text{tel que } |Q(Lh)| < 1\}$$

Exercice 10 : Nous considérons l'équation différentielle $x'(t) = x(t)t$ dont nous calculons une solution numérique par la formule suivante :

$$x_{n+1} = x_n + h(t_n + \frac{h}{2})(x_n + \frac{ht_nx_n}{2})$$

1. Sachant que nous avons utilisé un schéma de Runge-Kutta explicite de tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

   Déterminer toutes les valeurs sur le tableau précédent. Est ce que ce schéma est consistant ?
2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, x_n ;
3. Étudier, dans ce cas, la convergence de $(x_n)_n$ et déduire.

Schéma explicite, donc : $c_1 = a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ et $c_2 = a_{21}$ donc, la tableau de Butcher, dans ce cas, s'écrit : On a :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ --- & -- & -- \\ & b_1 & b_2 \end{array}$$

On a

$$K_1 = f\left(t_n, x_n\right) = t_n x_n$$

$$K_2 = f\left(t_n + \alpha h, x_n + \alpha h K_1\right) = \left(t_n + \alpha h\right)\left(x_n + \alpha h K_1\right) = \left(t_n + \alpha h\right)\left(x_n + \alpha h t_n x_n\right)$$

Donc :

$$x_{n+1} = x_n + h\left(b_1 K_1 + b_2 K_2\right) = x_n + h\left(b_1 t_n x_n + b_2\left(t_n + \alpha h\right)\left(x_n + \alpha h t_n x_n\right)\right)$$

$$x_{n+1} = x_n + h\left(b_1 t_n x_n + b_2 t_n x_n + b_2 \alpha h \left(t_n\right)^2 x_n + b_2 \alpha h x_n + b_2 \alpha^2 h^2 t_n x_n\right)$$

Or, le schéma est formulé par :

$$x_{n+1} = x_n + h\left(t_n x_n + \frac{h\left(t_n\right)^2 x_n}{2} + \frac{h x_n}{2} + \frac{h^2 t_n x_n}{4}\right)$$

Par identification :

$$b_1 + b_2 = 1 \quad b_2 \alpha = \frac{1}{2} \quad b_2 \alpha^2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow b_2 = 1 \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad b_1 = 0$$

et, on a :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ --- & -- & -- \\ | & 0 & 1 \end{array}$$

2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, x_n ; Pour $f(t,x) = -Lx$ on a :

$$K_1 = f\left(t_n, x_n\right) = -L x_n$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + h\frac{K_1}{2}\right) = -L\left(x_n + h\frac{-L x_n}{2}\right)$$

$$x_{n+1} = x_n + h\frac{1}{2}K_2 = x_n + h\left(-L\left(x_n + h\frac{-L x_n}{2}\right)\right.$$

$$x_{n+1} = x_n - Lh\left(1 - \frac{Lh}{2}\right)x_n = \left(1 - Lh\left(1 - \frac{Lh}{2}\right)\right)x_n$$

Donc :

$$x_n = \left(1 - Lh\left(1 - \frac{Lh}{2}\right)\right)^n x_0$$

3 . Étudier, dans ce cas, la convergence de $(x_n)_n$ et déduire. En particulier, la suite géométrique de raison $\left(1 - Lh\left(1 - \frac{Lh}{2}\right)\right)$ converge vers zéro si et seulement si $X = Lh > 0$ vérifie :

$$\left|1 - X\left(1 - \frac{X}{2}\right)\right| < 1$$

qui représente une condition pour la A-stabilité.

Exercice 11 : Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que le schéma (implicite) de Runge-Kutta de tableau de Butcher suivant :

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ --- & -- & -- \\ & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

Soit d'ordre, au moins, égal à 2 pour la fonction $f(t,x) = x$ et l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$.

On vérifie successivement les conditions :

$$a_{11}+a_{12}=c_1=\alpha$$
$$a_{21}+a_{22}=c_2=1$$

Donc le tableau est bien posé

$$b_1+b_2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

Donc le schéma est consistant et comme la fonction $f(t,x)=x$ est lipschitzienne, par rapport à sa deuxième variable ($|f(t,x)-f(t,y)|=|x-y|$), on déduit que le schéma stable et par conséquent convergent d'ordre, au moins, égal à 1.

$$b_1c_1+b_2c_2=\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{2}\Longrightarrow \alpha=\frac{1}{4}$$
$$b_1\left(a_{11}+a_{12}\right)+b_2\left(a_{21}+a_{22}\right)=\frac{2}{3}\left(0+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}(1+0)=\frac{1}{2}$$

Donc, le schéma est d'ordre au moins égal à deux. Remarquons que :

$$b_1c_1^2+b_2c_2^2=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{3}(1)^2=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{3}$$

Donc le schéma ne peut pas être d'ordre 3 .

Exercice 12 : Nous considérons l'équation $x'(t)=f(t,x(t))$ avec $f(t,x)=xt^2$ dont nous cherchons une solution numérique par le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n. Est ce que ce schéma est consistant ?
2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, x_n ;
3. Étudier, dans ce cas, la convergence de $(x_n)_n$ et déduire.

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n. Est ce que ce schéma est consistant ? On a $f(t,x)=(t^2)\,x$ et :

$$K_1=f\left(t_n,x_n\right)=\left(t_n\right)^2x_n$$
$$K_2=f\left(t_n+\frac{3h}{4},x_n+\frac{3h}{4}K_1\right)=\left(t_n+\frac{3h}{4}\right)^2\left(x_n+\frac{3h}{4}\left(t_n\right)^2x_n\right)$$
$$x_{n+1}=x_n+h\left(0\times K_1+1\times K_2\right)=x_n+h\left(t_n+\frac{3h}{4}\right)^2\left(x_n+\frac{3h}{4}\left(t_n\right)^2x_n\right)$$

On a $b_1+b_2=0+1=1$ donc le schéma est consistant. Remarquons que la fonction $f(t,x)=t^2x$ est évidemment Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable et par conséquent, le schéma est convergent d'ordre au moins égal à 1. 2. Appliquer la schéma au problème (TLS) et exprimer, dans ce cas, x_n : On a $f(t,x)=-Lx$ et :

$$K_1=f\left(t_n,x_n\right)=-Lx_n$$
$$K_2=f\left(t_n+\frac{3h}{4},x_n+\frac{3h}{4}K_1\right)=-L\left(x_n+\frac{3h}{4}K_1\right)=-L\left(x_n+\frac{3h}{4}\left(-Lx_n\right)\right)=-L\left(1-\frac{3Lh}{4}\right)x_n$$
$$x_{n+1}=x_n+hb_2K_2=x_n-Lh\left(1-\frac{3Lh}{4}\right)x_n=\left(1-Lh\left(1-\frac{3Lh}{4}\right)\right)x_n$$
$$x_n=\left(\left(1-Lh\left(1-\frac{3Lh}{4}\right)\right)\right)^nx_0$$

3. Étudier, dans ce cas, la convergence de $\left(x_n\right)_n$ et déduire. La suite $\left(x_n\right)_n$ est géométrique de raison $\left(1-Lh\left(1-\frac{3Lh}{4}\right)\right)$, en particulier, elle converge vers 0 si et seulement, pour $X=Lh>0$,

on a :

$$\left|1 - X\left(1 - \frac{3X}{4}\right)\right| < 1$$

Qui constitue une condition assurant la A-stabilité.

Exercice 13 : Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t, x) = x^2 + t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schéma d'Euler explicite puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces deux schémas :

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n ;
2. Sachant que $x_0 = 0$ et $h = 1$, calculer x_1.

Solution :

Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t, x) = x^2 + t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schéma d'Euler explicite puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces deux schémas :

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n ;
   Méthode d'Euler :

   $$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) = x_n + h(x_n^2 + t_n)$$

   Méthode Runge-Kutta : D'abord remarquons que Le tableau n'est pas complet ! La matrice $A = (a_{ij})$ doit être carré et par conséquent, il faut réintégrer la première ligne qui est, généralement, omise dans la représentation des méthodes explicites.

   $$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

   Pour $f(t, x) = x^2 + t$, on a :

   $$K_1 = f(t_n, x_n) = x_n^2 + t_n$$

   $$K_2 = f(t_n + 0 \times h, x_n + ha_{21}K_1) = f(t_n, x_n) = x_n^2 + t_n$$

   $$K_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1) = (x_n + \frac{h}{2}(x_n^2 + t_n))^2 + (t_n + \frac{h}{2})$$

   $$x_{n+1} = x_n + h(\frac{K_1}{6} + \frac{2K_2}{6} + \frac{K_3}{6})$$

   $$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(3x_n^2 + 3t_n + (x_n + \frac{h}{2}(x_n^2 + t_n))^2 + (t_n + \frac{h}{2}))$$

2. Sachant que $x_0 = 0$ et $h = 1$, calculer x_1.
   Euler explicite : $x_1 = x_0 + 1(x_0^2 + t_0) = 0$
   RK : $x_1 = x_0 + \frac{1}{6}(3x_0^2 + (x_0 + \frac{1}{2}(x_0^2))^2 + (\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$

Exercice 14 : Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t, x) = x.t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schémas d'Euler (explicite et implicite) puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces trois schémas :

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n ;
2. Sachant que $x_0 = 1$ et $h = 0.1$, calculer x_1.

