

Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)

Toutes les réponses doivent être justifiées et bien rédigées

Exercice 1 (2+3+3+3=11 POINTS). Soit (E) l'équation suivante : $(E) \quad 1 + x = e^{1-x^2}$

1. Écrire (E) sous forme d'une équation $f(x) = 0$ (f une fonction à déterminer). Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule solution**, notée $\bar{r}$, dans l'intervalle $[0; 1]$.
2. Écrire l'**algorithme** de la méthode de Dichotomie permettant d'obtenir une valeur approchée de $\bar{r}$ avec une **précision** d'au moins ε .
Faire les calculs pour $\varepsilon = 2^{-2}$, **localiser** la solution dans un intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$ et donner une **valeur approchée** de $\bar{r}$.
3. On souhaite appliquer la **méthode de Newton** sur l'intervalle $[0, 1]$ et on note $(t_n)_n$ la suite générée par cette méthode. Rappeler le **principe géométrique** de la méthode et exprimer t_{n+1} en fonction de t_n .
Calculer $f''(0.5)$ et $f''(0.75)$. Que peut-on dire par rapport à la **convergence** de cette méthode.
4. Sur l'intervalle $[0; 1]$, on considère la **modification de la méthode de Newton** qui consiste à remplacer la tangente T_n , au point $(t_n, f(t_n))$, par la droite D_n parallèle à la tangente T_0 (au point $(t_0, f(t_0))$ avec $f'(t_0) \neq 0$) et qui passe par $(t_n, f(t_n))$. Ainsi t_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite D_n avec l'axe des abscisses (OX) . Faire un schéma et exprimer t_{n+1} en fonction de t_n .

Exercice 2 (2.5+1.5=4 POINTS) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)^3 - 1$

1. En utilisant la **méthode directe**, déterminer le **polynôme d'interpolation** de f , noté P , sur la base des points : $-1, 0$ et 1 . Utiliser P pour donner une valeur **approchée** de $f(-\frac{1}{2})$ et calculer la valeur **exacte de l'erreur** commise au point $x = -\frac{1}{2}$.
2. Sans faire de calcul supplémentaire, donner le **polynôme d'interpolation** de f , noté Q , sur la base des points : $-2, -1, 0$ et 1 . Que peut-on dire de l'**erreur** au point $x = -\frac{1}{2}$ (par rapport à Q).

Exercice 3 (1.5+2+1.5=5 POINTS) :

Soient $x_0 = -2, x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ et soit f une fonction continue sur $[-2; 1]$.

1. On donne $L_0(x) = \frac{1}{6}(x^2 - x)$, déterminer les deux autres **polynômes caractéristiques de Lagrange** $L_1(x)$ et $L_2(x)$ puis formuler le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 (noté P).
2. On donne $\int_{-2}^1 L_1(x)dx = \frac{9}{4}$, calculer $\int_{-2}^1 L_0(x)dx$ et $\int_{-2}^1 L_2(x)dx$. Puis, en **Intégrant** le polynôme P (sur l'intervalle $[-2; 1]$) déduire une **quadrature** $\tilde{I}$ de l'intégrale $I = \int_{-2}^1 f(t)dt$. On donne $\omega_0 = \frac{1}{4}$, préciser les deux autres **poids** ω_1 et ω_2 .
3. Utiliser la méthode **de Simpson** pour formuler une deuxième approximation de l'intégrale I (notée $\hat{I}$). Expliquer la différence entre $\tilde{I}$ et $\hat{I}$.