Exercice I. (10 POINTS). (*Les* ***six*** *questions sont* ***indépendantes***) :

1. Soit (E_p) **l'équation**, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donnée par : $(E_p) \quad 10u - 14v = p$ avec $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$. Vérifier que $(2, 1)$ est une **solution particulière** de (E_6), puis déterminer l'**ensemble des solutions** de (E_6). Que peut-on dire de l'**ensemble des solutions** de (E_5) ?

2. **Déterminer** : $PGCD(3280; 984)$ et $PPCM(3280; 984)$ (en détaillant les calculs).

3. Soit ABC un **triangle équilatéral** du plan et O son centre. Déterminer l'ensemble des **trois rotations** (dans le plan) qui laissent **invariants** les points A, B et C. **Dresser la table de composition** avec la loi **"suivi de"**, que peut-on déduire ?

4. Soit f la fonction **périodique**, de période 2π, définie, sur $]-\pi, 0[$, par : $f(x) = -\frac{1}{2}$ et, sur $]0, \pi]$, par : $f(x) = \frac{1}{2}$. Donner le développement en **série de Fourier** de cette fonction.

5. Déterminer les **rayons de convergence** des séries entières définies par : $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2z^n}{\sqrt{n+1}}$.

6. En détaillant les calculs, **Compléter** : $\overline{100001}^2 + \overline{1003}^4 = \overline{\bullet\bullet\bullet}^8$.

Exercice II. (5.5 POINTS) :

Soit $\jmath$ le nombre complexe (dans $\mathbb{C}^*$) donné par : $\jmath = e^{\frac{2\imath\pi}{3}}$ et U_3 le sous ensemble de $\mathbb{C}^*$ défini par :

$$U_3 = \left\{1, \jmath, \jmath^2\right\}$$

1. **Calculer** $\jmath^3$ et déduire que $\jmath^4 = \jmath$;

2. **Dresser la table** de multiplication de $(U_3, \times)$ ($\times$ est la multiplication habituelle dans $\mathbb{C}$) ;

3. Vérifier que $(U_3, \times)$ est **un groupe**. Est-il **Abelien** ?

4. Le groupe $(U_3, \times)$ admet-il des **sous groupes** ? lesquels ?

Exercice III. (4.5 POINTS) :

Soit $(f_n(x))_n$ **la suite de fonction** définie par : $f_n(x) = (x + \frac{1}{n})^2 \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad n \geq 1.$

1. Déterminer les **expressions** suivantes et préciser leurs natures : $f_1(x)$, $f_2(-\frac{1}{2})$, $f_n(0)$ et $f_n(-1)$;

2. **Étudier la convergence simple** de **la suite de fonctions** $(f_n(x))_n$;

3. Soit $g_n(x) = f_n(x) - x^2$. **Calculer** $|g_n(n)|$ puis $\lim_{n\to+\infty} |g_n(n)|$. Que peut-on dire de la **convergence uniforme** de la suite de fonctions $(f_n(x))_n$?

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT.