

Exercice 1 (2+2+2+1.5=7.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3}{x-2}$.

1. **Étudier** la fonction g sur $[-2, 0]$, **dresser** son tableau de variations, remarquer que g est **bijective** et vérifier que le problème (PF) $g(x) = x$ admet **une solution unique** r . Quelle est la valeur **exacte** de r ?
2. Définir la suite $(x_n)_n$ donnée par **la méthode de point fixe**, pour obtenir une solution approchée de (PF) , et vérifier qu'elle **convergente**. Évaluer $|x_{n+1} - x_n|$ et déterminer **le nombre d'itérations** nécessaire pour obtenir une solution approchée avec une précision de $\varepsilon = 10^{-4}$.
3. Vérifier que (PF) peut être transformé en un problème de résolution d'une équation non linéaire de la forme (Eq) $f(x) = 0$ avec f un polynôme de degré 2. En remarquant que r est solution de (Eq) , appliquer la méthode de **Dichotomie** sur l'intervalle $[-1.75; 0]$ et calculer les deux premières valeurs approchées de r .
4. On définit la suite, $(y_n)_n$, des itérés données par :
$$\begin{cases} y_0 \in [-2, 0] \\ y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 3}{2y_n - 2} \end{cases}$$

Quelle méthode peut-on reconnaître ? Étudier la **convergence** de cette méthode.

Exercice 2 (2+2+1.5=5.5 POINTS) : (Les trois questions sont indépendantes)

Soit f la fonction donnée par le tableau suivant :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
$f(x_i)$	1	2	9	28

1. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 en utilisant la méthode de **Lagrange**.
2. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_1, x_2 et x_3 en utilisant la méthode de **Newton**.
3. Donner une valeur approchée de $\int_0^3 f(x)dx$ en utilisant la méthode **des trapèzes** (composite avec 3 trapèzes).

Exercice 3 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Soit f une fonction de classe C^1 et (App) l'**approximation** :

$$(App) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} (f(-1) + 4f(x_0) + f(1))$$

1. Déterminer x_0 pour que (App) soit **exacte** pour les polynômes de degré 0 et 1 (On peut utiliser $f(x) = 1$ puis $f(x) = x$).
2. On suppose que $x_0 = 0$, en utilisant un **changement de variable affine**, dans $I = \int_a^b f(x)dx$, déduire une formule (Q) permettant de calculer une valeur approchée de I .
3. Vérifier que (Q) est une **quadrature** de type Newton-cotes, laquelle ? Déterminer l'**ordre** exacte de (Q) .

Exercice 4 (1.5+2=3.5 POINTS) : Considérons le Problème de Cauchy (PC) donné par :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi $t_0 = 0$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. On suppose que (PC) admet une **solution unique**. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser méthode du **rectangle à gauche** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n .
2. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser méthode du **rectangle à droite** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n . Transformer le schéma implicite ainsi obtenu en un schéma explicite.