RATTRAPAGE — 04 avril 2021 — 2020 - 2021

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (0.75+1.25+3+3+2=10 POINTS) : Soit (E) l'équation donnée par $f(x) = 0$ avec f, la fonction, définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 3$.

1. L'équation (E) admet-elle **une solution** dans l'intervalle $[-1, 1]$?
2. Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule racine**, $\overline{x}$, dans l'intervalle $[a_0, b_0] = [0, 1]$;
3. **Localiser** la racine $\overline{x}$ dans un intervalle $[c, d]$ d'amplitude $d - c = 0.25$. Déterminer le **nombre d'itérations**, p, nécessaire pour obtenir une solution approchée, x_p, avec une **précision** $\varepsilon = 10^{-6}$?
4. Montrer, en utilisant la méthode de Newton, que **l'algorithme** (Alg) permet de définir une suite $(z_n)_n$ d'approximations de $\overline{x}$:

$$(Alg) \left\{ \begin{array}{l} z_0 = 1 \\ \text{Tant que } |f(z_n)| > 10^{-5} \text{ Faire :} \\ z_{n+1} = \frac{2z_n^3 + z_n^2 + 3}{3z_n^2 + 2z_n + 3} \\ \text{Fin} \end{array} \right.$$

   Identifier **la précision** recherchée et étudier **la convergence** de cette méthode. Calculer z_1 et z_2 ;
5. Transformer l'équation (E) en un problème de point fixe, de la forme $h(x) = x$, tel que h est une fonction rationnelle à déterminer (de la forme $\frac{\text{constante}}{\text{polynôme de degré 2}}$).
   Soit $(t_n)_n$ la suite définie par : $t_0 = 0.5$ et $t_n = h(t_{n-1})$. Calculer t_1 et t_2.
   Est ce que la suite $(t_n)_n$ est **convergente** ? Si oui, déterminer sa limite.
   On donne :

$$-0.5 \leq \frac{-6x - 3}{(x^2 + x + 3)^2} \leq -0.3 \quad \text{pour tout} \quad x \in [0, 1]$$

Exercice 2 (2+3+2=7 POINTS) : Soient $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

1. Déterminer les **polynômes caractéristiques de Lagrange** $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ et formuler $P_2(x)$ le **polynôme d'interpolation** d'une fonction f sur la base des points x_0, x_1 et x_2.
2. Calculer $\int_0^3 L_i(x)dx$, $i = 0, 1, 2$, puis utiliser le polynôme d'interpolation, $P_2(x)$, pour déterminer une **quadrature**, $Q = 3\sum_{i=0}^{i=3} \omega_i f(x_i)$, de l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)dx$. Quel est l'ordre de Q ?
3. Utiliser la **méthode de Simpson** pour donner une deuxième **quadrature** $\widetilde{I}$ permettant, aussi, d'approcher l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)dx$. Comparer Q et $\widetilde{I}$ puis expliquer les différences.

Exercice 3 (1+2=3 POINTS) :

1. Rappeler la formule de quadrature approchant l'intégrale $\int_c^d g(t)dt$ par la méthode **du trapèze** puis l'appliquer dans le cas $g(t) = F(t, y(t))$;
2. On suppose que le problème de Cauchy, (P), admet une solution unique :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} y' = F(t, y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

   Intégrer l'équation différentielle sur l'intervalle $[\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_{i+1}]$ puis utiliser **la méthode du Trapèze** et, pour tout indice j, l'**approximation** $y(\mathbf{t}_j) \simeq y_j$ pour établir une relation entre y_{i+1} et y_i (en fonction de F, $\mathbf{t}_i$ et $\mathbf{t}_{i+1}$).

QS. (+1 POINT) Transformer la relation précédente en **une méthode explicite**.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT.