

Exercice 1 : On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = t + y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Calculer des valeurs approchées de y_0, y_1, y_2 et y_3 en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.
- Sachant que la solution exacte est donnée par $y(t) = 2e^t - t - 1$, Calculer l'erreur d'approximation pour les valeurs approchées calculées précédemment. Comment varie cette erreur en fonction de i ?

Exercice 2 : Soit (PC) le problème de Cauchy donné par :

$$(PC) \begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

- On suppose que (PC) admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte);
- Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Crank-Nicolson :
En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ;
- Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r (en fonction de h). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$;
- Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n .

Exercice 3 : Considérons le problème de Cauchy : Trouver $y : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une unique solution y . Le principe des méthodes numériques est de subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en m intervalles de longueur $h = \frac{T - t_0}{m} = t_{i+1} - t_i$. Pour chaque noeud $t_i = t_0 + ih$, ($1 < i < m$) on cherche la valeur inconnue y_i qui approche $y(t_i)$. Rappelons que l'ensemble des valeurs $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ représente la solution numérique du problème. Dans cette exercice on va construire des nouveaux schémas numériques basés sur l'intégration de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_i et t_{i+2} :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t))dt.$$

- En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique explicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i . Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;
- En utilisant la formule de quadrature de Simpson pour approcher le membre de droite, écrire un schéma numérique implicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i ; Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;

Exercice 4 On considère le problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 10]$, définie par :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy ;
2. Soit h le pas temporel. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire ;
3. En déduire une formulation du type : $y_{i+1} = g(h, i)$ avec $g(h, i)$ une fonction à préciser (autrement dit, l'itérée en t_i ne dépend que de h et i et ne dépend pas de y_i) ;
4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour déterminer les solutions obtenues avec la méthode explicite d'Euler avec $h = 2.5$ puis avec $h = 0.5$.

Exercice 5 : Une deuxième approche pour la résolution numérique des équations différentielles consiste à utiliser le calcul numérique de la dérivée et de l'utiliser pour approcher $y'(t_i)$. Soit f une fonction supposée dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $(i)_{i=0, \dots, n}$ une subdivision de $[a, b]$ en n sous intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$, une valeur approché de $f'(x_i)$ peut être donnée par l'une des deux formules :

$$D_1 : \quad f'_d(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$D_2 : \quad f'_g(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \quad i = 1, \dots, n$$

- a. Une fonction f est donnée par les valeurs suivantes :

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	2	4	8	16	32

- a1. Calculer, de deux manières différentes, une valeur approchée de $f'(3)$,
 - a2. Sachant que f est définie par $f(x) = 2^x$, calculer $f'(3)$ et comparer la valeur exacte et les valeurs approchées.
- b. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit $(t_i)_{i=0, \dots, n}$ une subdivision de $[0, T]$ avec $t_i = 0 + i(\frac{T-0}{n})$, une solution approchée $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ du problème (P) peut être obtenue en utilisant la dérivation numérique de la manière suivante :

- b1. Écrire l'équation différentielle pour $t = t_i$ puis utiliser D_1 pour reformuler l'équation différentielle en une relation entre $y(t_{i+1})$ et $y(t_i)$;
 - b2. En utilisant l'approximation $y_i \simeq y(t_i)$, formuler la méthode de résolution ainsi obtenue (dite méthode d'Euler explicite) ;
 - b3. Formuler la méthode d'Euler implicite obtenue en utilisant la définition D_2 au lieu de D_1 ;
- c. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- c1. Montrer que le problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.
- c2. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1), y(0.2), y(0.3), \dots, y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.
- c3. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1), y(0.2), y(0.3), \dots, y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.1$.

Exercice 6 : Considérons le problème de Cauchy :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = 1 - 2y(t) \\ y(t_0) = 1 \end{cases}$$

- Montrer que le problème (P) admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.
- Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{R}$ (ainsi $t_0 = 0$; $t_1 = h$; $\dots$) et y_n une approximation de $y(t_n)$.
 - Évaluer $\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt$ en utilisant la méthode du point milieu;
 - Intégrer l'équation différentielle, du problème, entre t_n et t_{n+2} et déduire, en utilisant le résultat de la question précédente, une relation entre y_{n+2} ; y_{n+1} et y_n (et en fonction de h);
- Proposer une expression permettant de calculer y_1 et formuler le schéma obtenu (pour une résolution numérique de (P)).

Exercice 7 : Considérons le problème de Cauchy suivant dont on suppose qu'il existe une et une seule

solution : Trouver $y : [t_0, T] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Le principe des méthodes numériques pour approcher la fonction y est de subdiviser l'intervalle $[t_0; T]$ en N intervalles de longueur $h = \frac{T-t_0}{N}$. Pour chaque nœud $t_n = t_0 + nh$; ($1 \leq n \leq N$) on cherche la valeur inconnue u_n qui approche $y(t_n)$ à partir de $u_0 = y_0$. L'ensemble des valeurs $\{u_0; u_1; \dots u_N\}$ représente la solution numérique.

Dans cette exercice on va construire des schémas numériques basés sur l'intégration approchée de l'EDO $y'(t) = f(t; y(t))$ entre t_n et t_{n+1} à partir de la relation :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

Les schémas d'ADAM approchent l'intégrale précédente par l'intégrale d'un polynôme interpolant f en des points donnés.

- Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler le point $\{t_n\}$. Quel schéma reconnaît-on ?
- Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_n; t_{n+1}\}$. Quel schéma reconnaît-on ?
- Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_{n-1}; t_n; t_{n+1}\}$ en proposant une adéquate initialisation de la suite. (Attention : on intègre f sur l'intervalle $[t_n; t_{n+1}]$ mais on interpole f en t_{n-1} , t_n et t_{n+1}).

Exercice 8 : Soit $\beta > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -\beta y(t) & \text{Pour } t > 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où y_0 est une valeur donnée. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et u_n une approximation de $y(t_n)$:

- Écrire le schéma du trapèze (appelé aussi de Crank Nicolson) permettant de calculer u_{n+1} à partir de u_n . Sous quelle condition sur h le schéma du trapèze est-il A-stable ? Autrement dit, pour quelles valeurs de h la relation $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ a-t-elle lieu ?
- A partir du schéma du trapèze, et en utilisant une prédiction progressive de votre choix déduire le schéma de Heun. Sous quelle condition sur h le schéma de Heun est-il A-stable ?

Exercice 1 : On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = t + y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Calculer des valeurs approchées de y_0, y_1, y_2 et y_3 en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.
- Sachant que la solution exacte est donnée par $y(t) = 2e^t - t - 1$, Calculer l'erreur d'approximation pour les valeurs approchées calculées précédemment. Comment varie cette erreur en fonction de i ?

Solution :

$f(t, x) = t + x$ est une fonction lipschitzienne et le schéma d'Euler explicite s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h(t_n + y_n) = (1 + h)y_n + ht_n$$

$$y_0 = 1 \quad y_1 = 1.1 \quad y_2 = 1.22$$

$$y_3 = 1.362 \quad y_4 = 1.5282$$

$$y(t_0) = y(0) = 1 \quad y(t_1) = y(0.1) = 2e^{0.1} - 0.1 - 1 \simeq 1.1103$$

$$y(t_2) = y(0.2) = 2e^{0.2} - 0.2 - 1 = 1.2428 \quad y(t_3) = y(0.3) = 2e^{0.3} - 0.3 - 1 = 1.3997$$

$$E_0 = |y(0) - y_0| = 0$$

$$E_1 = |y(t_1) - y_1| = |1.1103 - 1.1| = 0.0103$$

$$E_2 = |y(t_2) - y_2| = |1.2428 - 1.22| = 0.0228$$

$$E_3 = |y(t_3) - y_3| = |1.3997 - 1.362| = 0.0377$$

L'erreur semble croître d'une itération à la suivante.

Exercice 2 : Soit (PC) le problème de Cauchy donné par :

$$(PC) \begin{cases} y'(t) + 10y(t) = 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

- On suppose que (PC) admet une solution unique. Calculer cette solution (exacte);
- Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Crank-Nicolson :
En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ;
- Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r (en fonction de h). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$;
- Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n .

Solution :

Par séparation des variables, nous avons :

$$y' = -10y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -10y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -10dt \Rightarrow \ln(|y|) = -10t + c \Rightarrow |y| = e^c e^{-10t} \Rightarrow y = k e^{-10t}$$

et comme $y(0) = y_0 = k e^0$ alors, la solution du (PC) est :

$$y(t) = y_0 e^{-10t}$$

- b. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (en particulier $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, nous présentons la méthode dite de Cranck-Nicolson :

En intégrant l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis en utilisant la méthode du trapèze pour calculer $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$ donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n ; En intégrant l'équation, nous avons :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)dt = -10 \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt \Rightarrow y(t_{n+1}) - y(t_n) = -10 \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)dt$$

En appliquant la méthode du trapèze pour approcher l'intégrale du deuxième membre, nous obtenons :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = -10((t_{n+1} - t_n) \frac{y(t_{n+1}) + y(t_n)}{2}) = -10(h \frac{y(t_{n+1}) + y(t_n)}{2}) = -5h(y(t_{n+1}) + y(t_n))$$

Finalement, en utilisant l'approximation $y(t_i) \simeq y_i$ on déduit :

$$y_{n+1} - y_n = -5h(y_{n+1} + y_n) \Rightarrow (1 + 5h)y_{n+1} = (1 - 5h)y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1 - 5h}{1 + 5h}y_n$$

- c. Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison r (en fonction de h). Puis, Montrer qu'elle vérifie $|r| < 1$ pour tout $h > 0$; On a :

$$y_{n+1} = \frac{1 - 5h}{1 + 5h}y_n = r y_n$$

si $h \neq \frac{1}{5}$ alors $r \neq 0$ et la suite $(y_n)_n$ est géométrique de raison $r = \frac{1-5h}{1+5h}$.

En plus, h étant positif,

$$|1 - 5h| < |1| + |-5h| = 1 + 5h = |1 + 5h| \Rightarrow |r| = \frac{|1 - 5h|}{|1 + 5h|} < 1$$

- d. Sous quelle condition sur $h > 0$ le schéma génère-t-il une suite positive ? Donner, alors, l'expression de y_n en fonction de n .

$$r = \frac{1 - 5h}{1 + 5h} \geq 0 \Rightarrow 1 - 5h \geq 0 \Rightarrow h \leq \frac{1}{5}$$

En utilisant les propriétés des suites géométriques et en supposant $h < \frac{1}{5}$ on a :

$$y_n = y_0 r^n = y_0 \left(\frac{1 - 5h}{1 + 5h} \right)^n$$

Exercice 3 : Considérons le problème de Cauchy : Trouver $y : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t > t_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une unique solution y . Le principe des méthodes numériques est de subdiviser l'intervalle $[t_0, T]$ en m intervalles de longueur $h = \frac{T - t_0}{m} = t_{i+1} - t_i$. Pour chaque noeud $t_i = t_0 + ih$, ($1 < i < m$) on cherche la valeur inconnue y_i qui approche $y(t_i)$. Rappelons que l'ensemble des valeurs $\{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ représente la solution numérique du problème.

l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_i et t_{i+2} :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t)) dt.$$

- En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique explicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i . Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;
- En utilisant la formule de quadrature de Simpson pour approcher le membre de droite, écrire un schéma numérique implicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i ; Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;
- Proposer une modification du schéma à la question précédente pour qu'il devienne explicite.

Solution :

Dans cette exercice on va construire des nouveaux schémas numériques basés sur l'intégration de l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ entre t_i et t_{i+2} :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t)) dt.$$

- En utilisant la formule de quadrature du point milieu pour approcher le membre de droite écrire un schéma numérique explicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i . Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;

La méthode du point milieu (ou rectangle au milieu) consiste à remplacer la fonction $g(t) = f(t, y(t))$ par la constante $g(\frac{a+b}{2}) = g(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) \simeq f(t_{i+1}, y_{i+1})$:

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t)) dt = \int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t_{i+1}, y_{i+1}) dt = f(t_{i+1}, y_{i+1}) \int_{t_i}^{t_{i+2}} dt = f(t_{i+1}, y_{i+1}) [t_{i+2} - t_i] = 2h f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

D'où :

$$y(t_{i+2}) - y(t_i) = 2h f(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y(t_{i+2}) = y(t_i) + 2h f(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+2} = y_i + 2h f(t_{i+1}, y_{i+1})$$

Le calcul de y_{i+2} nécessite les deux valeurs y_{i+1} et y_i , par conséquent, on doit donner les deux premières valeurs de la suite :

$y_0 = y(0)$ donnée et $y_1 = y_0^P = y_0 + h f(t_0, y_0)$ calculée par la méthode d'Euler explicite.

- En utilisant la formule de quadrature de Simpson pour approcher le membre de droite, écrire un schéma numérique implicite permettant de calculer y_{i+2} à partir de y_{i+1} et y_i ; Notons que ce schéma a besoin de deux valeurs initiales ; on posera alors $y_0 = y(0)$ et y_1 sera approché par une prédiction d'Euler progressive ;

Application de la méthode de Simpson avec les trois points : x_i, x_{i+1} et x_{i+2} :

$$\int_{t_i}^{t_{i+2}} f(t, y(t)) dt = \frac{t_{i+2} - t_i}{6} [f(t_i, y(t_i)) + 4f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) + f(t_{i+2}, y(t_{i+2}))]$$

On a : $t_{i+2} - t_i = 2h$ et $f(t_j, y(t_j)) \simeq f(t_j, y_j)$

d'où :

$$y_{i+2} - y_i = \frac{h}{3} [f(t_i, y_i) + 4f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_{i+2}, y_{i+2})]$$

$y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3} [f(t_i, y_i) + 4f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_{i+2}, y_{i+2})]$

Le calcul de y_{i+2} nécessite les deux valeurs y_{i+1} et y_i , par conséquent, on doit donner les deux premières valeurs de la suite :

$y_0 = y(0)$ donnée et $y_1 = y_0^P = y_0 + hf(t_0, y_0)$ calculée par la méthode d'Euler explicite.

Remarquons que y_{i+2} figure aussi dans le second membre, donc la méthode est implicite (nécessite un calcul supplémentaire pour isoler et calculer y_{i+2}).

- c. Proposer une modification du schéma à la question précédente pour qu'il devienne explicite.

Pour obtenir une méthode explicite, il suffit de remplacer, dans le second membre, y_{i+2} par une expression équivalente (par exemple, en utilisant la méthode explicite d'Euler) : $y_{i+2} = y_{i+1}^P = y_{i+1} + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$ d'où :

$$y_{i+2} = y_i + \frac{h}{3} [f(t_i, y_i) + 4f(t_{i+1}, y_{i+1}) + f(t_{i+2}, y_{i+1} + hf(t_{i+1}, y_{i+1}))]$$

Exercice 4 On considère le problème de Cauchy sur l'intervalle $[0, 10]$, définie par :

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), & t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy ;
2. Soit h le pas temporel. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire ;
3. En déduire une formulation du type : $y_{i+1} = g(h, i)$ avec $g(h, i)$ une fonction à préciser (autrement dit, l'itérée en t_i ne dépend que de h et i et ne dépend pas de y_i) ;
4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour déterminer les solutions obtenues avec la méthode explicite d'Euler avec $h = 2.5$ puis avec $h = 0.5$.

Solution :

1. Calculer la solution exacte du problème de Cauchy ; Séparation des variables :

$$y' = -y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dt \Rightarrow \ln(|y|) = -t + \text{cste} \Rightarrow y = Ke^{-t}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow y = e^{-t}$$

2. Soit h le pas temporel. Écrire la méthode d'Euler explicite pour cette équation différentielle ordinaire (EDO) ;

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}^P - y_i^P}{h} = f(t_i, y_i^P) \Rightarrow y_{i+1}^P = y_i + hf(t_i, y_i^P) = y_i^P - hy_i^P = (1 - h)y_i^P & \text{pour } i = 1, 2, \dots \\ y_0 = y(0) = 1 \text{ donnée,} \end{cases}$$

3. En déduire une formulation du type :

$$y_{i+1} = g(h, i)$$

avec $g(h, i)$ une fonction à préciser (autrement dit, l'itérée en t_i ne dépend que de h et i et ne dépend pas de y_i) ; On a

$$y_{i+1}^P = (1 - h)y_i^P = (1 - h)(1 - h)y_{i-1}^P = \dots = (1 - h)^{i+1}y_0 = (1 - h)^{i+1}$$

On peut démontrer le résultat par récurrence.

4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour tracer les solutions : Pour chaque méthode numérique, il faut construire la table des valeurs (t_i, y_i) :

- exacte,
- obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 2.5$,

$$n = 4$$

$$n = 8$$

- obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 0.5$.

$$n = 20$$

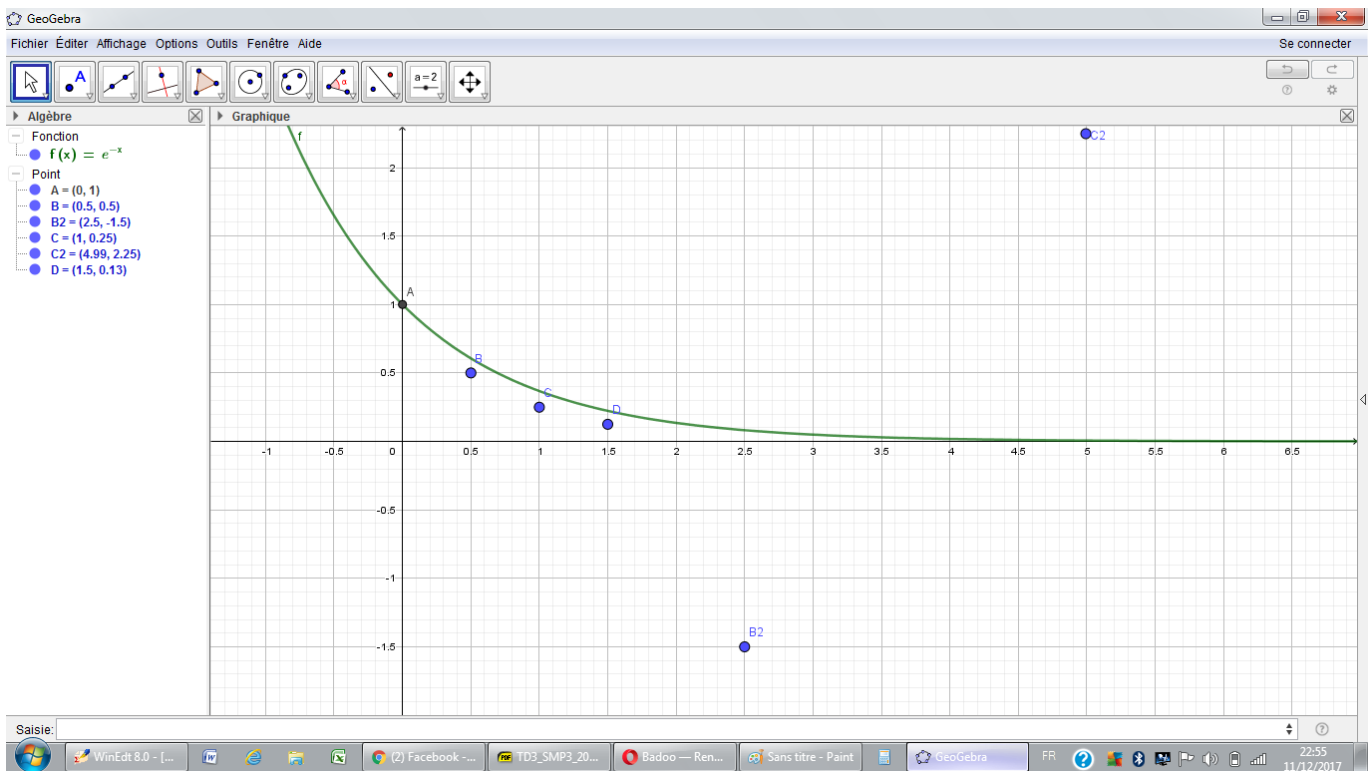
4. Utiliser la formulation ainsi obtenue pour tracer les solutions :

- exacte : La fonction $y(t) = e^{-t}$ Pour chaque méthode numérique, il faut construire la table des valeurs (t_i, y_i) :
- obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 2.5 \Rightarrow n = 4$ et $y_{i+1} = (-1, 5)^{i+1}, i = 0, 1, \dots$

i	0	1	2	3	4
t_i	0	2,5	5	7,5	10
y_i	1	-1,5	2,25	-3,375	5,0625

- obtenue avec la méthode d'Euler avec $h = 0.5 \Rightarrow n = 20$ et $y_{i+1} = (0, 5)^{i+1}, i = 0, 1, \dots$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Y_i	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,0078125	0,00390625
	9		10		11		12		13
	4,5		5		5,5		6		6,5
	0,001953125		0,001953125		0,0009765625		0,00048828125		0,0001220703125
	14			15			16		17
	7			7,5			8		8,5
	0,00006103515625			0,000030517578125			0,0000152587890625		0,00000762939453125
	18			19			20		
	9			9,5			10		
	0,000003814697265625			0,0000019073486328125			0,00000095367431640625		



les points $A, B, C, \dots$ la solution approchée avec $n = 20$.

Exercice 5 : Une deuxième approche pour la résolution numérique des équations différentielles consiste à utiliser le calcul numérique de la dérivée et de l'utiliser pour approcher $y'(t_i)$. Soit f une fonction supposée dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $(i)_{i=0, \dots, n}$ une subdivision de $[a, b]$ en n sous intervalles de même amplitude $h = \frac{b-a}{n}$, une valeur approché de $f'(x_i)$ peut être donnée par l'une des deux formules :

$$D_1 : \quad f'_d(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$D_2 : \quad f'_g(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \quad i = 1, \dots, n$$

a. Une fonction f est donnée par les valeurs suivantes :

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	2	4	8	16	32

a1. Calculer, de deux manières différentes, une valeur approchée de $f'(3)$,

a2. Sachant que f est définie par $f(x) = 2^x$, calculer $f'(3)$ et comparer la valeur exacte et les valeurs approchées.

b. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit $(t_i)_{i=0, \dots, n}$ une subdivision de $[0, T]$ avec $t_i = 0 + i(\frac{T-0}{n})$, une solution approchée $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ du problème (P) peut être obtenue en utilisant la dérivation numérique de la manière suivante :

b1. Écrire l'équation différentielle pour $t = t_i$ puis utiliser D_1 pour reformuler l'équation différentielle en une relation entre $y(t_{i+1})$ et $y(t_i)$;

b2. En utilisant l'approximation $y_i \simeq y(t_i)$, formuler la méthode de résolution ainsi obtenue (dite méthode d'Euler explicite);

b3. Formuler la méthode d'Euler implicite obtenue en utilisant la définition D_2 au lieu de D_1 ;

c. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

c1. Montrer que le problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.

c2. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1), y(0.2), y(0.3), \dots, y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler explicite avec $h = 0.1$.

c3. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1), y(0.2), y(0.3), \dots, y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler implicite avec $h = 0.1$.

Solution :

1) Une fonction f est donnée par les valeurs suivantes :

x_i	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	2	4	8	16	32

a. Calculer, de deux manières différentes, une valeur approchée de $f'(3)$,

$$f'(3) = f'(x_2) \approx f'_d(3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{f(4) - f(3)}{1} = \frac{16 - 8}{1} = 8$$

$$f'(3) = f'(x_2) \approx f'_g(3) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{f(3) - f(2)}{1} = \frac{8 - 4}{1} = 4$$

$$f(x) = 2^x = e^{x \ln 2} \Rightarrow f'(x) = \ln 2 e^{x \ln 2} = 2^x \ln 2 \Rightarrow f'(3) = 2^3 \ln 2 \approx 4,23$$

2) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit $(t_i)_{i=0, \dots, n}$ une subdivision de $[0, T]$ avec $t_i = 0 + i(\frac{T-0}{n})$, une solution approchée $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ du problème (P) peut être obtenue en utilisant la dérivation numérique de la manière suivante :

a. Écrire l'équation différentielle pour $t = t_i$ puis utiliser D_1 pour reformuler l'équation différentielle en une relation entre $y(t_{i+1})$ et $y(t_i)$;

On a :

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))$$

b. En utilisant l'approximation $y_i \simeq y(t_i)$, formuler la méthode de résolution ainsi obtenue (dite méthode d'Euler explicite);

On a :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

c. Formuler la méthode d'Euler implicite obtenue en utilisant la définition D_2 au lieu de D_1 ;

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{h} = f(t_i, y(t_i)) \Rightarrow y(t_i) = y(t_{i-1}) + hf(t_i, y(t_i))$$

Donc :

$$y_i = y_{i-1} + hf(t_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

3) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que ce problème admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.

Il s'agit d'un problème de Cauchy avec $f(t, y) = 1 + y$ et on a :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |1 + y_1 - (1 + y_2)| = |y_1 - y_2|$$

Donc f est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et le problème de Cauchy admet une solution unique.

Equation différentielle linéaire du 1er ordre : $y'(t) - y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = Ke^t$ $y(t) = -1$ est une solution particulière, donc : $y(t) = ke^t - 1$ et comme $y(0) = 0$ alors $k = 1$ donc :

$$y(t) = e^t - 1$$

2. Calculer des valeurs approchées de $y(0.1)$, $y(0.2)$, $y(0.3)$, ..., $y(1)$ en utilisant **la méthode d'Euler explicite ou progressive** avec $h = 0.1$.

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}^P - y_i^P}{h} = f(t_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1}^P = y_i + hf(t_i, y_i^P) & \text{pour } i = 1, 2, \dots \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

avec

$$h = 0.1, f(t, y) = 1 + y, \text{ et } y_0 = 0$$

Soit :

$$y_{i+1}^P = y_i^P + 0.1(1 + y_i^P) = 0.1 + 1.1y_i^P \text{ avec } y_0^P = y(0) = 0 \text{ et } i = 0, 1, \dots, 10$$

plicité avec $h = 0.1$. Notons qu'une valeur approchée de $y(t_i) = y(ih) = y_i^P = 0.1 + 1.1y_{i-1}^P$ pour $i = 1, \dots, 10$ donc :

$$y(0.1) = y(t_1) \simeq y_1^P = 0.1 + 1.1 \times 0 = 0.1, y(0.2) = y(t_2) \simeq y_2^P = 0.1 + 1.1 \times y_1^P = 0.1 + 1.1 \times 0.1 = 0.21, \dots$$

Schéma d'Euler retrograde ou implicite :

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}^R - y_i^R}{h} = f(t_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow y_{i+1}^R = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}^R) & \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots \\ y_0 \text{ donnée,} \end{cases}$$

avec

$$h = 0.1, f(t, y) = 1 + y, \text{ et } y_0 = 0$$

Soit :

$$y_{i+1}^R = y_i^R + 0.1(1 + y_{i+1}^R) = 0.1 + y_i^R + 0.1y_{i+1}^R \Rightarrow y_{i+1}^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y_i^R \text{ avec } y_0^R = y(0) = 0 \text{ et } i = 0, 1, \dots$$

Notons qu'une valeur approchée de $y(t_i) = y(ih) = y_i^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y_{i-1}^R$ pour $i = 1, \dots, 10$ donc :
 $y(0.1) \simeq y_1^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y_0^R = \frac{1}{9}, y(0.2) = y(t_2) \simeq y_2^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{9}y_1^R = \frac{1}{9} + \frac{10}{81} \simeq 0.23, \dots$

4. Comparer les erreurs d'approximation des deux méthodes.

Il faut comparer l'erreur (la différence) entre la valeur exacte et les valeurs approchées, on peut utiliser le tableau suivant :

i	0	1	2	3	4	5	...	9	10
t_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	...	0.9	1
Valeur exacte $y(t_i) = e^{t_i} - 1$	0	$e^{0.1} - 1 \simeq 0.105$	$e^{0.2} - 1 \simeq 0.221$						
Valeur approchée explicite y_i^P	0	0.1	0.21						
Valeur approchée implicite y_i^R	0	$\frac{1}{9} \simeq 0.111$	0.23						
Erreur $E_P = y(t_i) - y_i^P $	0	0.005	0.011						
Erreur $E_R = y(t_i) - y_i^R $	0	0.006	0.009						

Exercice 6 : Considérons le problème de Cauchy :

$$(P) \begin{cases} y'(t) = 1 - 2y(t) \\ y(t_0) = 1 \end{cases}$$

- Montrer que le problème (P) admet une solution unique. Donner l'expression explicite de cette solution.
- Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{R}$ (ainsi $t_0 = 0$; $t_1 = h$; $\dots$) et y_n une approximation de $y(t_n)$.
 - Évaluer $\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt$ en utilisant la méthode du point milieu;
 - Intégrer l'équation différentielle, du problème, entre t_n et t_{n+2} et déduire, en utilisant le résultat de la question précédente, une relation entre y_{n+2} ; y_{n+1} et y_n (et en fonction de h);
- Proposer une expression permettant de calculer y_1 et formuler le schéma obtenu (pour une résolution numérique de (P)).

Solution

Soit (P) le problème de Cauchy donné par : $(P) \begin{cases} y'(t) = 1 - 2y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(P) est un problème de Cauchy avec $f(t, y) = 1 - 2y$ et on a :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |1 - 2y_1 - (1 - 2y_2)| = |-2(y_1 - y_2)| = 2|y_1 - y_2|$$

Donc f est 2-Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et le problème admet une solution unique.

ESSM : $y' = -2y \Rightarrow y = ke^{-2t}$ Solution particulière (variation de la constante) :

$$k'e^{-2t} - 2ke^{-2t} = 1 - 2ke^{-2t} \Rightarrow k' = \frac{1}{e^{-2t}} \Rightarrow k' = e^{2t} \Rightarrow k = \frac{e^{2t}}{2} \Rightarrow y_p = \frac{1}{2}$$

La solution générale est donnée par :

$$y = ke^{-2t} + \frac{1}{2} \text{ et } y(0) = k + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Finalement, la solution du problème est donnée par :

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$$

2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$.

a. Évaluer $\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt$ en utilisant **la méthode du point milieu** ;

$$\int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt = (t_{n+2} - t_n)y\left(\frac{t_{n+2} + t_n}{2}\right) = 2hy(t_{n+1})$$

b. **Intégrer** l'équation différentielle, du problème, entre t_n et t_{n+2} et déduire, en utilisant le résultat de la question (2.a.), une relation entre y_{n+2} , y_{n+1} et y_n (et en fonction de h) ;

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+2}} y'(t)dt &= \int_{t_n}^{t_{n+2}} (1 - 2y(t))dt = \int_{t_n}^{t_{n+2}} dt - 2 \int_{t_n}^{t_{n+2}} y(t)dt \\ y(t_{n+2}) - y(t_n) &= 2h - 4hy(t_{n+1}) \end{aligned}$$

Donc :

$$y_{n+2} = -4hy_{n+1} + y_n + 2h$$

c. Proposer une expression permettant de calculer y_1 et formuler le schéma obtenu (pour une résolution numérique de (P)).

On utilise la méthode d'Euler progressive :

$$y_1 = y_0 + hf(t, y_0) = y_0 + h(1 - 2y_0) = 1 + h(1 - 2) = 1 - h$$

Donc le schéma est donné par :

$$\begin{cases} y_{n+2} = -4hy_{n+1} + y_n + 2h \\ y_1 = 1 - h \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Exercice 7 : Considérons le problème de Cauchy suivant dont on suppose qu'il existe une et une seule

solution : Trouver $y : [t_0, T] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

Le principe des méthodes numériques pour approcher la fonction y est de subdiviser l'intervalle $[t_0; T]$ en N intervalles de longueur $h = \frac{T-t_0}{N}$. Pour chaque nœud $t_n = t_0 + nh$; ($1 \leq n \leq N$) on cherche la valeur inconnue u_n qui approche $y(t_n)$ à partir de $u_0 = y_0$. L'ensemble des valeurs $\{u_0; u_1; \dots u_N\}$ représente la solution numérique.

Dans cette exercice on va construire des schémas numériques basés sur l'intégration approchée de l'EDO $y'(t) = f(t; y(t))$ entre t_n et t_{n+1} à partir de la relation :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

en des points donnés.

- Écrire le schéma explicite obtenu en choisissant comme points à interpoler le point $\{t_n\}$. Quel schéma reconnaît-on ?
- Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_n; t_{n+1}\}$. Quel schéma reconnaît-on ?
- Écrire le schéma implicite obtenu en choisissant comme points à interpoler les points $\{t_{n-1}; t_n; t_{n+1}\}$ en proposant une adéquate initialisation de la suite. (Attention : on intègre f sur l'intervalle $[t_n; t_{n+1}]$ mais on interpole f en t_{n-1} , t_n et t_{n+1}).

Solution

1) Le polynôme d'interpolation de la fonction $f(., y(.))$ sur la base d'un seul point t_n est le polynôme de degré zéro donné par $P_0(x) = f(t_n, y(t_n))$. Donc :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_0(t) dt = y(t_n) + f(t_n, y(t_n)) \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt = y(t_n) + f(t_n, y(t_n))(t_{n+1} - t_n)$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))$$

Avec l'approximation $y(t_j) \simeq y_j$, nous obtenons :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

qui est le schéma d'Euler explicite.

2) Le polynôme d'interpolation de la fonction $f(., y(.))$ sur la base de deux points t_n et t_{n+1} est le polynôme de degré un donné par

$$P_1(x) = \frac{t - t_{n+1}}{t_n - t_{n+1}} f(t_n, y(t_n)) + \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

$$P_1(x) = -\frac{1}{h} f(t_n, y(t_n))(t - t_{n+1}) + \frac{1}{h} f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))(t - t_n)$$

Donc :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_1(t) dt$$

$$= y(t_n) - \frac{1}{h} f(t_n, y(t_n)) \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n+1}) dt + \frac{1}{h} f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) dt$$

On a :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n+1}) dt = \left[\frac{x^2}{2} - t_{n+1}t \right]_{t_n}^{t_{n+1}} = \frac{t_{n+1}^2 - t_n^2}{2} - t_{n+1}^2 + t_{n+1}t_n = -\frac{1}{2}(t_{n+1}^2 + t_n^2 - 2t_{n+1}t_n) = -\frac{h^2}{2}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) dt = \left[\frac{x^2}{2} - t_n t \right]_{t_n}^{t_{n+1}} = \frac{t_{n+1}^2 - t_n^2}{2} - t_n t_{n+1} + t_n^2 = \frac{1}{2}(t_{n+1}^2 + t_n^2 - 2t_n t_{n+1}) = \frac{h^2}{2}$$

On en déduit que :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, y(t_n)) + \frac{h}{2} f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) = \frac{h}{2} (f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})))$$

Remarquons que nous pouvons appliquer directement la méthode du trapèze qui est définie comme étant la méthode basée sur l'interpolation entre les deux bornes de l'intégrale, et on aura :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t) dt = \frac{t_{n+1} - t_n}{2} (g(t_n) + g(t_{n+1})) = \frac{h}{2} (f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})))$$

Le polynôme d'interpolation de la fonction $f(., y(.))$ sur la base des points t_{n-1} , t_n et t_{n+1} est le polynôme de degré deux donné par :

$$P_2(t) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{(t - t_n)(t - t_{n+1})}{(t_{n-1} - t_n)(t_{n-1} - t_{n+1})} f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + \frac{(t - t_{n-1})(t - t_{n+1})}{(t_n - t_{n-1})(t_n - t_{n+1})} f(t_n, y(t_n)) \\ & + \frac{(t - t_{n-1})(t - t_n)}{(t_{n+1} - t_{n-1})(t_{n+1} - t_n)} f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \\ = & \frac{f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))}{2h^2} (t - t_n)(t - t_{n+1}) - \frac{f(t_n, y(t_n))}{h^2} (t - t_{n-1})(t - t_{n+1}) + \frac{f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2h^2} (t - t_{n-1})(t - t_n) \end{aligned}$$

En intégrant l'équation différentielle est en remplaçant $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$ par $\int_{t_n}^{t_{n+1}} P_2(t) dt$ nous obtenons :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_2(t) dt$$

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))}{2h^2} (t - t_n)(t - t_{n+1}) - \frac{f(t_n, y(t_n))}{h^2} (t - t_{n-1})(t - t_{n+1}) + \frac{f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2h^2} (t - t_{n-1})(t - t_n) \right) dt \\ y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \frac{f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))}{2h^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)(t - t_{n+1}) dt - \frac{f(t_n, y(t_n))}{h^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n-1})(t - t_{n+1}) dt + \\ & \quad \frac{f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2h^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n-1})(t - t_n) dt \\ y(t_{n+1}) &= y(t_n) + A_n f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) + B_n f(t_n, y(t_n)) + C_n f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2h^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)(t - t_{n+1}) dt \\ B_n &= -\frac{1}{h^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n-1})(t - t_{n+1}) dt \\ C_n &= \frac{1}{2h^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n-1})(t - t_n) dt \end{aligned}$$

Les coefficients A_n , B_n et C_n sont à calculer en fonction de t_n , t_{n+1} , n et h (et non pas t_{n-1}). Par exemple, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} ((t - t_n)(t - t_{n+1})) dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t^2 - (t_n + t_{n+1})t + t_n t_{n+1}) dt = \left[\frac{t^3}{3} + (t_n + t_{n+1}) \frac{t^2}{2} + t_n t_{n+1} t \right]_{t_n}^{t_{n+1}} \\ &= \frac{t_{n+1}^3}{3} + (t_n + t_{n+1}) \frac{t_{n+1}^2}{2} + t_n t_{n+1} t_{n+1} - \left(\frac{t_n^3}{3} + (t_n + t_{n+1}) \frac{t_n^2}{2} + t_n t_{n+1} t_n \right) \\ &= \frac{t_{n+1}^3 - t_n^3}{3} + (t_n + t_{n+1}) \frac{t_{n+1}^2 - t_n^2}{2} + t_n t_{n+1} (t_{n+1} - t_n) \\ &= \frac{(t_{n+1} - t_n)(t_{n+1}^2 + t_{n+1} t_n + t_n^2)}{3} + (t_n + t_{n+1}) \frac{(t_{n+1} - t_n)(t_{n+1} + t_n)}{2} + t_n t_{n+1} (t_{n+1} - t_n) \\ &= \frac{h}{3} (t_{n+1}^2 + t_{n+1} t_n + t_n^2) + \frac{h}{2} (t_n + t_{n+1})^2 + h t_n t_{n+1} \\ &= \frac{h}{6} (2t_{n+1}^2 + 2t_{n+1} t_n + 2t_n^2 + 3t_{n+1}^2 + 6t_{n+1} t_n + 3t_n^2 + 6t_n t_{n+1}) \\ &= \frac{h}{6} (5t_{n+1}^2 + 14t_n t_{n+1} + 5t_n^2) \\ &= \frac{h}{6} (5t_{n+1}^2 - 10t_n t_{n+1} + 5t_n^2 + 24t_n t_{n+1}) \end{aligned}$$

$$= \frac{h}{6}(5(t_{n+1} - t_n)^2 + 24t_n t_{n+1})$$

$$= \frac{h}{6}(5h^2 + 24t_n t_{n+1})$$

Donc :

$$A_n = \frac{1}{2h^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n)(t - t_{n+1}) dt = \frac{1}{2h^2} \frac{h}{6} (5h^2 + 24t_n t_{n+1}) = \frac{1}{12} (5h^2 + 24t_n t_{n+1})$$

B_n et C_n sont à calculer de la même manière. Finalement, avec l'approximation $y(t_i) = y_i$ nous avons le schéma suivant :

$$y_{n+1} = y_n + A_n f(t_{n-1}, y_{n-1}) + B_n f(t_n, y_n) + C_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Remarquons que ce schéma est implicite et à deux niveaux (y_{n+1} en fonction de y_n et y_{n-1}).

Les deux premiers termes : y_0 et $y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0)$ (calculer avec la progression d'Euler).

Le schéma peut être transformé en un schéma explicite en remplaçant, dans le second membre, y_{n+1} par $y_n + hf(t_n, y_n)$ (en utilisant la progression d'Euler). Finalement le schéma s'écrit :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + A_n f(t_{n-1}, y_{n-1}) + B_n f(t_n, y_n) + C_n f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)) & n \geq 1 \\ y_0 & \text{donnée} \\ y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) \end{cases}$$

Exercice 8 : Soit $\beta > 0$ un nombre réel positif et considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -\beta y(t) & \text{Pour } t > 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

où y_0 est une valeur donnée. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et u_n une approximation de $y(t_n)$:

- Écrire le schéma du trapèze (appelé aussi de Crank Nicolson) permettant de calculer u_{n+1} à partir de u_n . Sous quelle condition sur h le schéma du trapèze est-il A-stable ? Autrement dit, pour quelles valeurs de h la relation $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ a-t-elle lieu ?
- A partir du schéma du trapèze, et en utilisant une prédiction progressive de votre choix déduire le schéma de Heun. Sous quelle condition sur h le schéma de Heun est-il A-stable ?

Solution

- En intégrant l'équation différentielle et en utilisant la méthode du trapèze pour calculer l'intégrale du second membre nous obtenons :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = -\beta \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t) dt = -\beta \frac{h}{2} (y(t_{n+1}) + y(t_n))$$

En utilisant l'approximation $y(t_i) = u_i$ nous obtenons :

$$u_{n+1} - u_n = -\beta \frac{h}{2} (u_{n+1} + u_n)$$

$$(1 + \frac{\beta h}{2}) u_{n+1} = (1 - \frac{\beta h}{2}) u_n$$

$$u_{n+1} = \frac{1 - \frac{\beta h}{2}}{1 + \frac{\beta h}{2}} = \frac{2 - \beta h}{2 + \beta h} u_n$$

Donc, la suite $(u_n)_n$ est géométrique et on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{2 - \beta h}{2 + \beta h} \right)^{n+1} u_0 = \left(\frac{2 - \beta h}{2 + \beta h} \right)^{n+1} y_0$$

On sait que β et h sont strictement positifs, et on a :

$$|2 - \beta h| < |2| + |-\beta h| = 2 + \beta h = |2 + \beta h| \implies \frac{2 - \beta h}{2 + \beta h} < 1$$

- 2) L'application de la méthode du trapèze au problème de Cauchy donne un schéma implicite (u_{n+1} figure aussi dans le second membre). Pour surmonter cette difficulté et obtenir un schéma explicite, la méthode de Heun consiste à remplacer u_{n+1} , dans le second membre, par une progression d'Euler. Nous obtenons, dans le cas général, successivement :

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt = \frac{h}{2}((f(t_n), y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1})))$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2}((f(t_n), y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y(t_n))))$$

Soit, avec l'approximation $y(t_i) = u_i$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}((f(t_n), u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n, u_n)))$$

et comme $f(t, y) = -\beta y$, on déduit :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(-\beta u_n - \beta(u_n + h(-\beta u_n))) = u_n + \frac{h}{2}(-\beta u_n - \beta u_n + h\beta^2 u_n)$$

$$u_{n+1} = (1 - h\beta + \frac{(h\beta)^2}{2})u_n$$

et :

$$u_{n+1} = (1 - h\beta + \frac{(h\beta)^2}{2})^{n+1}u_0 = (1 - h\beta + \frac{(h\beta)^2}{2})^{n+1}y_0$$

La suite $(u_n)_n$ converge vers 0 si et seulement si $|1 - h\beta + \frac{(h\beta)^2}{2}| < 1$ posons $x = h\beta > 0$ et étudions la fonction $g(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$ pour $x > 0$. La fonction est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$ avec $g(0) = 1$, $g(1) = \frac{1}{2}$ et $g(2) = 1$ et donc $|g(x)| < 1$ si et seulement si $x \in]0, 2[$. On en déduit que la suite converge vers 0 si et seulement si $0 < h\beta < 2$ soit $0 < h < \frac{2}{\beta}$.