Solution : Nous considérons l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$ avec $f(t, x) = x.t$ dont nous cherchons une solution numérique par le schémas d'Euler (explicite et implicite) puis le schéma, de Runge-Kutta, donné par son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Pour chacun de ces trois schémas :

1. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n ;
   Euler explicite :
   $$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n) = x_n + t_n x_n$$
   Euler implicite :
   $$x_{n+1} = x_n + f(t_{n+1}, x_{n+1}) = x_n + t_{n+1}x_{n+1} \Longrightarrow x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + t_{n+1}}$$
   RK : On a : $f(t, x) = x.t$
   $$K_1 = f(t_n, x_n) = x_n t_n$$
   $$K_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{h}{2}K_1) = ((t_n + \frac{1}{2}h)(x_n + \frac{h}{2}x_n t_n)$$
   $$K_3 = f(t_n + h, x_n + h(-K_1 + 2K_2)) = (t_n + h)(-t_n x_n + 2((t_n + \frac{1}{2}h)(x_n + \frac{h}{2}x_n t_n)))$$
   $$x_{n+1} = x_n + h(\frac{K_1}{6} + \frac{2K_2}{6} + \frac{K_3}{6})$$
2. Sachant que $x_0 = 1$ et $h = 0.1$, calculer x_1.
   Il suffit de remplacer

Exercice 15 : Étude des méthodes RK avec $s = 2$ (cas général). Pour chaque cas : Formuler le schéma, donner un exemple et préciser si nous pouvons reconnaître un schéma classique ?

1. Schéma implicite RK à 2 étages.
2. Schéma semi-implicite RK à 2 étages.
3. Schéma explicite RK à 2 étages. Étudier la convergence et la A-stabilité de ces schémas explicites.

Solution :
Étude des méthodes RK avec $s = 2$ (cas général). Pour chaque cas : Formuler le schéma, donner un exemple et préciser si nous pouvons reconnaître un schéma classique ?

1. Schéma implicite RK à 2 étages.
   Le schéma se formule à travers son tableau de Butcher :
$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$
   Pour que ce tableau soit bien posé :
$$a_{11} + a_{12} = c_1 \quad a_{21} + a_{22} = c_2$$
   et pour quel soit consistant
$$b_1 + b_2 = 1$$
$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & c_1 - a_{11} \\ c_2 & a_{21} & c_2 - a_{21} \\ \hline & 1 - b_2 & b_2 \end{array}$$
$$K_1 = f(t_n c_1 h, x_n + h(a_{11}K_1 + (c_1 - a_{11})K_2)$$
$$K_2 = f(t_n c_2 h, x_n + h(a_{21}K_1 + (c_2 - a_{21})K_2)$$
$$x_{n+1} = x_n + h((1 - b_2)K_1 + b_2 K_2)$$
   Exemple tiré de la littérature (Méthode de Gauss) : ($\psi = \frac{\sqrt{3}}{6}$)
$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \psi & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \psi \\ \frac{1}{2} + \psi & \frac{1}{4} + \psi & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

2. Schéma semi-implicite RK à 2 étages.
   Le schéma se formule à travers son tableau de Butcher :
$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & 0 \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$
   Pour que ce tableau soit bien posé :
$$a_{11} = c_1 \quad a_{21} + a_{22} = c_2$$
   et pour quel soit consistant
$$b_1 + b_2 = 1$$
$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & 0 \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|cc} c_1 & c_1 & 0 \\ c_2 & a_{21} & c_2 - a_{21} \\ \hline & 1 - b_2 & b_2 \end{array}$$
$$K_1 = f(t_n + c_1 h, x_n + h(a_{11}K_1)$$
$$K_2 = f(t_n + c_2 h, x_n + h(a_{21}K_1 + (c_2 - a_{21})K_2)$$
$$x_{n+1} = x_n + h((1 - b_2)K_1 + b_2 K_2)$$
   Exemple : $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ et $a_{21} = a_{22} = b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$
$$K_1 = f(t_n, x_n)$$
$$K_2 = f(t_n + h, x_n + h(\frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2}))$$

$$x_{n+1} = x_n + h(\frac{K_1}{2} + \frac{K_2}{2})$$

En portant cette dernière équation dans l'avant dernière :

$$K_2 = f(t_n + h, x_{n+1}) = f(t_{n+1}, x_{n+1})$$

et Finalement :

$$x_{n+1} = x_n + h(\frac{f(t_n, x_n)}{2} + \frac{f(t_{n+1}, x_{n+1})}{2})$$

Il s'agit de la méthode du trapèze (Crank-Nicolson).

3. Schéma explicite RK à 2 étages. Étudier la convergence et la A-stabilité de ces schémas explicites.

Le schéma se formule à travers son tableau de Butcher :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Pour que ce tableau soit bien posé :

$$a_{21} = c_2$$

et pour quel soit consistant

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ c_2 & a_{21} & 0 \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & 0 \\ \hline & 1-b_2 & b_2 \end{array}$$

$$K_1 = f(t_n, x_n)$$

$$K_2 = f(t_n + c_2 h, x_n + h(c_2 K_1)$$

$$x_{n+1} = x_n + h((1 - b_2)K_1 + b_2 K_2)$$

Exemple : $c_2 = a_{21} = 1 \quad b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Schéma de Heun.

Pour que le schéma soit d'ordre, au moins, 2 il faut $b_2 c_2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow c_2 = \frac{1}{2c_2}$

Pour que le Schéma soit d'ordre, au moins, 3 il faut $b_2 c_2^2 = \frac{1}{3}$ et $b_2 a_{21} c_1 = \frac{1}{6}$ ce qui est impossible car $c_1 = 0$.

On déduit :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\beta} & \frac{1}{2\beta} & 0 \\ \hline & 1-\beta & \beta \end{array}$$