

Questions indépendantes (11.5 POINTS) :

- 1) Étudier la **convergence simple** de la **suite de fonctions** définie par : $f_n(x) = x(1-2x)^n$ sur $[0, 1[$.
On a $(1-2x)^n$ est une suite géométrique de raison $1-2x$ et $x \in [0, 1[\Rightarrow 1-2x \in]-1, 1]$, on en déduit :

$$- x \in]0, 1[\Rightarrow 1-2x \in]-1, 1[\text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-x)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

$$- \text{ Pour } x = 0, \text{ on a } f_n(0) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$$

Donc la suite de fonctions $f_n(x)$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers $f(x) = 0$.

- 2) Étudier la **convergence de la série de fonctions** du terme général $f_n(x)$ tel que : $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$.
Est ce que la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue ? Justifier.

On a :

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ terme général d'une série numérique de Reimann convergente } \alpha = 2 > 1$$

La série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est normalement (et par conséquent uniformément, absolument et simplement) convergente.

La fonction $f_n(x)$ est continue pour tout $n > 0$ et la série converge uniformément, d'après la propriété fondamentale sur la continuité, la somme (ou limite) de la série ($f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$) est une fonction continue.

- 3) Une **série entière** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ **converge** pour $z_0 = 3 + 4i$ et **diverge** pour $z_1 = 4 + 3i$. Déterminer son **rayon de convergence**. Que peut on déduire si $z_1 = 6i$?

On a :

$$|z_0| \leq R \leq |z_1| \Rightarrow 5 \leq R \leq 5 \Rightarrow R = 5$$

Si $z_1 = 6i$ alors $5 \leq R \leq 6$

- 4) Déterminer le **développement en série entière** de x la fonction f (On suppose que le rayon de convergence R est donné) : $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

$$\text{On a : } f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1) = \ln((x+1)^2) = 2 \ln(1+x) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2x^n}{n}$$

$$\text{donc } a_n = \frac{(-1)^{n+1} 2}{n}$$

- 5) Déterminer la **série de Fourier**, sous forme **trigonométrique**, de la fonction 2π -périodique f définie sur $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2x$ sur $[-\pi, \pi[$.

La fonction f est impaire dans $A_n = 0$ et en utilisant une intégration par parties, on a :

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \left(-\pi \frac{\cos(n\pi)}{n} + \pi \frac{\cos(-n\pi)}{n} \right) = -\frac{4\pi(-1)^n}{n\pi} = (-1)^{n+1} \frac{4}{n}$$

Donc :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n} \sin(nx)$$

- 6) Effectuer les **transformations** suivantes (dans **cet ordre** et en **détaillant les calculs**) :

$$\overline{101}^5 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0 = 25 + 1 = \overline{26}^{10}$$

$$26 = 3 \times 8 + 2$$

$$3 = 0 \times 8 + 3$$

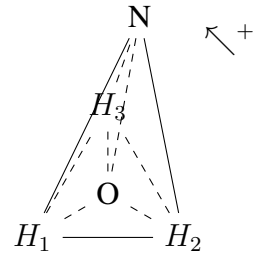
$$26 = \overline{32}^8$$

$$\begin{aligned}
\overline{32}^{8=2^3} &= \underbrace{3}_2 \underbrace{2}_2 = \underbrace{011}_3 \underbrace{010}_2 = \overline{11010}^2 \\
16 = 2^4 &\implies \overline{11010}^2 = \underbrace{0001}_{=10 \rightarrow A} \underbrace{1010}_2 = \overline{1A}^{16} \\
\overline{101}^5 &\longrightarrow \overline{26}^{10} \longrightarrow \overline{32}^8 \longrightarrow \overline{11010}^2 \longrightarrow \overline{1A}^{16}
\end{aligned}$$

- 7) Trouver **tous les couples** (s, t) tels que : $PGCD(s, t) = 4$ et $PPCM(s, t) = 56$, $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}$.
On a : $4 = 2^2$ et $56 = 2^3 \times 7$ donc les facteurs premiers présents dans s et t sont 2 (avec puissance minimale 2 et maximale 3) et 7 (avec puissance minimale 0 et maximale 1)
Donc : $s = 4$ et $t = 56$ ou $s = 8$ et $t = 28$

Exercice 2 (8.5 POINTS) :

L'ammoniac est une molécule pyramidale à base triangulaire : l'atome de l'azote (N) est au sommet de la pyramide et les trois atomes d'hydrogène (H) occupent les trois sommets de la base (triangle) notés H_1 , H_2 et H_3 et soit O le centre de cette base. On considère les **six éléments de symétrie** ci-après :



T_1 la transformation telle que $N \longrightarrow N$, $H_1 \longrightarrow H_2$, $H_2 \longrightarrow H_3$ et $H_3 \longrightarrow H_1$

T_2 la **rotation** (dans l'espace) autour de l'axe C_3 (la droite (NO)) et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

Id la transformation qui laisse **invariant** tous les points

R_1 la transformation telle que : $N \longrightarrow N$, $H_1 \longrightarrow H_1$, $H_2 \longrightarrow H_3$ et $H_3 \longrightarrow H_2$

R_2 la **réflexion** (dans l'espace) par rapport au plan vertical qui passe par N , H_2 et le milieu de $[H_1H_3]$

R_3 la **réflexion** (dans l'espace) par rapport au plan vertical qui passe par N , H_3 et le milieu de $[H_1H_2]$

- 1) Quelle est la nature du triangle $H_1H_2H_3$? Préciser la nature de T_1 puis celle de R_1 ?
 Le triangle $H_1H_2H_3$ est équilatéral (liaison Hydrogène-Hydrogène)
 T_1 est une rotation (dans l'espace) autour de l'axe C_3 (la droite (NO)) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et R_1 est la réflexion (dans l'espace) par rapport au plan vertical qui passe par N , H_3 et O (et aussi le milieu de $[H_1H_2]$).
- 2) Expliciter les transformations T_2 , Id , R_2 et R_3 en précisant les images des points N , H_1 , H_2 et H_3 ;
 $T_2 : N \longrightarrow N, H_1 \longrightarrow H_3, H_2 \longrightarrow H_1$ et $H_3 \longrightarrow H_2$
 $Id : N \longrightarrow N, H_1 \longrightarrow H_1, H_2 \longrightarrow H_2$ et $H_3 \longrightarrow H_3$
 $R_2 : N \longrightarrow N, H_1 \longrightarrow H_3, H_2 \longrightarrow H_2$ et $H_3 \longrightarrow H_1$
 $R_3 : N \longrightarrow N, H_1 \longrightarrow H_2, H_2 \longrightarrow H_1$ et $H_3 \longrightarrow H_3$
- 3) Soit G l'ensemble des **six transformations** muni de, $\circ$, la **loi de composition habituelle**. Compléter la table ci-jointe et vérifier que $(G, \circ)$ est un **groupe non commutatif** ;

(Exemple : $T_1 \circ R_3$, on applique d'abord R_3 puis T_1 :

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow N \longrightarrow N \\ H_1 &\longrightarrow H_1 \longrightarrow H_2 \\ H_2 &\longrightarrow H_3 \longrightarrow H_1 \\ H_3 &\longrightarrow H_2 \longrightarrow H_3 \end{aligned}$$

Nous avons :

La loi est interne à G (tous les éléments de la table sont dans G)

La composition $\circ$ est une loi usuelle associative

D'après la table, Id est un élément neutre $Id \circ T = T \circ Id = T$ pour tout T

Chaque élément admet un symétrique, d'après la table, $Id \longrightarrow Id, T_1 \longrightarrow T_2, T_2 \longrightarrow T_1, R_1 \longrightarrow R_1, R_2 \longrightarrow R_2$ et $R_3 \longrightarrow R_3$.

La loi n'est pas commutative car, par exemple, $R_1 \circ R_3 = T_2 \neq R_3 \circ R_1 = T_1$

- 4) Le groupe $(G, \circ)$ admet-il des **sous-groupes de 3 éléments ? de 4 éléments ?** Si oui, les déterminer.

G est composé de 6 éléments $Card\ G = 6$, donc G admet des sous groupes de 3 éléments mais n'admet pas de sous groupes de quatre éléments.

Un sous groupe de trois éléments est constitué de l'élément neutre et d'un élément et son symétrique : $\{Id, T_1, T_2\}$

Exemple de calcul : $T_1 \circ R_3 = R_2$

$\nearrow$	Id	T_1	T_2	R_3	R_2	R_1
Id	Id	T_1	T_2	R_3	R_2	R_1
T_1	T_1	T_2	Id	R_2	R_1	R_3
T_2	T_2	Id	T_1	R_1	R_3	R_2
R_3	R_3	R_1	R_2	Id	T_2	T_1
R_2	R_2	R_3	R_1	T_1	Id	T_2
R_1	R_1	R_2	R_3	T_2	T_1	Id