Questions indépendantes (11.5 POINTS) :

1) Étudier la **convergence simple** de **la suite de fonctions** définie par : $f_n(x) = x(1-2x)^n$ sur $[0, 1[$.

2) Étudier la **convergence de la série de fonctions** du terme général $f_n(x)$ tel que : $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$
Est ce que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue ? Justifier.

3) Une **série entière** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ **converge** pour $z_0 = 3+4i$ et **diverge** pour $z_1 = 4+3i$. Déterminer son **rayon de convergence**. Que peut on déduire si $z_1 = 6i$?

4) Déterminer le **développement en série entière** de x la fonction f (On suppose que le rayon de convergence R est donné) : $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

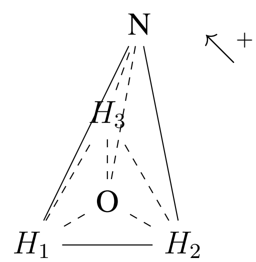
5) Déterminer **la série de Fourier**, sous forme **trigonométrique**, de la fonction 2π-périodique f définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2x$ sur $[-\pi, \pi[$.

6) Effectuer **les transformations** suivantes (dans **cet ordre** et en **détaillant les calculs**) :
$\overline{101}^5 \longrightarrow \overline{\bullet\bullet}^{10} \longrightarrow \overline{\bullet\bullet}^{8} \longrightarrow \overline{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}^{2} \longrightarrow \overline{\bullet\bullet}^{16}$

7) Trouver **tous les couples** (s, t), $s < t$, tels que : $PGCD(s, t) = 4$ et $PPCM(s, t) = 56$, $s, t \in \mathbb{N}$.

Exercice (8.5 POINTS) :

L'ammoniac est une molécule pyramidale à base triangulaire : l'atome de l'azote (N) est au sommet de la pyramide et les trois atomes d'hydrogène (H) occupent les trois sommets de la base (triangle) notés H_1, H_2 et H_3 et soit O le centre de cette base. On considère les **six éléments de symétrie** ci-après :



T_1 la transformation telle que $N \longrightarrow N$, $H_1 \longrightarrow H_2$, $H_2 \longrightarrow H_3$ et $H_3 \longrightarrow H_1$
T_2 la **rotation** (dans l'espace) autour de l'axe C_3 (la droite (NO)) et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$
Id la transformation qui laisse **invariant** tous les points
R_1 la transformation telle que : $N \longrightarrow N$, $H_1 \longrightarrow H_1$, $H_2 \longrightarrow H_3$ et $H_3 \longrightarrow H_2$
R_2 la **réflexion** (dans l'espace) par rapport au plan vertical qui passe par N, H_2 et le milieu de $[H_1H_3]$
R_3 la **réflexion** (dans l'espace) par rapport au plan vertical qui passe par N, H_3 et le milieu de $[H_2H_3]$

1) Quelle est **la nature du triangle** $H_1H_2H_3$? Préciser **la nature** de T_1 puis celle de R_1 ?
2) Expliciter les transformations T_2, Id, R_2 et R_3 en précisant les images des points N, H_1, H_2 et H_3 ;
3) Soit G l'ensemble des **six transformations** muni de, $\circ$, la **loi de composition habituelle**. Compléter la table ci-jointe et vérifier que $(G, \circ)$ est un **groupe non commutatif** ;
4) Le groupe $(G, \circ)$ admet-il des **sous-groupes de 3 éléments ? de 4 éléments ?** Si oui, les déterminer.

(Exemple : $\mathbf{T_1 \circ R_3 = R_2}$)

$\nearrow$	Id	T_1	T_2	$\mathbf{R_3}$	R_2	R_1
Id	Id	T_1	T_2	R_3	R_2	R_1
$\mathbf{T_1}$	T_1	T_2	?	$\mathbf{R_2}$	R_1	R_3
T_2	T_2	?	?	?	?	?
R_3	R_3	R_1	?	Id	T_2	T_1
R_2	R_2	R_3	?	T_1	Id	T_2
R_1	R_1	R_2	?	T_2	T_1	Id

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT.