Exercice 1 : On considère un réel λ et l'équation différentielle donnée par :

$$x(0) = \overline{x}_0 \quad \text{et } x'(t) = -\lambda x(t),\ t > 0$$

Soit $T > 0$ et la discrétisation définie par : $m \in \mathbb{N}^*$, $\hbar = \frac{T}{m}$ et $t_k = k\hbar$ pour $k = 0, 1, \cdots, m$.

1. Déterminer la solution exacte de ce problème, $\overline{x}(t)$, $t > 0$;
2. Appliquer le schéma d'Euler explicite et exprimer la solution numérique, x_k, en fonction de k ;
3. Appliquer le schéma d'Euler explicite et exprimer x_k en fonction de k ;
4. Appliquer le schéma d'Euler implicite et exprimer x_k en fonction de k ;
5. On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler implicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\hbar > 0$;
6. On suppose que $\lambda > 0$. Donner une condition sur $\hbar$ pour que la solution du schéma d'Euler explicite vérifie $|x_k| \leq |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$;
7. On suppose que $\lambda < 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler explicite x_k reste du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\hbar > 0\hbar$;
8. On suppose que $\lambda < 0$. Donner une condition sur $\hbar$ pour que la solution du schéma d'Euler implicite x_k soit du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$;
9. Soit $\overline{x}_k = \overline{x}(t_k)$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer que l'erreur de consistance du schéma d'Euler implicite :
$$r_k = \frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{\hbar} + \lambda \overline{x}_{k+1}$$
vérifie : $|r_k| \leq \frac{\overline{x}_0 \lambda^2}{2} \hbar$ pour tous $k = 0, \cdots, m - 1$;
10. On définit l'erreur $e_k = \overline{x}_k - x_k$, $k = 0, \cdots, m$ pour le schéma d'Euler implicite. Montrer qu'elle vérifie l'équation suivante, pour tous $k = 0, \cdots, m - 1$:
$$\frac{e_{k+1} - e_k}{\hbar} + \lambda e_{k+1} = r_k$$
11. On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que :
$$|e_k| \leq |e_0| + T \frac{\overline{x}_0 \lambda^2}{2} \hbar \ \text{ pour tous } \ k = 0, \cdots, m$$
En déduire que le schéma d'Euler implicite converge à l'ordre 1 pour $\lambda > 0$;

12 Reprendre l'estimation d'erreur de la question 11 pour le schéma d'Euler implicite avec $\lambda < 0$;

13. Reprendre les questions 9,10,11 pour le schéma d'Euler explicite avec $\lambda > 0$ puis avec $\lambda < 0$.

Exercice 2 : La formule de Taylor peut être utilisée pour définir un schéma numérique. En effet :

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + ... + \frac{h^m}{m!} y^{(m)}(x) + E(x, h)$$

$E(x, h)$ est la troncature donnée par

$$E(x, h) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(\xi) \quad \text{pour un certain } \ \xi \in [x, x + h]$$

La méthode consiste à prédire $y(x+h$ en fonction de $y(x)$ en calculant et en remplaçant les dérivées successives $y^{(m)}$ en fonction de $f(x, y(x))$. Dans ce cas l'erreur peut être approchée par :

$$E(x,h) = \frac{h^m}{(m+1)!}(y^{(m)}(x+h) - y^{(m)}(x))$$

Application :

$$\begin{cases} y'(x) + 4y(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En considérant $m = 4$, estimer $y(0.1)$ et l'erreur associée.

Exercice 1 : On considère un réel λ et l'équation différentielle donnée par :

$$x(0) = \overline{x}_0 \quad \text{et } x'(t) = -\lambda x(t), \; t > 0$$

Soit $T > 0$ et la discrétisation définie par : $m \in \mathbb{N}^*$, $\hbar = \frac{T}{m}$ et $t_k = k\hbar$ pour $k = 0, 1, \cdots, m$.

1. Déterminer la solution exacte de ce problème, $\overline{x}(t)$, $t > 0$;
   La solution est :
   $$x(t) = \overline{x}_0 e^{-\lambda t}$$
2. Appliquer le schéma d'Euler explicite et exprimer la solution numérique, x_k, en fonction de k ;
   On a $f(t, x) = -\lambda x$ donc
   $$x_0 \text{ donnée et } \; x_{n+1} = x_n + \hbar f(t_n, x_n) = x_n - \lambda\hbar x_n = (1 - \lambda\hbar)x_n$$
3. Appliquer le schéma d'Euler explicite et exprimer x_k en fonction de k ;
   $$x_k = (1 - \lambda\hbar)^k x_0$$
4. Appliquer le schéma d'Euler implicite et exprimer x_k en fonction de k ;
   $$x_0 \text{ donnée et } \; x_{n+1} = x_n + \hbar f(t_{n+1}, x_{n+1}) = x_n - \lambda\hbar x_{n+1}$$
   $$(1 + \lambda\hbar)x_{n+1} = x_n$$
   $$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + \lambda\hbar}$$
   $$x_k = (\frac{1}{1 + \lambda\hbar})^k x_0$$
5. On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler implicite vérifie $|x_k| \le |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\hbar > 0$;
   $$\lambda > 0 \Longrightarrow 0 \le \frac{1}{1 + \lambda\hbar} \le 1 \Longrightarrow |x_k| \le |x_0|$$
6. On suppose que $\lambda > 0$. Donner une condition sur $\hbar$ pour que la solution du schéma d'Euler explicite vérifie $|x_k| \le |x_0|$ pour tous $k = 0, \cdots, m$;
   $$|x_k| \le |x_0| \Longrightarrow |1 + \lambda\hbar| \le 1 \Longrightarrow -1 \le 1 + \lambda\hbar \le 1 \Longrightarrow \hbar \le \frac{2}{\lambda}$$
7. On suppose que $\lambda < 0$. Montrer que la solution du schéma d'Euler explicite x_k reste du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$ quel que soit $\hbar > 0$;
   $$\lambda < 0 \Longrightarrow 1 - \lambda\hbar \ge 0 \Longrightarrow x_k \text{ et } x_0 \; \text{ sont de même signe}$$
   Remarquons que lorsque $\lambda > 0$:
   $$x_k \text{ et } x_0 \; \text{ sont de même signe } \; \Longrightarrow 1 - \lambda\hbar \ge 0 \Longrightarrow \hbar \le \frac{1}{\lambda}$$
8. On suppose que $\lambda < 0$. Donner une condition sur $\hbar$ pour que la solution du schéma d'Euler implicite x_k soit du signe de x_0 pour tous $k = 0, \cdots, m$;
   $$x_k \text{ et } x_0 \; \text{ sont de même signe } \; \Longrightarrow \frac{1}{1 + \lambda\hbar} \ge 0 \Longrightarrow 1 + \lambda\hbar > 0 \Longrightarrow \hbar > \frac{-1}{\lambda}$$
   Remarquons que lorsque $\lambda > 0$:
   $$1 + \lambda\hbar > 0 \Longrightarrow x_k \text{ et } x_0 \; \text{ sont de même signe}$$

9. Soit $\overline{x}_k = \overline{x}(t_k)$, $k = 0, \cdots, m$. Montrer que l'erreur de consistance du schéma d'Euler implicite :

$$r_k = \frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{\hbar} + \lambda \overline{x}_{k+1}$$

vérifie : $|r_k| \leq \frac{\overline{x}_0 \lambda^2}{2} \hbar$ pour tous $k = 0, \cdots, m-1$;

L'erreur de consistance est définie par :

$$\hbar r_k = x(t_{k+1}) - x(t_k) + \Phi(t_k, x(t_k), \hbar)$$

$$\hbar r_k = x(t_{k+1}) - x(t_k) + \lambda x(t_{k+1})$$

$$r_k = \frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{\hbar} + \lambda \overline{x}_{k+1}$$

$$r_k = \frac{1}{\hbar} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{x}'(t) dt + \frac{1}{\hbar} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \lambda \overline{x}_{k+1} dt$$

En utilisant l'équation différentielle pour exprimer la deuxième intégrale :

$$r_k = \frac{1}{\hbar} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{x}'(t) dt - \frac{1}{\hbar} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \overline{x}'(t_{k+1}) dt$$

$$r_k = \frac{1}{\hbar} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\overline{x}'(t) - \overline{x}'(t_{k+1})) dt$$

D'après le théorème des accroissements finis on a pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$|\overline{x}'(t) - \overline{x}'(t_{k+1})| \leq \left(\sup_{s \in [t, t_{k+1}]} |\overline{x}''(s)| \right) (t_{k+1} - t) \leq \left(\sup_{s \in [0,T]} |\overline{x}''(s)| \right) (t_{k+1} - t) = |\overline{x}_0| \lambda^2 (t_{k+1} - t)$$

On en déduit :

$$|r_k| \leq |\overline{x}_0| \lambda^2 \frac{1}{\hbar} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t) dt = \frac{|\overline{x}_0| \lambda^2}{2} \hbar$$

10. On définit l'erreur $e_k = \overline{x}_k - x_k$, $k = 0, \cdots, m$ pour le schéma d'Euler implicite. Montrer qu'elle vérifie l'équation suivante, pour tous $k = 0, \cdots, m-1$:

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{\hbar} + \lambda e_{k+1} = r_k$$

Définition du schéma numérique :

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) - \lambda \hbar x(t_{k+1}) \Longrightarrow \frac{x_{k+1} - x_k}{\hbar} = -\lambda x_{k+1} \qquad (1)$$

Définition de l'erreur de consistance :

$$\frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{\hbar} = -\lambda \overline{x}_{k+1} + r_k \qquad (2)$$

$$(2) - (1) \Longrightarrow \frac{e_{k+1} - e_k}{\hbar} + \lambda e_{k+1} = r_k \qquad k = 0, \cdots, m-1$$

11. On suppose que $\lambda > 0$. Montrer que :

$$|e_k| \leq |e_0| + T \frac{\overline{x}_0 \lambda^2}{2} \hbar \quad \text{pour tous} \quad k = 0, \cdots, m$$

En déduire que le schéma d'Euler implicite converge à l'ordre 1 pour $\lambda > 0$;

on a :

$$e_{k+1} = \frac{1}{1 + \lambda \hbar} (e_k + \hbar r_k)$$

Comme $\lambda > 0$ on a $|\frac{1}{1+\lambda\hbar}| \leq 1$ et on déduit que :

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + \hbar |r_k| \leq |e_k| + \hbar \left(\frac{|\overline{x}_0| \lambda^2}{2} \hbar \right)$$

Par induction :

$$|e_k| \leq |e_0| + T \frac{|\overline{x}_0| \lambda^2}{2} \hbar$$

12 Reprendre l'estimation d'erreur de la question 11 pour le schéma d'Euler implicite avec $\lambda < 0$; Il faut remarquer que pour tout $\hbar \leq \frac{1}{2|\lambda|}$ (condition que l'on suppose vérifiée) on a :

$$|\frac{1}{1+\lambda\hbar}| \leq 1 + 2|\lambda|\hbar \leq e^{2|\lambda|\hbar}$$

On a comme précédemment :

$$|e_{k+1}| \leq |\frac{1}{1+\lambda\hbar}| \left(|e_k| + \hbar(\frac{|\overline{x}_0\lambda^2}{2}\hbar)\right) \leq e^{2|\lambda|\hbar}(|e_k| + \hbar(\frac{|\overline{x}_0\lambda^2}{2}\hbar)$$

Par induction :

$$|e_k| \leq e^{2|\lambda|t_k} \left(|e_0| + t_k e^1(\frac{|\overline{x}_0|\lambda^2}{2}\hbar)\right)$$

13. Reprendre les questions 9,10,11 pour le schéma d'Euler explicite avec $\lambda > 0$ puis avec $\lambda < 0$. Les calculs sont à adapter pour le cas du schéma explicite, nous obtenons successivement :

$$r_k = \frac{\overline{x}_{k+1} - \overline{x}_k}{\hbar}\lambda\overline{x}_k$$

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{\hbar} + \lambda e_k = r_k$$

$$|r_k| \leq \frac{|\overline{x}_0|\lambda^2}{2}\hbar$$

$\lambda > 0$, en supposant $\hbar \leq \frac{2}{|\lambda|}$ alors $|1 - \lambda\hbar| \leq 1$ et :

$$|e_{k+1}| \leq |e_k| + \hbar|r_k| \leq |e_k| + \hbar(\frac{|\overline{x}_0|\lambda^2}{2}\hbar)$$

$$|e_k| \leq |e_0| + T(\frac{|\overline{x}_0|\lambda^2}{2}\hbar)$$

$\lambda < 0$, on a : $1 + |\lambda|\hbar \leq e^{|\lambda|\hbar}$ et :

$$|e_{k+1}| \leq (1 + |\lambda|\hbar)|e_k| + \hbar(\frac{|\overline{x}_0\lambda^2}{2}\hbar) \leq e^{|\lambda|\hbar}|e_k| + \hbar(\frac{|\overline{x}_0\lambda^2}{2}\hbar)$$

$$|e_k| \leq e^{|\lambda|t_k}(|e_0| + t_k(\frac{|\overline{x}_0\lambda^2}{2}\hbar))$$

Exercice 2 : La formule de Taylor peut être utilisée pour définir un schéma numérique. En effet :

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + ... + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(x) + E(x,h)$$

$E(x,h)$ est la troncature donnée par

$$E(x,h) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}y^{(m+1)}(\xi) \quad \text{pour un certain} \quad \xi \in [x, x+h]$$

La méthode consiste à prédire $y(x+h$ en fonction de $y(x)$ en calculant et en remplaçant les dérivées successives $y^{(m)}$ en fonction de $f(x,y(x))$. Dans ce cas l'erreur peut être approchée par :

$$E(x,h) = \frac{h^m}{(m+1)!}(y^{(m)}(x+h) - y^{(m)}(x))$$

Application :

$$\begin{cases} y'(x) + 4y(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En considérant $m = 4$, estimer $y(0.1)$ et l'erreur associée.