RATTRAPAGE — 04 avril 2021 — 2020 - 2021

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (0.75+1.25+3+3+2=10 POINTS) : Soit (E) l'équation donnée par $f(x) = 0$ avec f, la fonction, définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 3$.

1. L'équation (E) admet-elle **une solution** dans l'intervalle $[-1, 1]$?
   f est continue (Polynôme), $f(-1) = -6$ et $f(1) = 2$ donc l'équation (E) admet (au moins) une solution.
2. Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule racine**, $\overline{x}$, dans l'intervalle $[a_0, b_0] = [0, 1]$;
   f est continue, $f(0) = -3$, $f(1) = 2$ et f est croissante (car $f'(x) = 3x^2 + 2x + 3 > 0$) donc l'équation (E) admet une et une seule solution, $\overline{x}$, dans l'intervalle $[0, 1]$
3. **Localiser** la racine $\overline{x}$ dans un intervalle $[c, d]$ d'amplitude $d - c = 0.25$. Déterminer le **nombre d'itérations**, p, nécessaire pour obtenir une solution approchée, x_p, avec une **précision** $\varepsilon = 10^{-6}$?
   $\overline{x} \in [0, 1]$, $x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5$, $f(0.5) = \frac{-9}{8} < 0$ et $f(0)f(0.5) > 0$ donc $\overline{x} \in [0.5, 1]$ et $1 - 0.5 = 0.5$
   $\overline{x} \in [0.5, 1]$, $x_1 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$, $f(0.75) = \frac{15}{64} > 0$, $f(0.5)f(0.75) < 0$ donc $\overline{x} \in [0.5, 0.75]$ et $0.75 - 0.5 = 0.25$
   Nous avons : $|x_p - \overline{x_0}| \leq \frac{1-0}{2^p}$ pour obtenir la précision souhaitée, il suffit de choisir p vérifiant :
   $$\frac{1}{2^p} \leq 10^{-6} \Longrightarrow 2^{-p} \leq 10^{-6} \Longrightarrow \ln(2^{-p}) \leq \ln(10^{-6}) \Longrightarrow p \geq \frac{6\ln(10)}{\ln(2)} = 19,93$$
   Il suffit d'exécuter 20 itérations pour obtenir la précision ε.
4. Montrer, en utilisant la méthode de Newton, que **l'algorithme** (Alg) permet de définir une suite $(z_n)_n$ d'approximations de $\overline{x}$:
   $$(Alg)\begin{cases} z_0 = 1 \\ \text{Tant que } |f(z_n)| > 10^{-5} \text{ Faire :} \\ z_{n+1} = \frac{2z_n^3+z_n^2+3}{3z_n^2+2z_n+3} \\ \text{Fin} \end{cases}$$
   Identifier **la précision** recherchée et étudier **la convergence** de cette méthode. Calculer z_1 et z_2 ;
   La méthode de Newton est définie par : z_0 bien choisie et
   $$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = z_n - \frac{z_n^3 + z_n^2 + 3z_n - 3}{3z_n^2 + 2z_n + 3} = \frac{z_n(3z_n^2 + 2z_n + 3) - (z_n^3 + z_n^2 + 3z_n - 3)}{3z_n^2 + 2z_n + 3}$$
   $$z_{n+1} = \frac{2z_n^3 + z_n^2 + 3}{3z_n^2 + 2z_n + 3}$$
   Si les conditions de convergence sont vérifiées, les termes z_n constituent des approximations de $\overline{x}$, l'algorithme propose de faire les calculs pour obtenir une précision $\varepsilon = 10^{-5}$.
   Nous avons : f est de classe $\mathcal{C}^2$, $f'(x) = 3x^2 + 2x + 3 > 0$ sur $[0, 1]$, $f''(x) = 6x^2 > 0$ sur $[0, 1]$ et $f(z_0) = f(1) = 2 > 0$ et de même signe que $f''(x)$ on en déduit que les conditions de convergence sont vérifiées et par conséquent, la suite z_n converge vers $\overline{x}$.
   $z_1 = \frac{2z_0^3+z_0^2+3}{3z_0^2+2z_0+3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$ et $z_2 = \frac{2z_1^3+z_1^2+3}{3z_1^2+2z_1+3} = 0.7121$

5. Transformer l'équation (E) en un problème de point fixe, de la forme $h(x) = x$, tel que h est une fonction rationnelle à déterminer (de la forme $\frac{\text{constante}}{\text{polynôme de degré 2}}$).
   Soit $(t_n)_n$ la suite définie par : $t_0 = 0.5 \quad$ et $\quad t_n = h(t_{n-1})$. Calculer t_1 et t_2.
   Est ce que la suite $(t_n)_n$ est **convergente** ? Si oui, déterminer sa limite.
   On donne :
$$(*) \quad -0.5 \le \frac{-6x-3}{(x^2+x+3)^2} \le -0.3 \quad \text{pour tout} \quad x \in [0,1]$$
$$(E) \Rightarrow x(x^2+x+3) = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{x^2+x+3} \rightarrow x = h(x)$$
   donc $\overline{x_0}$ est solution du problème du point fixe $h(x) = x$ avec $h(x) = \frac{3}{x^2+x+3}$
$$t_1 = h(t_0) = h(0.5) = 0.8 \;\; t_2 = h(t_1) = h(0.8) = 0.6756$$
   h est continue, $h'(x) = \frac{-3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2} = \frac{-6x-3}{(x^2+x+3)^2} < 0$ (d'après $(*)$).
   $h([0,1]) = [h(1), h(0)] = [\frac{3}{5}, 1] \subset [0,1]$ et $|h'(x)| = |\frac{-6x-3}{(x^2+x+3)^2}| \le 0.5$ donc h est contractante de rapport $L = 0.5$
$$|t_n - x_0| = |h(t_{n-1}) - h(x_0)| \le 0.5|t_{n-1} - x_0| = 0.5|h(t_{n-2}) - h(x_0)|$$
   donc :
$$|t_n - x_0| \le 0.5^2 |t_{n-2} - x_0|$$
   et ainsi de suite, par induction, jusqu'au trouver (notons que $|t_0 - x_0| \le 1$).
$$0 \le |t_n - x_0| \le (0.5)^n |t_0 - x_0| \le (0.5)^n$$
   Comme $(0.5)^n$ converge vers 0 (suite géométrique de raison inférieure à 1), on déduit que $|t_n - x_0|$ converge aussi vers 0 et par conséquent, la suite $(t_n)_n$ converge vers x_0.

Exercice 2 (2+3+2=7 POINTS) : Soient $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

1. Déterminer les **polynômes caractéristiques de Lagrange** $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ et formuler $P_2(x)$ le **polynôme d'interpolation** d'une fonction f sur la base des points x_0, x_1 et x_2.
$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{x^2-4x+3}{3}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = \frac{x^2-3x}{-2} = \frac{3x-x^2}{2}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{x^2-x}{6}$$
$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$
$$P_2(x) = f(0)\frac{x^2-4x+3}{3} + f(1)\frac{3x-x^2}{2} + f(3)\frac{x^2-x}{6}$$

2. Calculer $\int_0^3 L_i(x)dx$, $i = 0, 1, 2$, puis utiliser le polynôme d'interpolation, $P_2(x)$, pour déterminer une **quadrature** $Q = 3\sum_{i=0}^{i=3} \omega_i f(x_i)$, de l'intégrale $\quad I = \int_0^3 f(x)dx$. Quel est l'ordre de Q ?
$$\int_0^3 L_0(x)dx = \int_0^3 \frac{x^2-4x+3}{3}dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x]_0^3 = 0$$
$$\int_0^3 L_1(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^3 3x - x^2 dx = \frac{1}{2}[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^3 = \frac{9}{4}$$
$$\int_0^3 L_2(x)dx = \frac{1}{6}\int_0^3 x^2 - x dx = \frac{1}{6}[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2]_0^3 = \frac{3}{4}$$
$$I = \int_0^3 f(x)dx \simeq \int_0^3 P_2(x)dx = f(0)\int_0^3 L_0(x)dx + f(1)\int_0^3 L_1(x)dx + f(3)\int_0^3 L_2(x)dx$$
$$Q = 3\left(\frac{3}{4}f(1) + \frac{1}{4}f(3)\right)$$

3. Utiliser la **méthode de Simpson** pour donner une deuxième **quadrature** $\widetilde{I}$ permettant, aussi, d'approcher l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)dx$. Comparer Q et $\widetilde{I}$ et expliquer les différences.

$$\widetilde{I} = (3-0)\left(\frac{1}{6}f(0) + \frac{4}{6}f(\frac{0+3}{2}) + \frac{1}{6}f(3)\right) = 3\left(\frac{1}{6}f(0) + \frac{4}{6}f(1.5) + \frac{1}{6}f(3)\right)$$

Les deux quadratures sont bien différentes (points et poids) même si, à la base, on utilise trois points ! Les différences peuvent s'expliquer par la répartition des points : D'une part, une discrétisation uniforme de l'intervalle (0, 1.5 et 3) et d'autre part une répartition non uniforme de points (0, 1 et 3).

Exercice 3 (1+2=3 Points) :

1. Rappeler la formule de quadrature approchant l'intégrale $\int_c^d g(t)dt$ par la méthode **du trapèze** puis l'appliquer dans le cas $g(t) = F(t, y(t))$;

$$\int_c^d g(t)dt \simeq \frac{d-c}{2}\left(g(c) + g(d)\right)$$
$$\int_c^d F(t, y(t))dt \simeq \frac{d-c}{2}\left(F(c, y(c)) + F(d, y(d))\right)$$

2. On suppose que le problème de Cauchy, (P), admet une solution unique :

$$(P) \begin{cases} y' = F(t, y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Intégrer l'équation différentielle sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ puis utiliser **la méthode du Trapèze** et, pour tout indice j, l'**approximation** $y(x_j) \simeq y_j$ pour établir une relation entre y_{i+1} et y_i.

$$y' = F(t, y(t)) \Longrightarrow \int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t)dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, y(t))dt$$
$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \frac{t_{i+1} - t_i}{2}\left(F(t_i, y(t_i)) + F(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right)$$

Et en utilisant l'approximation, nous avons :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(F(t_i, y_i) + F(t_{i+1}, y_{i+1}))$$

QS. (+1 point) Transformer la relation précédente en **une méthode explicite**.

La relation précédente est implicite pour la transformer, nous pouvons remplacer y_{i+1} dans le second membre par une formulation adéquate, par exemple nous pouvons utiliser le schéma d'Euler explicite :

$$y_{i+1} = y_i + hF(t_i, y_i)$$

et donc :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(F(t_i, y_i) + F(t_{i+1}, y_i + hF(t_i, y_i)))$$

Rédaction et Présentation : 1 Point.