RATTRAPAGE-SS — mars 2023 — 2022 - 2023

*Présenter les résultats numériques avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (2+2+2+1.5=7.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{3}{x-2}$.

1. **Étudier** la fonction g sur $[-2, 0]$, **dresser** son tableau de variations, remarquer que g est **bijective** et vérifier que le problème $(PF)\ \ g(x) = x$ admet **une solution unique** r. Quelle est la valeur **exacte** de r ?
   La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, continue sur son domaine (rationnelle) et on a $g'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $[-2, 0]$ ce que implique que g est une bijection de $[-2, 0]$ vers $g([-2, 0]) = [-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}] \subset [-2, 0]$. Cette dernière inclusion avec la continuité de g implique l'existence d'au moins un point fixe et comme g est strictement décroissante ce point fixe est unique.
   Pour $x \neq 2$, $\frac{3}{x-2} = x \Longrightarrow x(x-2) = 3 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1$ ou $x = 3$. Par conséquent, l'unique solution dans $[-2, 0]$ est $r = -1$.
2. Définir la suite $(x_n)_n$ donnée par **la méthode de point fixe**, pour obtenir une solution approchée de (PF), et vérifier qu'elle **convergente**. Évaluer $|x_{n+1} - x_n|$ et déterminer **le nombre d'itérations** nécessaire pour obtenir une solution approchée avec une précision de $\varepsilon = 10^{-4}$.
   La suite $(x_n)_n$ est définie par :
   $$\begin{cases} x_0 \in [-2, 0] \\ x_{n+1} = g(x_n) = \frac{3}{x_n - 2} \end{cases}$$
   Pour $x \in [-2, 0]$, on a :
   $-2 \leq x \leq 0 \Longrightarrow -4 \leq x - 2 \leq -2 \Longrightarrow 4 \leq (x-2)^2 \leq 16 \Longrightarrow \frac{3}{16} \leq \frac{3}{(x-2)^2} \leq \frac{3}{4}$
   $\Longrightarrow \sup_{x\in[-2,0]} |g'(x)| = \frac{3}{4} < 1$, par conséquent, la fonction g est Lipschitizienne ce que implique que la méthode du point fixe (et $(x_n)_n$) est convergente. D'autre part, on a :

   $|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1}))| \leq \frac{3}{4}|x_n - x_{n-1}| \leq (\frac{3}{4})^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq (\frac{3}{4})^n|x_1 - x_0| \leq 2(\frac{3}{4})^n$
   Il suffit de considérer n tel que :
   $2(\frac{3}{4})^n \leq 10^{-4} \Longrightarrow e^{n\ln(\frac{3}{4})} \leq 0.00005 \Longrightarrow n \geq \frac{\ln(0.00005)}{\ln(\frac{3}{4})} \simeq 34.4251 \Longrightarrow n = 35$ donc, il faut exécuter au moins 35 itérations.
3. Vérifier que (PF) peut être transformé en un problème de résolution d'un équation non linéaire de la forme $(Eqt)\ \ f(x) = 0$ avec f un polynôme de degré 2. En remarquant que r est solution de (Eqt), appliquer la méthode de **Dichotomie** sur l'intervalle $[-1.75; 0]$ et calculer les deux premières valeurs approchées de r.
   $(PF) \Longrightarrow \frac{3}{x-2} = x \Longrightarrow x(x-2) = 3 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ on pose donc $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et le problème (PF) peut être résolu en utilisant l'équation non linéaire $(Eqt)\ \ f(x) = 0$. r est solution de (PF) alors $\frac{3}{r-2} = r \Longrightarrow r^2 - 2r - 3 = 0$ ce que signifie que r est solution de (Eqt).
   On a : f est une fonction continue, $f'(x) = 2x - 2 < 0$ sur $[-1.75; 0]$ et $f(-1.75) \times f(0) = 1.5625 \times (-3) < 0$ et par conséquent, r est la seule solution de (Eqt) dans $[-1.75; 0]$
   $x_0 = \frac{-1.75+0}{2} = -0.875$, $f(-0.875) = -0.4843$ on a $f(-1.75) \times f(-0.875) < 0 \Longrightarrow r \in [-1.75; -0.875]$
   $x_1 = \frac{-1.75+(-0.875)}{2} = -1.3125$
4. On définit la suite, $(y_n)_n$, des itérés données par : $\begin{cases} y_0 \in [-2, 0] \\ y_{n+1} = \frac{y_n^2+3}{2y_n-2} \end{cases}$
   Quelle méthode peut-on reconnaître ? Étudier la **convergence** de cette méthode.
   $y_{n+1} = \frac{y_n^2+3}{2y_n-2} = \frac{2y_n^2-y^2-2y_n+2y_n+3}{2y_n-2} = \frac{y_n(2y_n-2)-y^2+2y_n+3}{2y_n-2} = \frac{y_n(2y_n-2)}{2y_n-2} + \frac{-y^2+2y_n+3}{2y_n-2} = y_n - \frac{y^2-2y_n-3}{2y_n-2}$
   Donc $y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ et on reconnaît la méthode de Newton.
   On a f est classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-2, 0]$, $f'(x) = 2x - 2 <$ sur $[-2, 0]$ et $f''(x) = 2 > 0$
   Donc la convergence de la méthode dépend du choix de x_0, la méthode est convergente pour tout valeur x_0 tel que $f(x_0) > 0$ (C'est à dire $x_0 \in [-2, -1[$).

Exercice 2 (2+2+1.5=5.5 POINTS) : (Les trois questions sont indépendantes)

Soit f la fonction donnée par le tableau suivant :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$
$f(x_i)$	1	2	9	28

1. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 en utilisant la méthode de **Lagrange**.

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = \frac{x^2-2x}{-1} = 2x - x^2$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) = \frac{x^2-3x+2}{2} + 2(2x-x^2) + 9\frac{x^2-x}{2} = 3x^2 - 2x + 1$$

2. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_1, x_2 et x_3 en utilisant la méthode de **Newton**.

   Méthode de Newton :

x_i	$f(x_i)$	$DD1$	$DD2$
1	2		
2	9	7	
3	28	19	6

   Donc

$$P_2(x) = 2N_0(x) + 7N_1(x) + 6N_2(x) = 2 + 7(x-1) + 6(x-1)(x-2) = 6x^2 - 11x + 7$$

3. Donner une valeur approchée de $\int_0^3 f(x)dx$ en utilisant la méthode **des trapèzes** (composite avec 3 trapèzes).

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \simeq \frac{1-0}{2}(f(0)+f(1)) + \frac{2-1}{2}(f(1)+f(2)) + \frac{3-2}{2}(f(2)+f(3))$$

   Donc

$$\int_0^3 f(x)dx \simeq \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \frac{1}{2}f(3) = 25.5$$

Exercice 3 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Soit f une fonction de classe C^1 et (App) **l'approximation** :

$$(App) \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(x_0) + f(1)\right)$$

1. Déterminer x_0 pour que (App) soit <u>**exacte**</u> pour les polynômes de degré 0 et 1 (On peut utiliser $f(x) = 1$ puis $f(x) = x$).
   $f(x) = 1 \Longrightarrow \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2 \approx \frac{1}{3}(1+4+1) = 2$
   $f(x) = x \Longrightarrow \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0 \approx \frac{1}{3}(-1+4x_0+1) = \frac{4}{3}x_0 \Longrightarrow x_0 = 0$

2. On suppose que $x_0 = 0$, en utilisant un **changement de variable affine**, dans $I = \int_a^b f(x)dx$, déduire une formule (Q) permettant de calculer une valeur approchée de I.
   On pose $x = mt + p$ le changement de variable entre $[a;b]$ et $[-1,1]$ alors :
   Pour $x = a$, $t = -1$ donc $a = -m + p$
   Pour $x = b$, $t = 1$ donc $b = m + p$

$$\begin{cases} a = -m + p \\ b = m + p \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = \frac{b-a}{2} \\ p = \frac{b+a}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$, $dx = \frac{b-a}{2}dt$, $t = \frac{x-\frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}}$ et $dt = \frac{dx}{\frac{b-a}{2}}$ On a :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})dt$$

En utilisant (App) on a :

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}\frac{1}{3}\left(f(-\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}) + 4f(\frac{b-a}{2}\times 0 + \frac{a+b}{2}) + f(\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2})\right)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

3. Vérifier que (Q) est une **quadrature** de type Newton-cotes, laquelle ? Déterminer **l'ordre** exacte de (Q).

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) = (b-a)\left(\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6}f(b)\right)$$

Les points d'intégration sont équidistants : $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$ sont tels que $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \frac{b-a}{2}$ et $\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = 1$ On reconnaît le schéma général d'une quadrature de Newton-cotes avec $n = 2$ et la quadrature est celle de Simpson. Comme n est pair, l'ordre exacte est $n + 1 = 3$.

Exercice 4 (1.5+2=3.5 POINTS) : Considérons le Problème de Cauchy (PC) donné par :

$$(PC)\quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi $t_0 = 0$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. On suppose que (PC) admet une **solution unique**. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser méthode du **rectangle à gauche** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(t)dt = x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt \simeq f(t_n; x(t_n))\int_{t_n}^{t_{n+1}} dt = (t_{n+1} - t_n)f(t_n; x(t_n)) = hf(t_n; x(t_n)$$

En utilisant l'approximation $x(t_j) \simeq x_j$ on a : $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$

2. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser méthode du **rectangle à droite** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n. Transformer le schéma implicite ainsi obtenu en un schéma explicite.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(t)dt = x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t))dt \simeq f(t_{n+1}; x(t_{n+1}))\int_{t_n}^{t_{n+1}} dt = (t_{n+1} - t_n)f(t_{n+1}; x(t_{n+1})) = hf($$

En utilisant l'approximation $x(t_j) \simeq x_j$ on a : $x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$ qui est un schéma implicite. Pour rendre le schéma explicite, nous pouvons remplacer x_{n+1} dans le second membre par une expression équivalente, par exemple, avec la formule de la première question :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n))$$