MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Bouchaib FERRAHI/// www.ferrahi.ma

29 mai 2023

12:17

Présentation du module

Cette présentation ne constitue pas un support complet de ce cours mais seulement des éléments qui peuvent servir comme base de discussions, recherches et développements!!
Plusieurs sources (sur supports papiers et électroniques) ont été consultées et utilisées, notamment le livre de référence:
MARCHES FINANCIERS, B. Jacquillant et B. Solnik, DUNOD 2002.

Présentation du module

- Master : MAF
- Semestre :S2
- Code : MAF12
- intitulé : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES
- Objectifs :
  1. Introduire les notions des Mathématiques financières et d'applications des Mathématiques en Finance
  2. Présenter les marchés et les instruments financiers
  3. Présenter les modèles et outils classiques de la Finance de marché
  4. Initier au calcul stochastique et à ces Applications
- Pré-requis :Probabilité
- Volume horaire : 40h + 20h de travail personnel
- Évaluation : Participation + CC + Projet + Examen final

Contact

Bouchaib FERRAHI

- Département de Mathématiques - Faculté des Sciences - Tétouan
- ferrahi@yahoo.combferrahi@uae.ac.ma
- www.ferrahi.ma
- www.facebook.com/bouchaib.ferrahi
- www.linkedin.com/in/ferrahi
- Moodle : https ://moodle.fst.ac.ma/moodle/course/view.php ?id=492

Plan

1. Introduction
2. Mathématiques financières élémentaires
3. Concepts et Généralités
   - Marchés financiers
   - Produits financiers
   - Indices boursiers
   - Caractéristiques d'un actif
4. Modèles Mathématiques de la finance quantitative
   - Un exemple pédagogique : Modèle de Markowitz
   - Modèle du marché
   - Modèles d'évaluation d'options
5. Applications et Travaux dirigés

Un peu d'histoire...

– Au XIV siècle av. JC (sous le pharaon Akhenaton) : achat et vente à terme de blé.
– Au VII siècle av. JC : Thalès de Millet premier "grand spéculateur" en anticipant sur les récoltes abondantes d'olive.
– Les Romains finançaient les grands travaux par la vente d'obligations (dette souveraine).
– Au XVI siècle en Hollande : commerce actif de bulbes de tulipe. Contrats garantissant le prix de vente des tulipes au printemps suivant.
– Au XVII siècle, marchés à terme sur le riz au Japon, ou sur le blé et le bétail aux USA dès le XIX siècle.
– Jusque dans la fin des années 60, essentiellement produits dérivés sur matières premières et agricoles.

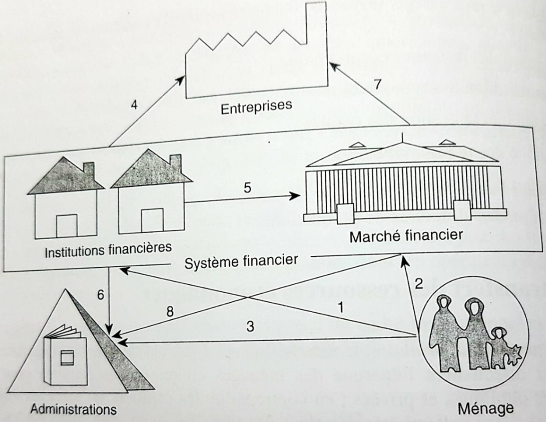
Un peu d'histoire...

- 1971. Abandon du système Bretton Woods $\rightarrow$ Déréglementation des marchés financiers
- 1973. Création des marchés d'options à Chicago en 1973, contrats à terme sur taux d'intérêt en 1977, LIFFE (Londres) en 1982, MATIF (Paris) en 1986

Les Mathématiques ?

- Ont toujours été utilisées dans les banques (comme dans bien des domaines. . .)
- Inévitables depuis longtemps en économie et économie mathématique : Modèle d'équilibre, de croissance, de prévision de chômage...
Voir les prix Nobel d'économie de Kantorovich (Théorie de l'allocation optimale des ressources), Debreu (Théorie de l'équilibre général et partiel),...
- 1973. Résolution surprenante d'un problème de cible aléatoire par les économistes Black†-Scholes-Merton (Nobel en 1997). Puis développement spectaculaire des marchés, soutenus par l'informatique.

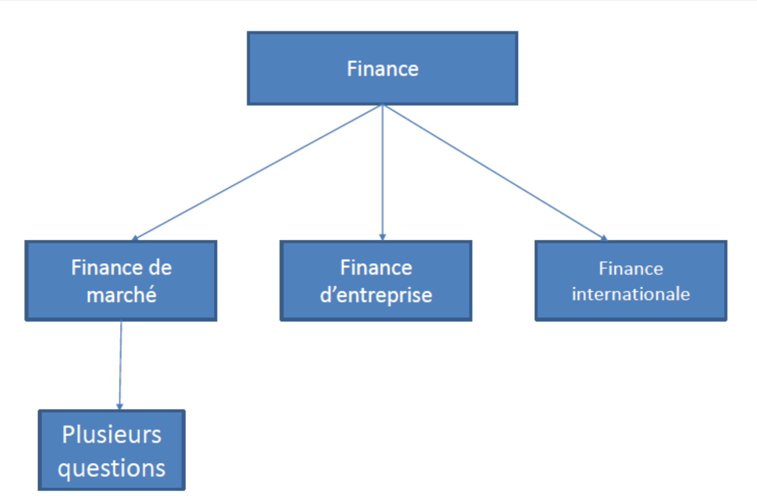
Le Système financier...



Source : Le rôle du marché financier dans l'économie (Euronext Paris

Figure 1.1 – *Le marché financier dans le système financier*

La Finance...


Finance
Finance de marché
Finance d'entreprise
Finance internationale
Plusieurs questions

Mathématiques financières élémentaires

Intérêts

- L'intérêt est la contre partie d'un capital prêté ou emprunté pendant une période bien déterminée.
Autrement dit : L'intérêt constitue le loyer de l'argent qui peut être une dépense ou un revenue.
Il s'agit d'une dépense pour l'emprunteur(appelé aussi débiteur ou tiré) et l'intérêt correspond à la rémunération du capital prêté. Il s'agit d'un revenu pour le prêteur(appelé aussi le créancier ou tireur)
L'intérêt est le revenu tiré du capital prêté
Le mode de calcul et de paiement des intérêts varie selon les clauses du contrat du prêt.

Mathématiques financières élémentaires

Intérêts

Un individu **place** 1000 *UM* pendant 3 ans à un taux annuel de 10%. Quel est le montant à récupérer après 3 ans ?

Mathématiques financières élémentaires

Intérêts

Un individu **place** 1000 *UM* pendant 3 ans à un taux annuel de 10%. Quel est le montant à récupérer après 3 ans ?

Intérêts simples :

100 *UM* chaque année, donc : $1000 + 3 \times 100 = 1300$ *UM*

Mathématiques financières élémentaires

Intérêts

Un individu **place** 1000 UM pendant 3 ans à un taux annuel de 10%. Quel est le montant à récupérer après 3 ans ?

Intérêts simples :

100 UM chaque année, donc : $1000 + 3 \times 100 = 1300$ UM

Intérêts composés :

Première année : $1000 + 100 = 1100$ UM

Deuxième année : $1100 + 110 = 1210$ UM

3ème année : $1210 + 121 = 1331$ UM

Mathématiques financières élémentaires

Intérêts

Un individu **place** 1000 *UM* pendant 3 ans à un taux annuel de 10%. Quel est le montant à récupérer après 3 ans ?
Intérêts simples :
100 *UM* chaque année, donc : $1000 + 3 \times 100 = 1300$ *UM*
Intérêts composés :
Première année : $1000 + 100 = 1100$ *UM*
Deuxième année : $1100 + 110 = 1210$ *UM*
3ème année : $1210 + 121 = 1331$ *UM*
Intérêts simples$\longrightarrow$ suite arithmétique : $(1 + n\frac{t}{100})Capital$
Intérêts composés$\longrightarrow$ suite géométrique $(1 + \frac{t}{100})^n Capital$

Mathématiques financières élémentaires

Intérêts

Un individu **emprunte** 1000 UM pendant une année à un taux annuel de 8%. Quel est le montant à payer après une année ?

Mathématiques financières élémentaires

Intérêts

Un individu **emprunte** 1000 UM pendant une année à un taux annuel de 8%. Quel est le montant à payer après une année ?

Intérêts post-comptés ou payés au moment du remboursement :

Montant reçu : 1000 UM

Montant payé : $1000(1 + \frac{8}{100}) = 1080$ UM

Mathématiques financières élémentaires

Intérêts

Un individu **emprunte** 1000 UM pendant une année à un taux annuel de 8%. Quel est le montant à payer après une année ?

Intérêts post-comptés ou payés au moment du remboursement :

Montant reçu : 1000 UM

Montant payé : $1000(1 + \frac{8}{100}) = 1080\ UM$

Intérêts pré-comptés ou payés au moment du prêt :

Montant reçu : $1000(1 - \frac{8}{100}) = 920\ UM$

Montant payé : 1000 UM

Mathématiques financières élémentaires

Intérêts

Un individu **emprunte** 1000 UM pendant une année à un taux annuel de 8%. Quel est le montant à payer après une année ?

Intérêts post-comptés ou payés au moment du remboursement :

Montant reçu : 1000 UM

Montant payé : $1000(1+\frac{8}{100}) = 1080\ UM$

Intérêts pré-comptés ou payés au moment du prêt :

Montant reçu : $1000(1-\frac{8}{100}) = 920\ UM$

Montant payé : 1000 UM

Intérêts périodiques : Payés à la fin de chaque période (semaines, mois, trimestres, semestres, années) selon le contrat $\longrightarrow$ **Mode de paiement**

Mathématiques financières élémentaires

Travaux de recherche et exposés

- Intérêts simples et l'équivalence à intérêts simples.
- Escompte
- Intérêts composés et l'équivalence à intérêts composés.L
- Les annuités.
- Les emprunts.
- Rentabilité des investissements.
- Les annuités.
- Capitalisation et actualisation.
- Les emprunts obligataires.

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

- Préférez-vous recevoir 10000 UM maintenant, ou 10500 UM dans un an ?
- Préférez-vous recevoir 10000 UM maintenant, ou 2015 UM par an sur les 5 prochaines années ?
- Un ami vous emprunte 10000 UM et vous promet 3 remboursements mensuels de 3335 UM chacun. Est-ce un bon ami ?

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

- Préférez-vous recevoir 10000 *UM* maintenant, ou 10500 *UM* dans un an ?
- Préférez-vous recevoir 10000 *UM* maintenant, ou 2015 *UM* par an sur les 5 prochaines années ?
- Un ami vous emprunte 10000 *UM* et vous promet 3 remboursements mensuels de 3335 *UM* chacun. Est-ce un bon ami ?

Un Dirham aujourd'hui n'est pas égal à un Dirham demain ! !

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

- Préférez-vous recevoir 10000 UM maintenant, ou 10500 UM dans un an ?
- Préférez-vous recevoir 10000 UM maintenant, ou 2015 UM par an sur les 5 prochaines années ?
- Un ami vous emprunte 10000 UM et vous promet 3 remboursements mensuels de 3335 UM chacun. Est-ce un bon ami ?

Un Dirham aujourd'hui n'est pas égal à un Dirham demain ! !

Actualisation

$VA?? \longleftarrow - - - - - - - VF$

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

- Préférez-vous recevoir 10000 *UM* maintenant, ou 10500 *UM* dans un an ?
- Préférez-vous recevoir 10000 *UM* maintenant, ou 2015 *UM* par an sur les 5 prochaines années ?
- Un ami vous emprunte 10000 *UM* et vous promet 3 remboursements mensuels de 3335 *UM* chacun. Est-ce un bon ami ?

Un Dirham aujourd'hui n'est pas égal à un Dirham demain ! !

Actualisation	Capitalisation
$VA?? \longleftarrow - - - - - - VF$	$VA - - - - - - \longrightarrow VF??$

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

Les formules dépendent de la manière de gestion des "flux financiers" (durée, intérêts, versements,...)
Une seule valeur :

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

Les formules dépendent de la manière de gestion des "flux financiers" (durée, intérêts, versements,...)
Une seule valeur :

$$VF = (1+\frac{t}{100})^n VA \quad \text{et} \quad VA = \frac{1}{(1+\frac{t}{100})^n} VF = (1+\frac{t}{100})^{-n} VF$$

Une série de flux financiers (dépôt de chaque année d'une valeur X_k avec un taux fixe t) :

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

Les formules dépendent de la manière de gestion des "flux financiers" (durée, intérêts, versements,...)
Une seule valeur :

$$VF = (1+\frac{t}{100})^n VA \quad \text{et} \quad VA = \frac{1}{(1+\frac{t}{100})^n} VF = (1+\frac{t}{100})^{-n} VF$$

Une série de flux financiers (dépôt de chaque année d'une valeur X_k avec un taux fixe t) :
n années : Intérêts à partir de l'écoulement de la première année, donc $n-1$ années d'intérêts et ainsi de suite,...

$$VF = \sum_{k=1}^{k=n} (1+\frac{t}{100})^{n-k} X_k$$

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

Si les versements annuels sont identiques ($X_k = V$) :

$$VF = V\sum_{k=1}^{k=n}(1+\frac{t}{100})^{n-k} = V\frac{(1+\frac{t}{100})^n - 1}{\frac{t}{100}}$$

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

Si les versements annuels sont identiques ($X_k = V$) :

$$VF = V\sum_{k=1}^{k=n}(1+\frac{t}{100})^{n-k} = V\frac{(1+\frac{t}{100})^n - 1}{\frac{t}{100}}$$

La valeur actuelle d'un flux ($VA = X_0$) peut être obtenu en actualisant toutes les valeurs X_k (attention, la durée n'est pas la même !) :

$$VA = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{X_k}{(1+\frac{t}{100})^k}$$

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

Si les versements annuels sont identiques ($X_k = V$) :

$$VA = V \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{(1+\frac{t}{100})^k} = V \sum_{k=1}^{k=n} (1+\frac{t}{100})^{-k} = V \frac{1-(1+\frac{t}{100})^{-n}}{\frac{t}{100}}$$

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

Si les versements annuels sont identiques ($X_k = V$) :

$$VA = V\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{(1+\frac{t}{100})^k} = V\sum_{k=1}^{k=n}(1+\frac{t}{100})^{-k} = V\frac{1-(1+\frac{t}{100})^{-n}}{\frac{t}{100}}$$

Remarque:
Généralement, on note $i = \frac{t}{100}$ et on dit aussi que i est l'intérêt (sans unité).

Mathématiques financières élémentaires

Actualisation et Capitalisation

D'autres questions : Détermination de la durée n et du taux t :

`Exemples:`

- Pour un investissement de 10000 UM, votre banque vous propose de vous rendre, dans 6 ans, 25000 UM. Quel est le taux annuel ?
- Un investissement de 10000 UM avec un taux annuel de % rapporte un montant global de 25000 UM. quelle est la durée ?

Concepts et Généralités

Marchés financiers

Les marchés financiers permettent la confrontation de l'offre est de la demande de capitaux.

Concepts et Généralités

Marchés financiers

Les marchés financiers permettent la confrontation de l'offre est de la demande de capitaux.

La demande émane des entreprises, de l'état et des collectivités locales pour financer leurs investissements ou pour couvrir leurs déficits.

Concepts et Généralités

Marchés financiers

Les marchés financiers permettent la confrontation de l'offre est de la demande de capitaux.

La demande émane des entreprises, de l'état et des collectivités locales pour financer leurs investissements ou pour couvrir leurs déficits.

L'offre émane, principalement, des ménages qui assurent leur consommation future par l'épargne qu'ils constituent et qu'il apportent au système financier, soit directement, soit indirectement par le biais des compagnie d'assurances, des caisses de retraites,...

Concepts et Généralités

Marchés financiers

Les marchés financiers permettent la confrontation de l'offre est de la demande de capitaux.
La demande émane des entreprises, de l'état et des collectivités locales pour financer leurs investissements ou pour couvrir leurs déficits.
L'offre émane, principalement, des ménages qui assurent leur consommation future par l'épargne qu'ils constituent et qu'il apportent au système financier, soit directement, soit indirectement par le biais des compagnie d'assurances, des caisses de retraites,...
Les marchés des capitaux peuvent être considérés comme un système industriel de collecte, de transformation et d'allocation des ressources financières.

Concepts et Généralités

Marchés financiers

Le marché financier assurent des fonctions essentielles :

- Le transfert des ressources économiques
- La mutualisation des ressources
- L'allocation et la gestion des risques
- La liquidité des investissements
- Le transfert des informations par le prix
- La mutation des structures de production

Concepts et Généralités

Produits financiers

- **Les actions :**
  L'action est un titre de participation ou de copropriété dans une société de capitaux, qui confère à son possesseur (ou détenteur) la qualité d'associé et, sauf exception explicite, lui donne un droit proportionnel sur la gestion de l'entreprise, sur les bénéfices réalisés et sur l'actif social.

Concepts et Généralités

Produits financiers

Quelques exemples de droits :

Concepts et Généralités

Produits financiers

Quelques exemples de droits :

Droit à la gestion (Conseil d'administration, conseil de surveillance, directoire,...) ;

Concepts et Généralités

Produits financiers

Quelques exemples de droits :

Droit à la gestion (Conseil d'administration, conseil de surveillance, directoire,...) ;

Droit à l'information : Documents d'information sur les activités et les résultats de la société ;

Concepts et Généralités

Produits financiers

Quelques exemples de droits :

Droit à la gestion (Conseil d'administration, conseil de surveillance, directoire,...) ;

Droit à l'information : Documents d'information sur les activités et les résultats de la société ;

Droit sur les bénéfices : Distribution des dividendes, mise en réserve,...

Concepts et Généralités

Produits financiers

Quelques exemples de droits :

Droit à la gestion (Conseil d'administration, conseil de surveillance, directoire,...) ;

Droit à l'information : Documents d'information sur les activités et les résultats de la société ;

Droit sur les bénéfices : Distribution des dividendes, mise en réserve,...

Droit sur l'actif net de la société (après déduction faite des dettes) : Augmentation de capital (souscription ou attribution).

Concepts et Généralités

Produits financiers

Quelques exemples de droits :

Droit à la gestion (Conseil d'administration, conseil de surveillance, directoire,...) ;

Droit à l'information : Documents d'information sur les activités et les résultats de la société ;

Droit sur les bénéfices : Distribution des dividendes, mise en réserve,...

Droit sur l'actif net de la société (après déduction faite des dettes) : Augmentation de capital (souscription ou attribution).

Remarquons, qu'il existe d'autres catégories d'actions ayant des droits différenciés par rapport aux actions dites ordinaires : Actions de priorité, actions privilégiées,...

Concepts et Généralités

Produits financiers

Pour trouver les capitaux nécessaires au développement de ses activités un emprunteur peut également émettre des titres de créance. Ces titres sont appelés **"obligations"** :

- **Les obligations** Donnent à leurs détenteurs la qualité de créancier de l'émetteur, public ou privé, qui s'engage à les rembourser à **une échéance déterminée** et à leur verser **un intérêt fixe**, d'ou leur nom de valeurs à **"revenu fixe"**.

Concepts et Généralités

Produits financiers

Pour trouver les capitaux nécessaires au développement de ses activités un emprunteur peut également émettre des titres de créance. Ces titres sont appelés **"obligations"** :

- **Les obligations** Donnent à leurs détenteurs la qualité de créancier de l'émetteur, public ou privé, qui s'engage à les rembourser à **une échéance déterminée** et à leur verser **un intérêt fixe**, d'ou leur nom de valeurs à **"revenu fixe"**.

Les caractéristiques principales de chaque obligation sont décrites dans le contrat d'émission qui précise généralement :

Concepts et Généralités

Produits financiers

Pour trouver les capitaux nécessaires au développement de ses activités un emprunteur peut également émettre des titres de créance. Ces titres sont appelés **"obligations"** :

- **Les obligations** Donnent à leurs détenteurs la qualité de créancier de l'émetteur, public ou privé, qui s'engage à les rembourser à **une échéance déterminée** et à leur verser **un intérêt fixe**, d'ou leur nom de valeurs à **"revenu fixe"**.

Les caractéristiques principales de chaque obligation sont décrites dans le contrat d'émission qui précise généralement :Prix d'émission, l'intérêt ou coupon versé chaque année, sa périodicité (année, semestre, trimestre), le prix de remboursement et ses modalités.

Concepts et Généralités

Produits financiers

Remarquons que :

Contrairement aux actions qui ne peuvent être crées que par des sociétés de capitaux, les obligations peuvent généralement etre emises par des collectivités de statuts juridiques divers :

- L'état, les collectivités du secteur public ou semi public : Entreprises publiques, régions, villes,...
- Les sociétés de capitaux du secteur privé.

Il existe plusieurs variantes des obligations :

Obligations assimilables du Trésor (OAT), obligations à coupon zéro, obligations démembrées, obligations indexées, obligations à taux variable ou flottant,...

Concepts et Généralités

Produits financiers

- **Les titres financiers hybrides :**
  Ce sont possèdent certaines caractéristiques des actions et des obligations.
  La liste des ces titres est large, nous pouvons citer : Obligations convertibles en actions, Les obligations remboursables en actions, les obligations à bons de souscription d'actions, les obligations à bons de souscription d'actions remboursables, les obligations convertibles échangeables en actions nouvelles ou à émettre, les obligations remboursables en actions nouvelles ou en numéraire,...

Concepts et Généralités

Produits financiers

A titre d'exemples :
Obligations convertibles en actions (OCA) : Sont des obligations émises avec un prix de remboursement fixe et un intérêt bien déterminer (obligations classiques) mais qui peuvent également être converties en actions de l'émetteur (c'est une option que le détenteur peut utiliser ou non suivant les prix sur le marché).

Obligations remboursables en actions (ORA) : Contrairement aux OCA, ce n'est pas le détenteur des ORA, mais l'émetteur, qui décide du mode de remboursement (en espèces ou en actions)

Concepts et Généralités

Produits financiers

Remarquons que le concept d'**actif** (Asset) est intéressent et plus général que "produit financier".
Un actif est un élément qui procure un revenu certain ou incertain d'une manière régulière ou non (souvent avec une prise de risque).
Action, Obligation, Machine, Maison, Police d'assurance, Option put ou call, Devises, Entreprise, Crédit bancaire, Dépôt bancaire, Billet de loterie,...

Concepts et Généralités

Produits financiers

- **Produit dérivé :**
  Instrument financier dont la valeur est basée sur les fluctuations d'un autre actif, appelé le sous-jacent (underlying).
  Ce sous-jacent peut tout aussi bien être une action, un taux de change, une matière première, une obligation ou un indice boursier.
  La valeur d'un produit dérivé, son risque et sa rentabilité sont donc « dérivés » d'un autre actif (son sous-jacent).

Concepts et Généralités

Produits financiers

Il existe plusieurs types de produits dérivés qui ont souvent beaucoup d'éléments en commun, Donnons, les trois familles les plus utilisées :

- **Les contrats à termes de type forward et futures :** Les deux types de contrats identiques dans leur principe mais avec différentes modalités d'exécution.
  Le contrat à terme forward constitue un engagement à acheter ou de vendre une certaine quantité d'actifs ou actifs sous-jacents à une date d'échéance future et à un prix spécifié au moment où le contrat est passé (A date de l'échéance, deux éventualités pour l'acheteur : profit ou perte et vice

Concepts et Généralités

Produits financiers

Le versement de la valeur du contrat se fait totalement à la date d'échéance et aucun paiement n'est possible entre la date du contrat et la date de l'échéance.

Produits sous-jacents : Devises, produits financiers, matières premières, produits agricoles,...

Concepts et Généralités

Produits financiers

Le contrat à terme de type futures :

Ce contrat est par construction semblable au contrat à terme forward, la différence majeure entre les deux contrat est que le premier est conclu entre deux parties bien identifiées et sans intermédiaires avec un risque de défaut (non respect des engagements) et le deuxième est conclu entre parties souvent anonymes sur un marché organisé et par contrat standardisé et le risque de défaut est pratiquement inexistant grace à des mécanismes spécifiques : le dépôt de garantie, l'appel de marge et l'existence d'un chambre de compensation.

Concepts et Généralités

Produits financiers

Remarquons que si le premier contrat arrive souvent à l'échéance, le deuxième à souvent des fins de spéculation et n'abouti presque jamais.

Concepts et Généralités

Produits financiers

Remarquons que si le premier contrat arrive souvent à l'échéance, le deuxième à souvent des fins de spéculation et n'abouti presque jamais.

- **Les swaps :** Des innovations relativement récentes (debut des années 80), en réalité, un swap n'est pas autre chose qu'un portefeuille agrégé de contracts à termes de type forward où les deux parties s'engagent à s'échanger (swapper) des actifs financiers à des dates précises.
  Les swaps les plus utilisés : les swaps de devises (dollars contre euros), les swap de taux d'intérêt (taux fixe contre taux variable dans une même devise)

Concepts et Généralités

Produits financiers

Les propriétaires des contrats à terme (forward ou futures) ou de swaps ont contractés une obligation à terme, mais **ferme** et **définitive**.

Concepts et Généralités

Produits financiers

Les propriétaires des contrats à terme (forward ou futures) ou de swaps ont contractés une obligation à terme, mais **ferme** et **définitive**.

- **Les contrats d'options** :
  Contrairement aux autres types, l'option confère à son acheteur **le droit** (mais non l'obligation) d'acheter ou de vendre un actif à une certaine échéance.
  Exemples de contrats négociés : Les calls (option d'achat) et les puts (options de vente) avec, dans les deux cas, un vendeur et un acheteur et avec un paiement d'un premium (prime) par l'acheteur au vendeur de tels contracts dès leurs conclusion.

Concepts et Généralités

Indices boursiers

Les indices boursiers sont apparus à la fin du 19 ème siècle avec la création de célèbre indice Dow Jones des 30 valeurs en 1884. Conçus au départ pour donner une idée sur l'évolution générale d'un marché particulier, les indices se sont multipliés et leur utilisation s'est généralisée à de nombreuses applications, au point que la production des indices et la dissémination de leur valeur en temps réel est devenues une vraie industrie :

Concepts et Généralités

Indices boursiers

Les indices boursiers sont apparus à la fin du 19 ème siècle avec la création de célèbre indice Dow Jones des 30 valeurs en 1884. Conçus au départ pour donner une idée sur l'évolution générale d'un marché particulier, les indices se sont multipliés et leur utilisation s'est généralisée à de nombreuses applications, au point que la production des indices et la dissémination de leur valeur en temps réel est devenues une vraie industrie :

- Les indices demeurent toujours un élément d'appréciation synthétique de l'évolution de la tendance d'un marché ou de l'un de ses compartiments.

Concepts et Généralités

Indices boursiers

Les indices boursiers sont apparus à la fin du 19 ème siècle avec la création de célèbre indice Dow Jones des 30 valeurs en 1884. Conçus au départ pour donner une idée sur l'évolution générale d'un marché particulier, les indices se sont multipliés et leur utilisation s'est généralisée à de nombreuses applications, au point que la production des indices et la dissémination de leur valeur en temps réel est devenues une vraie industrie :

- Les indices demeurent toujours un élément d'appréciation synthétique de l'évolution de la tendance d'un marché ou de l'un de ses compartiments.
- Les indices sont devenus un élément fondamental de l'appréciation d'une gestion de portefeuille.

Concepts et Généralités

Indices boursiers

- Pour des raisons de gestion, d'arbitrage ou de couverture de portefeuille, les gérants professionnels utilisent des produits dérivés, et notament des options ou des contrats futures, dont le sous-jacent est précisément un indice boursier.

Exemples :

- Casablanca
- Paris
- New York

Concepts et Généralités

Caractéristiques d'un actif

Remarquons d'abord, que :

- Des actifs combinés constituent un portefeuille ;
- Un portefeuille est un actif ;
- Un portefeuille d'actifs permet de générer un flux de revenus ;
- Un projet est un portefeuille d'actifs.

Concepts et Généralités

Caractéristiques d'un actif

Remarquons d'abord, que :

- Des actifs combinés constituent un portefeuille ;
- Un portefeuille est un actif ;
- Un portefeuille d'actifs permet de générer un flux de revenus ;
- Un projet est un portefeuille d'actifs.

Tout actif à deux caractéristiques fondamentales :

- La rentabilité espérée ;
- Le risque qui lui est afférent.

Concepts et Généralités

Rentabilité

Le concept de rentabilité à des acceptations différentes suivant les investisseurs. Quand nous parlons de la rentabilité obtenue par un investisseur sur une action, nous référons non seulement au dividende net que lui rapporte l'action mais aussi à la plus-value éventuelle qu'il en retire.

P_{t-1} Prix (ou cours) d'achat ;
P_t Prix (cours) à la fin du période ;
$P_t - P_{t-1}$ Plus-value (ou moins-value) durant la période ;
D_t Le dividende encaissé durant la période.
La rentabilité durant la période est donnée par :

$$R_t = \frac{D_t + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Concepts et Généralités

Rentabilité

La rentabilité est exprimée en pourcentage entre tous les flux que génère un actif et son prix d'acquisition.
Il s'agit de la rentabilité brute sans tenir compte d'un avoir fiscal et avant imposition sur le revenu des personnes physiques.

Concepts et Généralités

Rentabilité

La rentabilité est exprimée en pourcentage entre tous les flux que génère un actif et son prix d'acquisition.
Il s'agit de la rentabilité brute sans tenir compte d'un avoir fiscal et avant imposition sur le revenu des personnes physiques.
Si l'on fait abstraction du dividende, on obtient :

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \Longrightarrow P_t = (1 + R_t)P_{t-1}$$

Le prix futur P_t est la valeur capitalisée du prix actuel au taux R_t ;
De même :

$$P_{t-1} = \frac{P_t}{1 + R_t}$$

Le prix actuel P_{t-1} est la valeur actualisée du prix futur.

Concepts et Généralités

Rentabilité

$P_{t-1} = 100\ UM$

$P_t = 105\ UM$

$D_t = 5\ UM$

Alors :

$$R_t = \frac{5 + 105 - 100}{100} = \frac{10}{100} = 0.1 \Longrightarrow R_t = 10\%$$

Concepts et Généralités

Rentabilité

Remarquons que la formulation se fait à l'instant $t-1$, le prix futur à l'instant t et par conséquent la rentabilité dépendent de plusieurs facteurs et événements qui commandent, à l'instant t, l'état de la nature en général et de l'économie en particulier.
Le taux de rentabilité observé n'est pas certain $\Longrightarrow$ Une variable aléatoire (par rapport à l'un des facteurs : situations de l'économie, situations des marchés, variations suivant des périodes de production, variations de la demande,...)
On considère la rentabilité espérée (l'espérance mathématique de la variable aléatoire ainsi définie)

Concepts et Généralités

risque

l'investissement constitue le sacrifice d'un avantage immédiat ou une absence de immédiate en échanges d'avantages futurs !

Concepts et Généralités

risque

l'investissement constitue le sacrifice d'un avantage immédiat ou une absence de immédiate en échanges d'avantages futurs ! Problématique : Le situation au présent est connue avec certitude alors que celle du futur est incertaine ! Est il raisonnable d'échanger des avantages immédiats et certains par d'autres futurs et incertains ?

Concepts et Généralités

risque

l'investissement constitue le sacrifice d'un avantage immédiat ou une absence de immédiate en échanges d'avantages futurs ! Problématique : Le situation au présent est connue avec certitude alors que celle du futur est incertaine ! Est il raisonnable d'échanger des avantages immédiats et certains par d'autres futurs et incertains ?
L'objectif de tout investisseur et de réaliser une certaine rentabilité sur es capitaux qu'il gère. Cependant, à l'instant de la prise de décision, cette rentabilité n'est pas certaine à l'avance ! A la date de l'échéance, la rentabilité **réalisée** peut être différente de celle **espérée** ! !

Concepts et Généralités

risque

Un investisseur cherche à placer 100 000 UM, on lui propose deux possibilités :
- Faire un placement en obligation à 7% ;
- Prendre une contribution dans une société en création et qui a pour objectif de faire de la prospection minière dans le sud du Maroc.

Concepts et Généralités

risque

Un investisseur cherche à placer 100 000 UM, on lui propose deux possibilités :
- Faire un placement en obligation à 7% ;
- Prendre une contribution dans une société en création et qui a pour objectif de faire de la prospection minière dans le sud du Maroc.

Il est claire que la différence entre la rentabilité, effectivement réalisée est préalablement espérée, n'est pas très grande et l'estimation peut être d'une précision très élevée et par conséquent le taux de rentabilité et peu variable.
Par contre, il est difficile de faire une estimation proche de la réalité pour la deuxième proposition ce que peut s'exprimer par une grande variabilité du taux de la rentabilité.

Concepts et Généralités

Risque

Le risque lié à un actif peut, généralement, être défini comme l'incertitude qui existe quant à la valeur de cet actif à une date future et par conséquent, la variabilité ou la dispersion de la rentabilité autour de la valeur espérée.

Concepts et Généralités

Risque

Le risque lié à un actif peut, généralement, être défini comme l'incertitude qui existe quant à la valeur de cet actif à une date future et par conséquent, la variabilité ou la dispersion de la rentabilité autour de la valeur espérée.
Outil statistique de mesure : La variance ou l'écart type (paramètres de dispersion), par rapport à des valeurs enregistrées sur des sous-périodes à définir ou par rapport aux changements de l'environnement.

Concepts et Généralités

Exemples

1) Calculer la rentabilité espérée et sa variabilité (le risque) :

Probabilité p_i (Liée à l'environnement)	Rentabilité R_i
0.1	20%
0.6	15%
0.3	5 %

Concepts et Généralités

Exemples

1) Calculer la rentabilité espérée et sa variabilité (le risque) :

Probabilité p_i (Liée à l'environnement)	Rentabilité R_i
0.1	20%
0.6	15%
0.3	5 %

2)Même question :

Période	1 Trimestre	2T	3T	4T
Rentabilité	+7%	+10%	+2%	-7%

Concepts et Généralités

Remarques

L'approche décrite auparavant est basée sur des hypothèses qui permettent de faire de telle approximations, notamment en considérant que la moyenne des taux de rentabilité sur des sous-périodes (dans le passé) est la rentabilité espérée (dans le futur) et de même pour l'assimilation du risque à l'écart type !

Concepts et Généralités

Remarques

L'approche décrite auparavant est basée sur des hypothèses qui permettent de faire de telle approximations, notamment en considérant que la moyenne des taux de rentabilité sur des sous-périodes (dans le passé) est la rentabilité espérée (dans le futur) et de même pour l'assimilation du risque à l'écart type !
L'hypothèse principale est que la répartition des taux de rentabilité est proche d'une distribution qui suit la loi normale (avec ses propriétés très utiles).

Concepts et Généralités

Diversification

Pour réduite le risque lié à des actifs ou des titres (considérés séparément), les investisseurs ont souvent tendance à constituer des portefeuilles par l'inclusion de plusieurs actifs ou autrement dit : La diversification des investissements.

Concepts et Généralités

Diversification

`Exemple` : Un portefeuille constitué de X_A d'un titre A de rentabilité R_A et de risque σ_A et de X_B d'un titre B de rentabilité R_B et de risque σ_B (remarquons que $X_A + X_B = 100\%$).

La rentabilité ? ?

La moyenne est linéaire donc :

$$R_P = X_A R_A + X_B R_B$$

Concepts et Généralités

Diversification

Par contre, la variance est l'écart type ne sont pas linéaire et on a :

$$VAR(aX + bY) = a^2 VAR(X) + b^2 VAR(Y) + 2abCOV(X, Y)$$

Où $COV(X, Y)$ est la covariance des variables X et Y donnée par :

$$COV(X, Y) = ESP(X - ESP(X))(Y - ESP(Y)) = \sum p_i(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

Où :

$$= \frac{1}{n} \sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

Donc :

$$VAR(P) = X_A^2 VAR(R_A) + X_b^2 VAR(R_B) + 2X_A X_B COV(R_A, R_B)$$

Concepts et Généralités

Diversification

On peut aussi utiliser le coefficient de corrélation, des titres A et B, défini comme le quotient de la covariance par le produit des deux écarts type :

$$CC_{AB} = \frac{COV(R_A, R_B)}{\sigma_{R_A}\sigma_{R_B}}$$

On en déduit une évaluation du risque du portefeuille σ_P par la formule :

$$\sigma_P^2 = X_A^2\sigma_{R_A}^2 + X_b^2\sigma_{R_B}^2 + 2X_AX_B\sigma_{R_A}\sigma_{R_B}CC_{AB}$$

Des cas à étudier :
$CC_{AB} = 1$, $CC_{AB} = -1$, $CC_{AB} = 0$ et le cas général $0 < CC_{AB} < 1$

Concepts et Généralités

Diversification

Exemple: Calcul de l'espérance du retour sur Investissement

Return per $1,000 for two types of investments

$P(X_i Y_i)$	Economic condition	Investment: Passive Fund X	Investment: Aggressive Fund Y
0.2	Recession	- $ 25	- $200
0.5	Stable Economy	+ 50	+ 60
0.3	Expanding Economy	+ 100	+ 350

Caractériser X et Y ainsi que quelques scénarios de portefeuilles.

Concepts et Généralités

Diversification

Lors de votre stage comme consultant analyste junior, votre tuteur professionnel vous communique les informations suivantes relatives au retour annuel prévu pour un investissement de 1000 MAD pour deux actions A_1 et A_2 :

Probabilité	Retour annuel prévu pour un investissement de 1 000 MAD	
	Action A1	**Action A2**
0.2	**-10**	**25**
0.5	**60**	**60**
0.3	**80**	**-70**

Concepts et Généralités

Diversification

1. Calculer le rendement attendu (espérance) et le risque (écart-type) de l'action A_1 ;
2. Calculer le rendement attendu (espérance) et le risque (écart-type) de l'action A_2 ;
3. Quelle est l'action la plus rentable ? Ayant un minimum de risque ?
4. Calculer les coefficients de variation des actions A_1 et A_2 (rendement/ risque). Conclure.
5. Calculer la covariance des deux actions $Cov(A_1, A_2)$. Commenter ;

Concepts et Généralités

Diversification

6. Votre tuteur vous demande d'approfondir votre analyse en constituant un panier d'actions. Utilisant les scénarios suivants :

a. 40% (40% en A_1 et 60% en A_2) ;

b. 50% ;

c. 70%.

Faire les calculs nécessaires (rendement, risque et coefficient de variation) puis, faire un commentaire comparant les différents scénarios.

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

Notons que pour investir dans un actif, l'investisseur évalue l'actif (rentabilité, risque). La rentabilité estimée se définit comme étant la somme d'une rentabilité sans risque et d'une prime de risque lié au risque pris par l'investisseur qui décide de placer son argent dans cet actif plutôt que dans un actif sans risque.

Évaluer la valeur d'un actif revient à estimer, sous des hypothèses objectives, la valeur de marché de cet actif. L'évaluation de la valeur permet de prendre des décisions de vendre (si le prix réel est supérieur à la valeur estimée) ou d'acheter (si le prix réel est inférieur à la valeur estimée).

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

Notons que pour investir dans un actif, l'investisseur évalue l'actif (rentabilité, risque). La rentabilité estimée se définit comme étant la somme d'une rentabilité sans risque et d'une prime de risque lié au risque pris par l'investisseur qui décide de placer son argent dans cet actif plutôt que dans un actif sans risque.

Évaluer la valeur d'un actif revient à estimer, sous des hypothèses objectives, la valeur de marché de cet actif. L'évaluation de la valeur permet de prendre des décisions de vendre (si le prix réel est supérieur à la valeur estimée) ou d'acheter (si le prix réel est inférieur à la valeur estimée).

Les premiers essaies d'évaluation ont été basée sur des hypothèses simples du genre : **Le prix d'un actif est égal à la somme des actualisations des flux générés !**

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

Exemple:

Quel il est le prix actuel P_t d'un actif qui générera les flux : $D_{t+1} = 70$ et $D_{t+2} = 120$?

Le taux de rentabilité est $r = 5\%$.

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

`Exemple:`

Quel il est le prix actuel P_t d'un actif qui générera les flux :
$D_{t+1} = 70$ et $D_{t+2} = 120$?
Le taux de rentabilité est $r = 5\%$.
Actualisation de D_{t+1} : $\longrightarrow = \frac{D_{t+1}}{1+r} = \frac{70}{1.05} = 66.667$
Actualisation de D_{t+2} : $\longrightarrow = \frac{D_{t+1}}{(1+r)^2} = \frac{120}{(1.05)^2} = 108.843$
Le prix actual évalué est : $P_t = 66.667 + 108.843 = 175.51$.

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

`Modèle de Durand:`

Évaluation du prix P_0 sur la base des dividendes D_i et du prix de vente P_n sur une période bien déterminer :

$$P_0 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{D_k}{(1+r)^k} + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

`Modèle de Durand:`

Évaluation du prix P_0 sur la base des dividendes D_i et du prix de vente P_n sur une période bien déterminer :

$$P_0 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{D_k}{(1+r)^k} + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

Si on considère une que la durée est illimitée (l'actif n'est jamais vendu !) :

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

`Modèle de Durand:`

Évaluation du prix P_0 sur la base des dividendes D_i et du prix de vente P_n sur une période bien déterminer :

$$P_0 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{D_k}{(1+r)^k} + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

Si on considère une que la durée est illimitée (l'actif n'est jamais vendu !) :

$$P_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{D_k}{(1+r)^k}$$

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

`Modèle de Gordon-Shapiro:`

Ce modèle s'obtient à partir du 1er en ajoutant l'hypothèse suivant : Les dividendes ont une croissance constante (avec un taux noté g) c'est à dire $D_k = (1+g)^{k-1}D_1$ et par conséquent :

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

`Modèle de Gordon-Shapiro:`

Ce modèle s'obtient à partir du 1er en ajoutant l'hypothèse suivant : Les dividendes ont une croissance constante (avec un taux noté g) c'est à dire $D_k = (1+g)^{k-1}D_1$ et par conséquent :

$$P_0 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(1+g)^{k-1}D_1}{(1+r)^k} + \frac{P_n}{(1+r)^n} = \frac{D_1}{1+r}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{k-1} + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{1+r}\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n}{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)}\right] + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

Modèle de Gordon-Shapiro:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+r)\left(1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)\right)}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n\right] + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{r-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n\right] + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

`Modèle de Gordon-Shapiro:`

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+r)\left(1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)\right)}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n\right]+\frac{P_n}{(1+r)^n}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{r-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n\right]+\frac{P_n}{(1+r)^n}$$

Si, en plus, on considère que la durée est illimitée (l'actif n'est jamais vendu !) et que $g < r$ alors :

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

Modèle de Gordon-Shapiro:

$$P_0 = \frac{D_1}{(1+r)\left(1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)\right)}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n\right] + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

$$P_0 = \frac{D_1}{r-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n\right] + \frac{P_n}{(1+r)^n}$$

Si, en plus, on considère que la durée est illimitée (l'actif n'est jamais vendu !) et que $g < r$ alors :

$$P_0 = \frac{D_1}{r-g}$$

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

`Exemple:`

Un actif génère un dividende de 15 qui croit au taux constant 5%. L'actif sera revendu au bout de 5 ans au prix de 45. Déterminer son prix d'équilibre actuel par le modèle de Gordon-Shapiro sachant que $r = 7\%$.

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

`Exemple:`

Un actif génère un dividende de 15 qui croit au taux constant 5%. L'actif sera revendu au bout de 5 ans au prix de 45. Déterminer son prix d'équilibre actuel par le modèle de Gordon-Shapiro sachant que $r = 7\%$.

Réponse : $P_0 = 99.60$

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

`Exemple:`

Un actif génère un dividende de 15 qui croit au taux constant 5%. L'actif sera revendu au bout de 5 ans au prix de 45. Déterminer son prix d'équilibre actuel par le modèle de Gordon-Shapiro sachant que $r = 7\%$.

Réponse : $P_0 = 99.60$

Quelle la valeur de P_0 si on suppose que l'actif sera revendu après 2 ans à 45 ?

Exemple élémentaire de modélisation en finance

Évaluation d'un actif

`Exemple:`
Un actif génère un dividende de 15 qui croit au taux constant 5%. L'actif sera revendu au bout de 5 ans au prix de 45. Déterminer son prix d'équilibre actuel par le modèle de Gordon-Shapiro sachant que $r = 7\%$.
Réponse : $P_0 = 99.60$
Quelle la valeur de P_0 si on suppose que l'actif sera revendu après 2 ans à 45 ?
Quelle la valeur de P_0 si on suppose que l'actif n'est jamais vendu ?

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Position du problème:

H. Markowitz a proposé d'exprimer pour chaque titre la rentabilité par l'espérance des rendements et le risque par la variance des rendements.

- L'investisseur cherche à constituer un portefeuille en combinant plusieurs titres.

- Objectif : obtenir un rendement maximum pour un risque minimum.

L'agent essaye :

- Demaximiser la rentabilité espérée du portefeuille avec une variance donnée ;

ou

- De minimiser la variance du portefeuille avec un taux de

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Hypothèses:

H_1 La rentabilité des titres suivent la loi normale : le premier et le second moments, c'est-à-dire la moyenne et l'écart-type, résument les caractéristiques des distributions ;

H_2 Les investisseurs sont averses au risque. Comparent la rentabilité qu'ils peuvent espérer obtenir et le risque qu'ils prennent : $\Rightarrow$ Fonction d'utilité associant un score croissant avec le return et décroissant avec le risque.

H_3 L'investisseur effectue des décisions pour chaque période. Le modèle de base est monopériodique.

H_4 L'intégralité de la richesse est investie pour la constitution du portefeuille.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Comment constituer le portefeuille qui est le **"meilleur"** ?
Un Portefeuille constituer de n actifs A_k (valeurs) est donné par :

$$P = \sum_{k=1}^{k=n} x_k A_k \qquad \sum_{k=1}^{k=n} x_k = 1$$

De même qu'un actif, Tout portefeuille P est défini complètement par sa rentabilité espérée R_p et la variance σ_P^2 ou l'écart-type σ_P de sa rentabilité.
Le problème ainsi défini peut être formuler de deux manières :

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

$$P_{min} \begin{cases} \text{Minimiser le risque } \sigma_P \\ \text{ sous contraintes} \\ \text{ un niveau de rentabilité fixé } R_P = R_P^* \quad \text{et } \sum_{k=1}^{k=n} x_k = 1 \end{cases}$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

$$P_{min} \begin{cases} \text{Minimiser le risque } \sigma_P \\ \text{ sous contraintes} \\ \text{ un niveau de rentabilité fixé } R_P = R_P^* \quad \text{et } \sum_{k=1}^{k=n} x_k = 1 \end{cases}$$

ou

$$P_{max} \begin{cases} \text{Maximiser la rentabilité } R_P \\ \text{ sous contraintes} \\ \text{ un niveau de risque fixé } \sigma_P = \sigma_P^* \quad \text{et } \sum_{k=1}^{k=n} x_k = 1) \end{cases}$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

On a :

$$P = \sum_{k=1}^{k=n} x_k A_k$$

Donc :

$$R_p = \sum_{k=1}^{k=n} x_k R_{A_k}$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

On suppose que les "return" des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres : ils sont corrélés ou, ce qui revient au même, ont des covariances non nulles $Cov(A_k, A_{k'}) \neq 0$, on a :

$$\sigma_P^2 = \sum_{k=1}^{k=n} x_k^2 \sigma_{A_k}^2 + 2 \sum_{1 \leq k < k' \leq n} x_k x_{k'} Cov(A_k, A_{k'})$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{k'=1}^{k'=n} x_k x_{k'} Cov(A_k, A_{k'})$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

L'écriture matricielle est plus adaptée à des utilisation pratiques.

Notons :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Et soit $C = (c_{kk'})$ la matrice des covariances donnée par :

$$\begin{pmatrix} Cov(A_1, A_1) & Cov(A_1, A_2) & \cdots & Cov(A_1, A_n) \\ Cov(A_2, A_1) & Cov(A_2, A_2) & \cdots & Cov(A_2, A_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(A_n, A_1) & Cov(A_n, A_2) & \cdots & Cov(A_n, A_n) \end{pmatrix}$$

ou d'une manière équivalente :

$$\begin{pmatrix} \sigma^2_{A_1} & Cov(A_1, A_2) & \cdots & Cov(A_1, A_n) \\ Cov(A_2, A_1) & \sigma^2_{A_2} & \cdots & Cov(A_2, A_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(A_n, A_1) & Cov(A_n, A_2) & \cdots & \sigma^2_{A_n} \end{pmatrix}$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Par conséquent, la variance du portefeuille s'écrit :

$$\sigma_P^2 = X^T C X$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Par conséquent, la variance du portefeuille s'écrit :

$$\sigma_P^2 = X^T C X$$

Remarquons que la covariance est symétrique :
$Cov(A_k, A_{k'}) = Cov(A_{k'}, A_k)$ et que $cov(A_k, A_k) = \sigma_{A_k}^2$.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Par conséquent, la variance du portefeuille s'écrit :

$$\sigma_P^2 = X^T CX$$

Remarquons que la covariance est symétrique :
$Cov(A_k, A_{k'}) = Cov(A_{k'}, A_k)$ et que $cov(A_k, A_k) = \sigma_{A_k}^2$.

Avec les données relatives aux modèle, plusieurs méthodes d'optimisation peuvent etre utilisées et plusieurs variantes de fonctions économiques à optimiser peuvent être introduites, par exemple :

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Le Lagrangian du problème P_{min} prend la forme :

$$L = \underbrace{\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{k'=1}^{k'=n} x_k x_{k'} Cov(A_k, A_{k'})}_{\text{fonction à optimiser}} + \lambda_1 (\underbrace{\sum_{k=1}^{k=n} x_k R_{A_k} - R_P^*}_{\text{contrainte}}) + \lambda_2 (\underbrace{\sum_{k=1}^{k=n} x_k - 1}_{\text{contrainte}})$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Le Lagrangian du problème P_{min} prend la forme :

$$L = \underbrace{\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{k'=1}^{k'=n} x_k x_{k'} Cov(A_k, A_{k'})}_{\text{fonction à optimiser}} + \lambda_1(\underbrace{\sum_{k=1}^{k=n} x_k R_{A_k} - R_P^*}_{\text{contrainte}}) + \lambda_2(\underbrace{\sum_{k=1}^{k=n} x_k - 1}_{\text{contrainte}})$$

Les conditions d'optimalité (1er ordre) :

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0 \qquad k = 1, \cdots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

$$\begin{cases}
2x_1 Var(A_1) + \cdots + \overset{\underbrace{2x_k Cov(A_1, A_k)}_{\downarrow}}{} + \cdots + 2x_n Cov(A_1, A_n) + \lambda_1 R_{A_1} + \lambda_2 = 0 \\
\vdots \\
2x_1 Cov(A_k, A_1) + \cdots + \overset{\underbrace{2x_k Var(A_k)}_{\downarrow}}{} + \cdots + 2x_n Cov(A_k, A_n) + \lambda_1 R_{A_k} + \lambda_2 = 0 \\
\vdots \\
2x_1 Cov(A_n, A_1) + \cdots + \overset{\underbrace{2x_k Cov(A_n, A_k)}_{\downarrow}}{} + \cdots + 2x_n Var(A_n) + \lambda_1 R_{A_n} + \lambda_2 = 0 \\
x_1 R_{A_1} + \cdots + x_k R_{A_k} + \cdots + x_n R_{A_n} - R_P^* = 0 \\
x_1 + x_2 + \cdots + x_k + \cdots + x_n - 1 = 0
\end{cases}$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Formulation matricielle :

$$AX = B$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Formulation matricielle :

$$AX = B$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2Var(A_1) & 2Cov(A_1, A_2) & \cdots & 2Cov(A_1, A_n) & R_{A_1} & 1 \\ 2Cov(A_2, A_1) & 2Var(A_2) & \cdots & 2Cov(A_2, A_n) & R_{A_2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2Cov(A_n, A_1) & 2Cov(A_n, A_2) & \cdots & 2Var(A_n) & R_{A_n} & 1 \\ R_{A_1} & R_{A_2} & \cdots & R_{A_n} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

et :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_P^* \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si A est inversible alors :

$$X = A^{-1}B$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

`Exemple2:`

Maximiser la fonction économique : $Z = \Phi R_P - \sigma_P^2$ sous la contrainte $\sum_{k=1}^{k=n} x_k = 1$ où Φ est un paramètre qui représente le degré d'aversion au risque des investisseurs. Le Lagrangian est donné par :

$$L = \underbrace{\Phi \sum_{k=1}^{k=n} x_k R_{A_k} - \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{k'=1}^{k'=n} x_k x_{k'} Cov(A_k, A_{k'})}_{\text{fonction à optimiser}} + \lambda\underbrace{(1 - \sum_{k=1}^{k=n} x_k)}_{\text{contrainte}}$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

La formulation des conditions d'optimalité donne l'équation matricielle suivant :

$$AX = B$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2Var(A_1) & 2Cov(A_1, A_2) & \cdots & 2Cov(A_1, A_n) & 1 \\ 2Cov(A_2, A_1) & 2Var(A_2) & \cdots & 2Cov(A_2, A_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2Cov(A_n, A_1) & 2Cov(A_n, A_2) & \cdots & 2Var(A_n) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

et :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \Phi R_{A_1} \\ \Phi R_{A_2} \\ \vdots \\ \Phi R_{A_k} \\ \vdots \\ \Phi R_{A_n} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si A est inversible alors :

$$X = A^{-1}B$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

L'approche de Markowitz permet de donner au concept de diversification une signification rigoureuse : **atténuation du risque par la combinaison au sein du portefeuille de plusieurs actifs financiers**

Le concept d'efficience permet d'énoncer la proposition suivante : **pour tout investisseur, le portefeuille d'utilité maximale, qu'il choisit s'il est rationnel, est un portefeuille optimalement diversifié.**

En effet, ce portefeuille présente le return attendu le plus élevé qu'il est possible d'obtenir pour le niveau de risque que est celui de ce portefeuille. C'est pourquoi Markowitz a parlé de **diversification efficiente**

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

On remarque que lorsque le nombre d'actifs dans un portefeuille augmente, le risque afférent au portefeuille baisse ce qui traduit l'effet de la diversification. Toutefois, à un certain niveau le risque cesse de baisser.

La diversification du portefeuille c'est l'investissement dans différentes classes d'actifs ou dans différents secteurs, cette diversification ne signifie pas seulement détenir beaucoup d'actifs.

La diversification à des limites (Théoriques et pratiques) :

Théoriques : Il est difficile de calculer l'inverse d'une matrice que grande taille.

Pratiques : Il existe deux type de risque :

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle de Markowitz

Le risque spécifique appelé également risque intrinsèque ou risque non systématique.
Il est indépendant des phénomènes qui affectent l'ensemble des titres. Il est inhérent aux caractéristiques fondamentales de l'entreprise (par exemple : la mauvaise gestion de l'entreprise, les grèves...). **Ce risque est diversifié et donc susceptible d'être éliminé par la diversification.**
Le risque systématique : On l'appelle également risque non diversifiable ou encore, risque du marché.
Il est lié aux structures du marché. Il résulte des périls qui peuvent affecter l'ensemble de l'économie tels que les variations du PIB, l'inflation, les taux d'intérêt.
C'est un risque structurel qui ne peut pas être éliminé par la

Modèles Mathématiques de la finance

Le portefeuille du marché

Dans chaque marché, il existe un portefeuille dit portefeuille du marché. Ce portefeuille inclut tous les actions qui s'échangent sur le marché.

Soit un marché où il y a n actions. Le vecteur μ est celui de la rentabilité espérée. Σ est la matrice des variances-covariances. Les quantités d'actions échangées sont n_1, n_2, $\cdots$ et n_n. Les cours des actions sont P_1,P_2, $\cdots$ et P_n.

La capitalisation du marché est $Cap = \sum_{k=1}^{k=n} P_k n_k$.

Le portefeuille du marché est celui incluant tous les actions tel que $x_k = P_k \times n_k / cap$.

Ce portefeuille aura une rentabilité

Le portefeuille du marché est un **portefeuille référentiel**.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Le modèle de Markowitch prend en considération la totalité des actifs et demande le calcul d'un nombre élevé de variances/covariances.Or, dans la réalité, les cours sont principalement affectés par un certain nombre de facteurs commun à tous les titres.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Le modèle de Markowitch prend en considération la totalité des actifs et demande le calcul d'un nombre élevé de variances/covariances.Or, dans la réalité, les cours sont principalement affectés par un certain nombre de facteurs commun à tous les titres.
La gestion de portefeuille nécessite la simplification de la réalité en mettant en évidence la réaction des titres à un certain nombre de facteurs communs.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Sharpe (1964) : Le modèle du marché qui est un modèle à un facteur (facteur du marché) : Hypothèse : Les fluctuations des cours d'un titre coté sur un marché (et par conséquent sa rentabilité) dépend de deux sources :

- L'influence du marché
- Des causes purement spécifiques à chacune des sociétés émettrices des titres.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Sharpe (1964) : Le modèle du marché qui est un modèle à un facteur (facteur du marché) : Hypothèse : Les fluctuations des cours d'un titre coté sur un marché (et par conséquent sa rentabilité) dépend de deux sources :

- L'influence du marché
- Des causes purement spécifiques à chacune des sociétés émettrices des titres.

Remarque: cette hypothèse est très forte, car elle suppose que le facteur marché et le seul facteur en commun pour tous les titres et par conséquent, les causes spécifiques des titres sont indépendantes (du marché et entre elles).

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

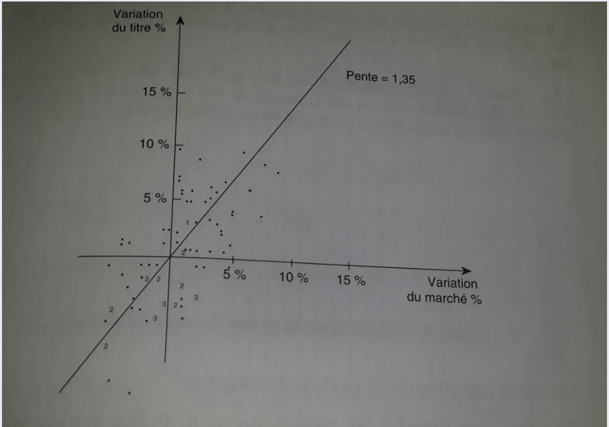


Figure 4.1 – *Droite de régression de l'action Peugeot*

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

La pente de la droite de regression représente la sensibilité au marché du titre (volatilité par rapport au marché).
Tous les points sont proche $\rightarrow$ caractère systématique de la rentabilité du titre.
Tous les points ne sont pas sur la droite $\rightarrow$ caractère non systématique d'une partie de la rentabilité du titre.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Le modèle est décrit par l'équation suivante :

$$R_{kt} = \alpha_k + \beta_k R_{mt} + \varepsilon_{kt}$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Le modèle est décrit par l'équation suivante :

$$R_{kt} = \alpha_k + \beta_k R_{mt} + \varepsilon_{kt}$$

R_{kt} Rentabilité du titre k, pendant la période t.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Le modèle est décrit par l'équation suivante :

$$R_{kt} = \alpha_k + \beta_k R_{mt} + \varepsilon_{kt}$$

R_{kt} Rentabilité du titre k, pendant la période t.
R_{mt} Rentabilité du marché mesurée par un indice général pendant la période t.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Le modèle est décrit par l'équation suivante :

$$R_{kt} = \alpha_k + \beta_k R_{mt} + \varepsilon_{kt}$$

R_{kt} Rentabilité du titre k, pendant la période t.
R_{mt} Rentabilité du marché mesurée par un indice général pendant la période t.
β_k paramètre propre à chaque titre k et qui indique la relation qui existent entre les fluctuations du titre k et celle de l'indice général du marché (volatilité ou coefficient β).

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Le modèle est décrit par l'équation suivante :

$$R_{kt} = \alpha_k + \beta_k R_{mt} + \varepsilon_{kt}$$

R_{kt} Rentabilité du titre k, pendant la période t.
R_{mt} Rentabilité du marché mesurée par un indice général pendant la période t.
β_k paramètre propre à chaque titre k et qui indique la relation qui existent entre les fluctuations du titre k et celle de l'indice général du marché (volatilité ou coefficient β).
ε_{kt} paramètre spécifique à l'action k.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Le modèle est décrit par l'équation suivante :

$$R_{kt} = \alpha_k + \beta_k R_{mt} + \varepsilon_{kt}$$

R_{kt} Rentabilité du titre k, pendant la période t.
R_{mt} Rentabilité du marché mesurée par un indice général pendant la période t.
β_k paramètre propre à chaque titre k et qui indique la relation qui existent entre les fluctuations du titre k et celle de l'indice général du marché (volatilité ou coefficient β).
ε_{kt} paramètre spécifique à l'action k.
α_k paramètre dont la valeur est telle que la valeur espérée de ε_{kt} est nulle (ou valeur espérée de R_{kt} lorsque R_{mt} est nulle).

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Le modèle a trois paramètres : α, β et ε :

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Le modèle a trois paramètres : α, β et ε :
β exprime la sensibilité des fluctuations de la valeur à celle de l'indice :

$$\beta_k = \frac{\sigma_{km}}{\sigma_m^2} = \frac{Cov(R_k, R_m}{Var(R_m)}$$

Ce coefficient est souvent positif sauf dans des cas très spécifiques.
Trois cas à discuter $\beta_k = 1$, $\beta_k < 1$ et $\beta_k > 1$.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Le modèle a trois paramètres : α, β et ε :
β exprime la sensibilité des fluctuations de la valeur à celle de l'indice :

$$\beta_k = \frac{\sigma_{km}}{\sigma_m^2} = \frac{Cov(R_k, R_m}{Var(R_m)}$$

Ce coefficient est souvent positif sauf dans des cas très spécifiques.
Trois cas à discuter $\beta_k = 1$, $\beta_k < 1$ et $\beta_k > 1$.
α intersection de la droite de regression avec l'axe des ordonnées, il exprime donc la rentabilité qui aurait pu être obtenue sur le titre si la rentabilité du marché avait été nulle :

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

$$\alpha_k = E(R_{kt}) - \beta_k E(R_{mt})$$

Ce coefficient peut être de signe quelconque et ses valeurs ne sont pas stables d'une période à l'autre d'ou le fait que son importance est mineure dans le cadre de ce modèle.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

$$\alpha_k = E(R_{kt}) - \beta_k E(R_{mt})$$

Ce coefficient peut être de signe quelconque et ses valeurs ne sont pas stables d'une période à l'autre d'ou le fait que son importance est mineure dans le cadre de ce modèle.

ε est une variable aléatoire résiduelle ; sont écart type constitue une mesure de risque spécifique.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

$$\alpha_k = E(R_{kt}) - \beta_k E(R_{mt})$$

Ce coefficient peut être de signe quelconque et ses valeurs ne sont pas stables d'une période à l'autre d'ou le fait que son importance est mineure dans le cadre de ce modèle.

ε est une variable aléatoire résiduelle ; sont écart type constitue une mesure de risque spécifique.

En statistique en utilise aussi le coefficient de détermination ρ^2 qui est égal au carrée du coefficient de correlation entre le titre k et le marché. Il nous renseigne sur la possibilité d'expliquer les variations des titres par les variations du marché.

Modèles Mathématiques de la finance

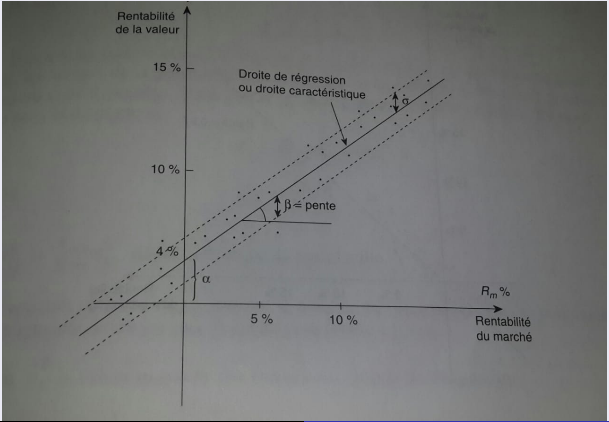
Modèle du marché

Selon le modèle du marché, la rentabilité est décomposée en deux parties : une systémique (dépend du marché) et une autre non systémique (caractéristiques spécifiques) et par conséquent, le risque peut être décomposé aussi en deux parties :
Risque systémique : $\beta_k \sigma_m$ ou σ_m est l'écart type du taux de rentabilité du marché.
Risque non systémique (spécifique) : $\sigma_{\varepsilon k}$ l'écart type du facteur résiduel.
Risque total est donnée par : $\sigma_k^2 = \beta_k^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon k}^2$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché

Les paramètre du modèle de marché sont sur la figure suivante :



Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché et diversification

Le risque d'un portefeuille dépend des facteurs suivants :
- Le risque de chaque titre constituant le portefeuille ;
- Le degré d'indépendance des variations des titres (entre ils) ;
- Le nombre de titres dans le portefeuille.

Un portefeuille constitue de N titres (investissement à part égal), si on suppose que les valeurs résiduelle ε_k sont indépendantes entre elles, le risque ou la variance d'un portefeuille dépend aussi de deux composantes :

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon P}^2$$

avec : $\beta_P = \frac{1}{N} \sum_k \beta_k$ et $\sigma_{\varepsilon P}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_k \sigma_{\varepsilon_k} = \frac{1}{N} \overline{\sigma}_{\varepsilon}^2$
$\overline{\sigma}_{\varepsilon}^2$ la valeur moyenne des risques individuels de chaque titre.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle du marché et diversification

Le modèle de marché a à son tour des limites :
- Utilisation des donnée statistiques sur des périodes passées pour calculer les paramètres utilisés dans les projections futures (intervention d'un évènement exceptionnel).
L'Hypothèse utilisée (facteur marché comme seul facteur) est forte et réductrice de la réalité qui est bien complexe.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles à plusieurs facteurs

Formulation :

$$R_{kt} = \alpha_k + \beta_{1k} f_{1k} + \beta_{2k} f_{2k} + \cdots + \beta_{jk} f_{jk}$$

Facteurs statistiques
Facteurs Macroéconomiques
Facteurs caractéristiques

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Une option financière est un produit dérivé, contrat entre deux parties, qui donne à l'acheteur le droit (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) :

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Une option financière est un produit dérivé, contrat entre deux parties, qui donne à l'acheteur le droit (le vendeur est en revanche tenu de se plier à la décision de l'acheteur) :
- d'acheter (option d'achat, appelée aussi call), ou
- de vendre (option de vente, appelée aussi put),
une quantité donnée d'un actif sous-jacent (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, fonds, inflation, etc.) à un prix (en général) précisé à l'avance (prix d'exercice ou strike en anglais), à une date d'échéance donnée (option dite européenne), ou durant toute la période jusqu'à échéance (option dite américaine), avec un mode de règlement fixé à l'avance (livraison du sous-jacent ou seulement du montant équivalent).

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Ce droit lui-même se négocie contre un certain prix, appelé prime, ou premium.

Les options s'échangent à la fois sur des marchés d'options spécialisés au sein de bourses, et sur les marchés de gré à gré.

Une option est dite :

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Ce droit lui-même se négocie contre un certain prix, appelé prime, ou premium.

Les options s'échangent à la fois sur des marchés d'options spécialisés au sein de bourses, et sur les marchés de gré à gré.

Une option est dite :

- dans la monnaie (in the money ou ITM) lorsque son prix d'exercice est inférieur au prix de son actif sous-jacent (pour un call) ou supérieur au prix de son actif sous-jacent (pour un put) ;
- hors de la monnaie (out of the money ou OTM) dans le cas contraire ;
- à la monnaie (at the money ou ATM) si le prix d'exercice est égal au cours actuel de l'actif sous-jacent de l'option.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Ce droit lui-même se négocie contre un certain prix, appelé prime, ou premium.
Les options s'échangent à la fois sur des marchés d'options spécialisés au sein de bourses, et sur les marchés de gré à gré.
Une option est dite :
- dans la monnaie (in the money ou ITM) lorsque son prix d'exercice est inférieur au prix de son actif sous-jacent (pour un call) ou supérieur au prix de son actif sous-jacent (pour un put) ;
- hors de la monnaie (out of the money ou OTM) dans le cas contraire ;
- à la monnaie (at the money ou ATM) si le prix d'exercice est égal au cours actuel de l'actif sous-jacent de l'option.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

- acheter des calls pour jouer (ou se protéger d') une hausse du cours de l'actif sous-jacent ou de la volatilité (écart type) ou une combinaison des deux ,

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

- acheter des calls pour jouer (ou se protéger d') une hausse du cours de l'actif sous-jacent ou de la volatilité (écart type) ou une combinaison des deux ,

- acheter des puts pour jouer (ou se protéger d') une baisse du cours de l'actif sous-jacent ou une hausse de la volatilité ou une combinaison des deux,

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

- acheter des calls pour jouer (ou se protéger d') une hausse du cours de l'actif sous-jacent ou de la volatilité (écart type) ou une combinaison des deux ,
- acheter des puts pour jouer (ou se protéger d') une baisse du cours de l'actif sous-jacent ou une hausse de la volatilité ou une combinaison des deux,
- vendre des calls pour jouer une baisse de l'actif sous-jacent ou de la volatilité ou une combinaison des deux,

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

- acheter des calls pour jouer (ou se protéger d') une hausse du cours de l'actif sous-jacent ou de la volatilité (écart type) ou une combinaison des deux ,
- acheter des puts pour jouer (ou se protéger d') une baisse du cours de l'actif sous-jacent ou une hausse de la volatilité ou une combinaison des deux,
- vendre des calls pour jouer une baisse de l'actif sous-jacent ou de la volatilité ou une combinaison des deux,
- vendre des puts pour jouer une hausse de l'actif sous-jacent ou une baisse de la volatilité ou une combinaison des deux

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

- acheter des calls pour jouer (ou se protéger d') une hausse du cours de l'actif sous-jacent ou de la volatilité (écart type) ou une combinaison des deux ,
- acheter des puts pour jouer (ou se protéger d') une baisse du cours de l'actif sous-jacent ou une hausse de la volatilité ou une combinaison des deux,
- vendre des calls pour jouer une baisse de l'actif sous-jacent ou de la volatilité ou une combinaison des deux,
- vendre des puts pour jouer une hausse de l'actif sous-jacent ou une baisse de la volatilité ou une combinaison des deux

stabilité du marché $\rightarrow$ récupérer la prime.

Si l'option n'a pas été exercée à la date d'échéance, elle est dite **abandonnée**.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Dans la suite de l'article, nous utiliserons les notations suivantes :

K : le prix d'exercice de l'option (strike)

S : le prix du sous-jacent

p : la prime de l'option

R : le résultat à l'échéance

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Dans la suite de l'article, nous utiliserons les notations suivantes :
K : le prix d'exercice de l'option (strike)
S : le prix du sous-jacent
p : la prime de l'option
R : le résultat à l'échéance
Le résultat d'une option à son échéance (pay off : Ce que va toucher son détenteur) ne dépend que du prix du sous-jacent.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Dans la suite de l'article, nous utiliserons les notations suivantes :
K : le prix d'exercice de l'option (strike)
S : le prix du sous-jacent
p : la prime de l'option
R : le résultat à l'échéance
Le résultat d'une option à son échéance (pay off : Ce que va toucher son détenteur) ne dépend que du prix du sous-jacent. Pour un call, il est égal au maximum entre 0 et le prix du sous-jacent diminué du prix d'exercice : $\max(0, S - K)$.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Dans la suite de l'article, nous utiliserons les notations suivantes :
K : le prix d'exercice de l'option (strike)
S : le prix du sous-jacent
p : la prime de l'option
R : le résultat à l'échéance
Le résultat d'une option à son échéance (pay off : Ce que va toucher son détenteur) ne dépend que du prix du sous-jacent.
Pour un call, il est égal au maximum entre 0 et le prix du sous-jacent diminué du prix d'exercice : $\max(0, S - K)$.
Pour un put, il est égal au maximum entre 0 et le prix d'exercice diminué du prix du sous-jacent : $\max(0, K - S)$.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Dans la suite de l'article, nous utiliserons les notations suivantes :
K : le prix d'exercice de l'option (strike)
S : le prix du sous-jacent
p : la prime de l'option
R : le résultat à l'échéance
Le résultat d'une option à son échéance (pay off : Ce que va toucher son détenteur) ne dépend que du prix du sous-jacent.
Pour un call, il est égal au maximum entre 0 et le prix du sous-jacent diminué du prix d'exercice : $\max(0, S - K)$.
Pour un put, il est égal au maximum entre 0 et le prix d'exercice diminué du prix du sous-jacent : $\max(0, K - S)$.
Pour calculer le résultat global de l'opération, il faut en outre tenir compte de la prime payée pour acquérir l'option :

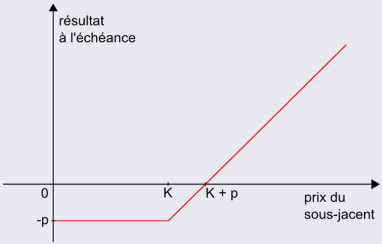
Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

On en déduit que le résultat pour un acheteur d'un call est :

$$R_{call}^{acheteur} = \max(0, S - K) - p$$

et le profit réalisé sur cette opération dépend du prix du sous-jacent :



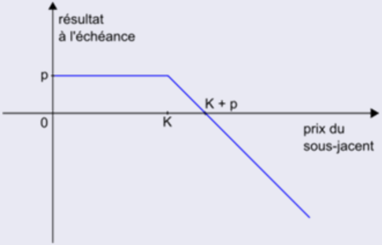
Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Tandis que le résultat pour un vendeur d'un call est donnée par :

$$R_{call}^{vendeur} = \max(0, K - S) + p = -\max(0, S - K) + p$$

et le profit réalisé sur cette opération dépend du prix du sous-jacent :



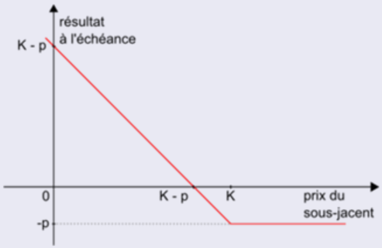
Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Le résultat pour un acheteur d'un put est :

$$R_{put}^{acheteur} = \max(0, K - S) - p$$

et le profit réalisé sur cette opération dépend du prix du sous-jacent :



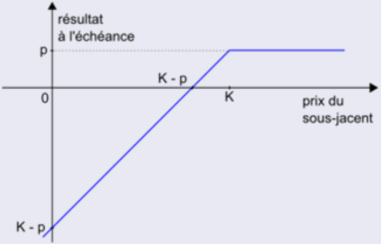
Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Tandis que le résultat pour un vendeur d'un put est donnée par :

$$R_{put}^{vendeur} = \max(0, S - K) + p = -\max(0, K - S) + p$$

et le profit réalisé sur cette opération dépend du prix du sous-jacent :



Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

`Exemple` (tiré de la littérature) : Imaginons un raffineur OIL qui, au 1er janvier, sait que, pour son activité, il devra acheter au 30 juin, 1000000 de barils de pétrole brut. Ce jour-là, le 1er janvier, le pétrole brut s'échange sur le marché à 50 par baril. Or, OIL anticipe une forte reprise économique ayant pour conséquence une hausse des prix du pétrole. Au-delà de 60 par baril, OIL commence à perdre de l'argent. Il décide donc d'utiliser sa trésorerie pour acheter 1000000 de calls de prix d'exercice 60 de date d'échéance le 30 juin, et de prime 4 par baril. Que va-t-il se passer au 30 juin ?

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

`Exemple` (tiré de la littérature) : Imaginons un raffineur OIL qui, au 1er janvier, sait que, pour son activité, il devra acheter au 30 juin, 1000000 de barils de pétrole brut. Ce jour-là, le 1er janvier, le pétrole brut s'échange sur le marché à 50 par baril. Or, OIL anticipe une forte reprise économique ayant pour conséquence une hausse des prix du pétrole. Au-delà de 60 par baril, OIL commence à perdre de l'argent. Il décide donc d'utiliser sa trésorerie pour acheter 1000000 de calls de prix d'exercice 60 de date d'échéance le 30 juin, et de prime 4 par baril. Que va-t-il se passer au 30 juin ?
Scénarios : 38, 53, 62 et 90
38 $\rightarrow$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Au moment de la vente de l'option, le cours S qui est en fonction de l'échéance T est inconnu et deux questions se posent :

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Au moment de la vente de l'option, le cours S qui est en fonction de l'échéance T est inconnu et deux questions se posent :
- Quel est le juste prix de l'option ? Autrement dit comment évaluer à l'instant $t = 0$ une richesse $(S(T) - K)_+$ disponible à la date T ? (Problème de pricing).

Modèles Mathématiques de la finance

Modèles d'évaluation d'options

Au moment de la vente de l'option, le cours S qui est en fonction de l'échéance T est inconnu et deux questions se posent :
- Quel est le juste prix de l'option ? Autrement dit comment évaluer à l'instant $t = 0$ une richesse $(S(T) - K)_+$ disponible à la date T ? (Problème de pricing).
- Comment le vendeur d'un Call, qui touche la prime à l'instant 0, parviendra t-il à produire la richesse $(S(T)\breve{}K)_+$ à la date T ? (Problème de la Couverture).
avec :

$$(S(T) - K)_+ = \max(0, S(T) - K)$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle binomial

- Le prix des différents actifs reflète à tout moment toute l'information disponible.
- Tout le monde possède la même information tout le monde doit pouvoir accéder au marché et il n'existe pas de coûts de transaction (commissions, frais de courtage.)
- tous les actifs sont supposés parfaitement divisibles et liquides.
- Le taux de placement est le même que le taux d'emprunt, on l'appelle le taux sans risque r.
- la vente à découvert est autorisée.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle binomial

`Valorisation sur une période:` Le premier produit financier est un actif A. On considère un call, sur l'actif A de prix S_0 en $t = 0$, dont la valeur est C. L'option arrive à maturité en $t = T$, et le sous-jacent A ne peut évoluer que de deux façons :

$$\begin{cases} \text{augmenter pour atteindre } uS_0, \text{avec une probabilité } p \\ \text{baisser pour atteindre } dS_0, \text{avec une probabilité } 1-p, \end{cases}$$

C'est-à-dire : On supposera en outre que les variations dans le prix de l'action sont régies par la règle suivante. Étant donné le prix $S(t)$ à l'instant t, le prix à l'instant $t+1$ ne peut prendre que deux valeurs distinctes, à savoir $S(t+1) = uS(t)$, ou $S(t+1) = dS(t)$, où $0 < d < u$ sont deux paramètres que l'on suppose connus.

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle binomial

`Valorisation sur une période:` Le premier produit financier est un actif A. On considère un call, sur l'actif A de prix S_0 en $t = 0$, dont la valeur est C. L'option arrive à maturité en $t = T$, et le sous-jacent A ne peut évoluer que de deux façons :

$$\begin{cases} \text{augmenter pour atteindre } uS_0, \text{avec une probabilité } p \\ \text{baisser pour atteindre } dS_0, \text{avec une probabilité } 1-p, \end{cases}$$

C'est-à-dire : On supposera en outre que les variations dans le prix de l'action sont régies par la règle suivante. Étant donné le prix $S(t)$ à l'instant t, le prix à l'instant $t+1$ ne peut prendre que deux valeurs distinctes, à savoir $S(t+1) = uS(t)$, ou $S(t+1) = dS(t)$, où $0 < d < u$ sont deux paramètres que l'on suppose connus. Hypothèse très forte et peu réalisable ! !

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle binomial

Nous travaillerons toujours avec un temps discret. L'unité de temps peut-être un jour, un mois, une année ou une heure, selon la situation étudié. On peut écrire

$$d = 1 + r_- \qquad \text{et} \qquad u = 1 + r_+$$

avec $-1 < r_- < r_+$ des réels qui représentent la taux de variations que subit le prix de l'actif :

$$[S(t+1) - S(t)]/S(t) = r_- \qquad \text{ou} \qquad [S(t+1) - S(t)]/S(t) = r_+$$

Modèles Mathématiques de la finance

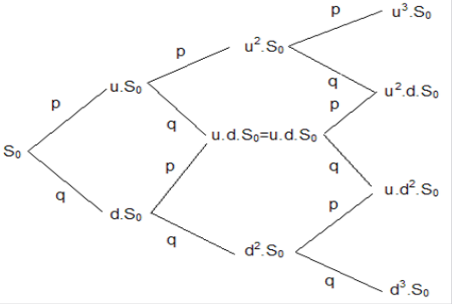
Modèle binomial

Exemple de plusieurs périodes:

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle binomial

Exemple de plusieurs périodes:



Modèles Mathématiques de la finance

Modèle binomial

L'ensemble des états finaux est donné par :

$$\Omega = \{uuu; uud; udu; udd; duu; dud; ddu; ddd\}$$

A l'exception de l'état initial $t = 0$, le prix de l'actif à chaque période est une variable aléatoire :

$$S_1 = \begin{cases} uS_0 \text{ avec une probabilité } p \\ dS_0 \text{ avec une probabilité } 1 - p \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} u^2 S_0 \text{ avec une probabilité } p^2 \\ udS_0 \text{ avec une probabilité } 2p(1 - p) \\ d^2 S_0 \text{ avec une probabilité } (1 - p)^2 \end{cases}$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle binomial

$$S_3 = \begin{cases} u^3 S_0 \text{ avec une probabilité } p^3 \\ u^2 d S_0 \text{ avec une probabilité } 3p^2(1-p) \\ d^2 u S_0 \text{ avec une probabilité } 3p(1-p)^2 \\ d^3 S_0 \text{ avec une probabilité } (1-p)^3 \end{cases}$$

Ainsi :

$$E(S_1) = puS_0 + (1-p)dS_0 = (pu + (1-p)d)S_0$$

$$E(S_2) = (pu + (1-p)d)^2 S_0$$

$$E(S_3) = (pu + (1-p)d)^3 S_0$$

Modèles Mathématiques de la finance

Modèle binomial

$S(t)$ est alors un processus stochastique en temps discret. Chaque valeur $S(t)$ est une variable aléatoire.
Le choix d'un état final donne lieu à un trajectoire du processus : la suite $\{S_0(.), S_1(.), S_2(.), S_3(.)\}$.
Par exemple, le trajectoire de l'état $\{u, d, u\}$ est donné par :
$\{S_0, uS_0, duS_0, u^2dS_0\}$.

Modèles Mathématiques de la finance

Exemples - Applications

M. X achète en mars une option d'achat (européenne) sur 10 actions d'une société SOC cotée à la bourse de Casa, échéance Décembre, prix d'exercice (unitaire) 190.6 Dhs, prime (unitaire) 22,95 Dhs. Traiter les deux scénarios relatifs à un prix (en décembre) égal à 220 et à 185,4.
Dresser le bilan général en fonction du prix en décembre.

Modèles Mathématiques de la finance

Exemples - Applications

Appliquer le modèle binomial à une période pour évaluer une option d'achat sur l'action A avec les données suivantes :
Prix de A au temps 0 : 50UM
Prix de A au temps 1 : 25UM ou 100UM .
Taux d'intérêt sans risque : 25%

Modèles Mathématiques de la finance

Exemples - Applications

Évaluation d'un call européen à un an, de prix d'exercice 53UM, sur l'action A dont le cours actuel est de 51UM et le cours dans un an peut valoir 33UM ou 63UM. Le taux sans risque est de 10% $\longrightarrow$ Le prix du call est de 7UM ?

(a) Évaluation sur la base des prix des titres contingents.

(b) Évaluation par replication des cash-flows.

Applications et Travaux dirigés

Modèle binomial : Stratégie de replication dynamique(dynamic trading strategy)

Applications et Travaux dirigés

Modèle binomial : Stratégie de replication dynamique(dynamic trading strategy)

On suppose qu'une action ne peut prendre que deux valeurs dans une période. Dans ce cas, il est possible de valoriser le prix d'une option en construisant un portefeuille de replication.

Applications et Travaux dirigés

Modèle binomial : Stratégie de replication dynamique(dynamic trading strategy)
On suppose qu'une action ne peut prendre que deux valeurs dans une période. Dans ce cas, il est possible de valoriser le prix d'une option en construisant un portefeuille de replication.
La valeur à la fin de ce portefeuille correspond exactement au profil de gain de l'option.

Applications et Travaux dirigés

Modèle binomial : Stratégie de replication dynamique(dynamic trading strategy)
On suppose qu'une action ne peut prendre que deux valeurs dans une période. Dans ce cas, il est possible de valoriser le prix d'une option en construisant un portefeuille de replication.
La valeur à la fin de ce portefeuille correspond exactement au profil de gain de l'option.
Ce portefeuille est uniquement composé de bons du Trésor (sans risque) et de l'action sous-jacente (risquée).

Applications et Travaux dirigés

Modèle binomial : Stratégie de replication dynamique(dynamic trading strategy)
On suppose qu'une action ne peut prendre que deux valeurs dans une période. Dans ce cas, il est possible de valoriser le prix d'une option en construisant un portefeuille de replication.
La valeur à la fin de ce portefeuille correspond exactement au profil de gain de l'option.
Ce portefeuille est uniquement composé de bons du Trésor (sans risque) et de l'action sous-jacente (risquée).
Puisque le profil de gain du portefeuille est par construction identique à celui de l'option, par application de la Loi du prix unique,les valeurs du portefeuille et de l'option doivent être égales en début de période.

Applications et Travaux dirigés

On considère un call européen expirant dans une période et ayant pour sous-jacent une action.

Applications et Travaux dirigés

On considère un call européen expirant dans une période et ayant pour sous-jacent une action.
Le prix d'exercice est de 61 UM. L'action ne verse pas de dividende. Elle vaut 60 UM au départ et ne peut prendre que deux valeurs à la fin : 50 UM ou 72 UM. Le bon du Trésor offre un taux de rendement de 5% sur la période.

Applications et Travaux dirigés

On considère un call européen expirant dans une période et ayant pour sous-jacent une action.
Le prix d'exercice est de 61 UM. L'action ne verse pas de dividende. Elle vaut 60 UM au départ et ne peut prendre que deux valeurs à la fin : 50 UM ou 72 UM. Le bon du Trésor offre un taux de rendement de 5% sur la période.
Résumer ces informations grâce à un arbre binomial en précisant, sur chaque branche, le prix du sous-jacent S, le rendement du Bon B et le celui du Call C.

Applications et Travaux dirigés

$$\begin{cases} S_0 &= 60 \\ B_0 &= 1 \\ C_0 &= ? \end{cases} \quad \begin{array}{l} \nearrow \begin{cases} S_1^u &= 72 \\ B_1^u &= 1.05 \\ C_1^u &= \max\{72 - 61; 0\} = 11 \end{cases} \\ \\ \searrow \begin{cases} S_1^d &= 50 \\ B_1^d &= 1.05 \\ C_1^d &= \max\{50 - 61; 0\} = 0 \end{cases} \end{array}$$

Applications et Travaux dirigés

Afin de répliquer le profil de gain du call en fin de période, on constitue un portefeuilles de replication, (qui donne le même résultat que le call), de δ actions et d'un montant b en bons de trésor.
Trouver δ et b en formulant les deux équations liées aux états de la nature. Vérifier et interpréter.

Applications et Travaux dirigés

Afin de répliquer le profil de gain du call en fin de période, on constitue un portefeuilles de replication, (qui donne le même résultat que le call), de δ actions et d'un montant b en bons de trésor.
Trouver δ et b en formulant les deux équations liées aux états de la nature. Vérifier et interpréter.

$$\left\{\begin{array}{l} 72\delta + 1.05b = 11 \\ 50\delta + 1.05b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \delta = 0.5 \\ b = -23.81 \end{array}\right.$$

Applications et Travaux dirigés

Afin de répliquer le profil de gain du call en fin de période, on constitue un portefeuilles de replication, (qui donne le même résultat que le call), de δ actions et d'un montant b en bons de trésor.
Trouver δ et b en formulant les deux équations liées aux états de la nature. Vérifier et interpréter.

$$\begin{cases} 72\delta + 1.05b = 11 \\ 50\delta + 1.05b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \delta = 0.5 \\ b = -23.81 \end{cases}$$

Un portefeuille composé d'une position longue de 0.5 actions et d'un credit($b < 0$)de 23.81 UM réplique parfaitement la valeur de l'option à l'échéance (en période 1).
La vérification est immédiate.

Applications et Travaux dirigés

En absence d'une opportunité d'arbitrage(A0A) ($\Longrightarrow$ il est impossible de réaliser un rendement sans prise de risque), déterminer le C_0 en remarquons que ce prix est égal au coût du portefeuilles de replication.

$$C_0 = 60\delta + b = 6.19UM$$

Applications et Travaux dirigés

Applications et Travaux dirigés

Analyser la situation ou C_0 prend une valeur différente par exemple : $7.19UM$

Applications et Travaux dirigés

Analyser la situation ou C_0 prend une valeur différente par exemple : $7.19UM$
Les deux investissements donnent le même gain futur, donc nous pouvons réaliser un rendement de 1UM (sans prise de risque) en achetant le portefeuille à 6.19 et en vendant l'option à 7.19 ce que contredit l'AOA.

Applications et Travaux dirigés

Analyser la situation ou C_0 prend une valeur différente par exemple : $7.19UM$
Les deux investissements donnent le même gain futur, donc nous pouvons réaliser un rendement de 1UM (sans prise de risque) en achetant le portefeuille à 6.19 et en vendant l'option à 7.19 ce que contredit l'AOA.
Le principal avantage de la formule précédente est qu'il n'est pas nécessaire de connaître les probabilités associées à la hausse et la baisse du prix de l'action pour évaluer l'option.

Applications et Travaux dirigés

On considère un nombre fini de périodes $t = 0, ..., T$. On suppose que le prix actuel de l'action est de S_0. Chaque période, le cours du sous-jacent peut soit "monter"($S_{t+1} = uS_t$, $u > 1$)si le marché et "haussier", soit "descendre"($S_{t+1} = dS_t$, $d < u$)si le marché est "baissier".
Le taux d'intérêt sans risque d'une période à l'autre est de r. Pour éviter l'arbitrage (AOA), il faut que $d < 1 + r < u$.
Soit K le prix d'exercice. Evaluer le prix actuel,C_0,d'un call dont la valeur sera C_1^u si le prix de l'action monte et C_1^d dans le cas contraire. En suivant la même démarche que pour l'exemple précédent :

Applications et Travaux dirigés

$$\begin{cases} S_1^u \\ B_1^u = 1 + r \\ C_1^u = \max\{S_1^u - K; 0\} \end{cases}$$

$$\nearrow$$

$$\begin{cases} S_0 \\ B_0 = 1 \\ C_0 = ? \end{cases}$$

$$\searrow$$

$$\begin{cases} S_1^d \\ B_1^d = 1 + r \\ C_1^d = \max\{S_1^d - K; 0\} \end{cases}$$

Applications et Travaux dirigés

On construit, comme précédemment, un portefeuille de replication du profil de gain du call à l'échéance.
Ce portefeuille est composé de δ actions et d'un emprunt de montant b. Le système de deux équations à deux inconnues est le suivant :

$$\begin{cases} \delta S_1^u + (1+r)b = C_1^u \\ \delta S_1^d + (1+r)b = C_1^d \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_1^u - S_1^d} = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u-d)} \\ b = \frac{uC_1^d - dC_1^u}{(1+r)(u-d)} = \frac{C_1^u - \delta S_1^u}{1+r} = \frac{C_1^d - \delta S_1^d}{1+r} \end{cases}$$

Applications et Travaux dirigés

Une fois connue la composition du portefeuille de replication, il est aisé de calculer le prix du call en début de période ; il est égal au coût de constitution du portefeuille de replication :

$$C_0 = \delta S_0 + b$$

Applications et Travaux dirigés

Quelle signification peut-on donner à δ à partir de la formule précédente ?

Applications et Travaux dirigés

Quelle signification peut-on donner à δ à partir de la formule précédente ?
La formule donnant la valeur de δ peut s'interpréter comme la sensibilité du prix du call aux variations du prix de l'action.
Cas de plusieurs périodes :
Compléter l'arbre de l'exemple précèdent (Call à prix d'exercice 61) par l'ajout d'une 2ème période en effectuant les calculs possibles.
Puis, sur chaque partie de l'arbre, constituée de deux branches, réitérer les calculs precedents et déduire.

Applications et Travaux dirigés

$$\begin{cases} S_1^u &= 72 \\ C_1^u &= \max\{72 - 61; 0\} = 11 \end{cases}$$

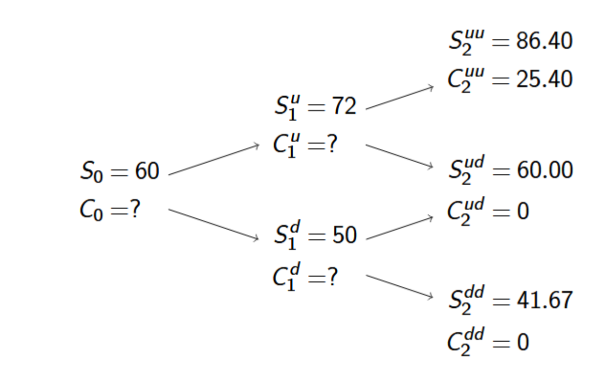
$$\nearrow$$

$$\begin{cases} S_0 &= 60 \\ C_0 &=? \end{cases}$$

$$\searrow$$

$$\begin{cases} S_1^d &= 50 \\ C_1^d &= \max\{50 - 61; 0\} = 0 \end{cases}$$

Applications et Travaux dirigés



Applications et Travaux dirigés

$$\delta_1^u = \frac{C_2^{uu} - C_2^{ud}}{S_2^{uu} - S_2 ud} = \frac{25.4}{86.4 - 60} = 0.962$$

$$b_1^u = \frac{C_2^{uu} - \delta_1^u S_2^{uu}}{1 + r} = \frac{25.4 - 83.127}{1.05} = -54.98$$

$$C_1^u = \delta_1^u S_1^u + b_1^u = 14.29$$

Sur la deuxième partie, nous avons sur les deux branches la valeur du call est nulle : $C_2^{ud} = C_2^{dd} = 0$ et par conséquent, le portefeuille de replication est tel que : $\delta_1^d = b_1^d = 0$ et $C_1^d = 0$.
Les valeurs du call sont déterminées à la fin de la période 1, nous pouvons évaluer le prix initial du call.

Applications et Travaux dirigés

$$\begin{cases} S_1^u &= 72 \\ C_1^u &= 14.29 \end{cases}$$

$$\nearrow$$

$$\begin{cases} S_0 &= 60 \\ C_0 &= ? \end{cases}$$

$$\searrow$$

$$\begin{cases} S_1^d &= 50 \\ C_1^d &= 0 \end{cases}$$

Applications et Travaux dirigés

Les paramètres du portefeuille de replication :

$$\delta_0 = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_1^u - S_1^d} = 0.65$$

$$b_0 = \frac{C_1^u - \delta_0 S_1^u}{1 + r} = -30.94$$

et

$$C_0 = \delta_0 S_0 + b_0 = 8.04$$

Applications et Travaux dirigés

Conclusion :

$$S_0 = 60 \quad C_0 = 8.04 \quad \delta_0 = 0.65 \quad b_0 = -30.94$$

$$S_1^u = 72 \quad C_1^u = 14.29 \quad \delta_1^u = 0.96 \quad b_1^u = -54.98$$

$$S_1^d = 50.00 \quad C_1^d = 0 \quad \delta_1^d = 0 \quad b_1^d = 0$$

$$S_2^{uu} = 86.40 \quad C_2^{uu} = 25.40$$

$$S_2^{ud} = 60.00 \quad C_2^{ud} = 0$$

$$S_2^{dd} = 41.67 \quad C_2^{dd} = 0$$

Applications et Travaux dirigés

On suppose qu'en période 1, $S_1 = 72$.
La modification du portefeuille de replication est :

Applications et Travaux dirigés

On suppose qu'en période 1, $S_1 = 72$.
La modification du portefeuille de replication est :
acheter 0.96-0.65=0.31 unités du sous-jacent (en d'autres termes, augmenter la position long de 0.65 à 0.96 actions), ce qui coûte $0.31 \times 72 = 22.49UM$

Applications et Travaux dirigés

On suppose qu'en période 1, $S_1 = 72$.
La modification du portefeuille de replication est :
acheter 0.96-0.65=0.31 unités du sous-jacent (en d'autres termes, augmenter la position long de 0.65 à 0.96 actions), ce qui coûte $0.31 \times 72 = 22.49UM$
augmenter le montant de l'emprunt de $30.94 \times 1.05 = 32.49$ à 54.98, donc de $22.49UM$. Le montant nécessaire pour acheter l'actif risqué correspond au montant obtenu en augmentant l'emprunt.

Applications et Travaux dirigés

On suppose qu'en période 1, $S_1 = 72$.
La modification du portefeuille de replication est :
acheter 0.96-0.65=0.31 unités du sous-jacent (en d'autres termes, augmenter la position long de 0.65 à 0.96 actions), ce qui coûte $0.31 \times 72 = 22.49UM$
augmenter le montant de l'emprunt de $30.94 \times 1.05 = 32.49$ à 54.98, donc de $22.49UM$. Le montant nécessaire pour acheter l'actif risqué correspond au montant obtenu en augmentant l'emprunt.
On dit alors que la stratégie est auto-financée.

Applications et Travaux dirigés

On suppose qu'en période 1, $S_1 = 50$.
La modification du portefeuille de replication est :

Applications et Travaux dirigés

On suppose qu'en période 1, $S_1 = 50$.
La modification du portefeuille de replication est :
vendre 0.65 unités du sous-jacent et encaisser
$0.65 \times 50 = 32.49 UM$.

Applications et Travaux dirigés

On suppose qu'en période 1, $S_1 = 50$.
La modification du portefeuille de replication est :
vendre 0.65 unités du sous-jacent et encaisser
$0.65 \times 50 = 32.49 UM$.
liquider le montant de l'emprunt, càd rembourser
$30.94 \times 1.05 = 32.49 UM$.

Applications et Travaux dirigés

On suppose qu'en période 1, $S_1 = 50$.
La modification du portefeuille de replication est :
vendre 0.65 unités du sous-jacent et encaisser
$0.65 \times 50 = 32.49UM$.
liquider le montant de l'emprunt, càd rembourser
$30.94 \times 1.05 = 32.49UM$.
Les deux montants sont de nouveau les mêmes, donc la stratégie est auto-financée.

Applications et Travaux dirigés

Si le nombre de périodes devient très grand, la distribution binomiale converge vers une distribution normale.
C'est ce qu'on utilise dans la méthode de Black-Scholes. La méthode de Black-Scholes est pour ainsi dite le cas limite de la méthode binomiale.
Cette idée représente donc le fondement du modèle de Black et Scholes : il est possible de répliquer le profil de gain d'une option à chaque date en modifiant la composition du portefeuille de replication à toutes les dates intermédiaires.Cette technique est connue sous le nom de stratégie de replication dynamique(dynamic trading strategy).

Applications et Travaux dirigés

Les probabilités risque-neutre

Applications et Travaux dirigés

Les probabilités risque-neutre

Dans le modèle binomial, il n'est pas nécessaire de connaître les probabilités des différents états de la nature futurs (la détermination n'est pas facile d'ailleurs ! !). Si ces probabilités étaient connues, on pourrait valoriser l'option comme une espérance actualisée au taux approprié :

$$C_0 = \frac{1}{1 + R_C}\mathbb{E}[C_1]$$

Le problème est qu'on doit estimer le taux d'actualisation R_C approprié,qui dépend du degré d'aversion au risque des investisseurs.

Cas particulier :

Applications et Travaux dirigés

Les probabilités risque-neutre

Dans le modèle binomial, il n'est pas nécessaire de connaître les probabilités des différents états de la nature futurs (la détermination n'est pas facile d'ailleurs ! !). Si ces probabilités étaient connues, on pourrait valoriser l'option comme une espérance actualisée au taux approprié :

$$C_0 = \frac{1}{1 + R_C}\mathbb{E}[C_1]$$

Le problème est qu'on doit estimer le taux d'actualisation R_C approprié,qui dépend du degré d'aversion au risque des investisseurs.

Cas particulier :

Lorsque tous les investisseurs sont neutres vis-à-vis du risque.

Applications et Travaux dirigés

Nous allons reprendre le calcul précédent. On considère un call européen expirant dans une période et ayant pour sous-jacent une action. L'arbre binomial de ce problème s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} S_1^u \\ C_1^u = \max\{S_1^u - K; 0\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_0 \\ C_0 = ? \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \\ \searrow \end{matrix}$$

$$\begin{cases} S_1^d \\ C_1^d = \max\{S_1^d - K; 0\} \end{cases}$$

Applications et Travaux dirigés

L'application de la stratégie de replication dynamique conduit à la constitution du portefeuille de replication (du profil de gain du call à l'échéance) donnée par les deux paramètres :

$$\begin{cases} \delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_1^u - S_1^d} = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u-d)} \\ b = \frac{uC_1^d - dC_1^u}{(1+r)(u-d)} = \frac{C_1^u - \delta S_1^u}{1+r} = \frac{C_1^d - \delta S_1^d}{1+r} \end{cases}$$

Applications et Travaux dirigés

L'application de la stratégie de replication dynamique conduit à la constitution du portefeuille de replication (du profil de gain du call à l'échéance) donnée par les deux paramètres :

$$\begin{cases} \delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_1^u - S_1^d} = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u-d)} \\ b = \frac{uC_1^d - dC_1^u}{(1+r)(u-d)} = \frac{C_1^u - \delta S_1^u}{1+r} = \frac{C_1^d - \delta S_1^d}{1+r} \end{cases}$$

Le prix du call C_0 est égal au coût de constitution de portefeuille :

$$C_0 = \delta S_0 + b = \frac{C_1^u - C_1^d}{u - d} + \frac{uC_1^d - dC_1^u}{(1+r)(u-d)}$$

$$C_0 = \frac{C_1^u \frac{1+r-d}{u-d} + C_1^d \left(1 - \frac{1+r-d}{u-d}\right)}{1+r}$$

Applications et Travaux dirigés

On pose $q = \frac{1+r-d}{u-d}$, on a $0 \leq q \leq 1$ car $d \leq 1+r \leq u$ (AOA). Par conséquent, q et $1-q$ peuvent être interprété comme des probabilités et on a :

$$C_0 = \frac{1}{1+r}(qC_1^u + (1-q)C_1^d)$$

Le prix de l'option aujourd'hui est alors donné par l'actualisation de l'espérance du prix de l'option demain :

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}[C_1]$$

$\mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}[C_1]$ est l'espérance du prix de l'option à l'échéance par rapport à la probabilité alternative q

Applications et Travaux dirigés

Pour l'exemple précédent : $K = 61$, $S_0 = 60$, $S_1^u = 72$, $S_1^d = 50$, $r = 0.05$, $u = \frac{72}{60} = 1.2$, $d = \frac{50}{60} = 0.84$ donc :

Applications et Travaux dirigés

Pour l'exemple précédent : $K = 61$, $S_0 = 60$, $S_1^u = 72$, $S_1^d = 50$, $r = 0.05$, $u = \frac{72}{60} = 1.2$, $d = \frac{50}{60} = 0.84$ donc :

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1+0.05-0.84}{1.2-0.84} = 0.59 \qquad 1-q = 0.41$$

Applications et Travaux dirigés

Pour l'exemple précédent : $K = 61$, $S_0 = 60$, $S_1^u = 72$, $S_1^d = 50$, $r = 0.05$, $u = \frac{72}{60} = 1.2$, $d = \frac{50}{60} = 0.84$ donc :

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{1 + 0.05 - 0.84}{1.2 - 0.84} = 0.59 \qquad 1 - q = 0.41$$

Le prix du call :

Applications et Travaux dirigés

Pour l'exemple précédent : $K = 61$, $S_0 = 60$, $S_1^u = 72$, $S_1^d = 50$, $r = 0.05$, $u = \frac{72}{60} = 1.2$, $d = \frac{50}{60} = 0.84$ donc :

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{1 + 0.05 - 0.84}{1.2 - 0.84} = 0.59 \qquad 1 - q = 0.41$$

Le prix du call :

$$C_0 = \frac{1}{1 + 0.05}\mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}[C_1] = \frac{1}{1 + 0.05}(0.59 \times 11 + 0.41 \times 0) = 6.19$$

qui correspond exactement au prix trouvé par la méthode du portefeuille de replication.

Applications et Travaux dirigés

Ce calcul ne nécessite toujours pas d'hypothèse sur les probabilités réelles de la hausse ou la baisse du sous-jacent.
Cela signifie que les probabilités q et $(1-q)$ ne sont pas égales aux vraies probabilités. Elles représentent la manière dont les probabilités réelles (toujours inconnues) doivent être ajustées pour que le taux d'actualisation soit égal au taux sans risque.
Pour cette raison, on donne à q et $(1-q)$ le nom de **probabilités risque-neutre**.

Applications et Travaux dirigés

Dans un monde risque-neutre, le rendement attendu sur tous les actifs est le taux sans risque, r.

Applications et Travaux dirigés

Dans un monde risque-neutre, le rendement attendu sur tous les actifs est le taux sans risque, r. Ceci signifie qu'on peut obtenir directement les probabilités risque-neutre à partir du prix de l'action :

Applications et Travaux dirigés

Dans un monde risque-neutre, le rendement attendu sur tous les actifs est le taux sans risque, r.Ceci signifie qu'on peut obtenir directement les probabilités risque-neutre à partir du prix de l'action :

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_1{}^{\mathbb{Q}}[S_1] = \frac{quS_0 + (1-q)dS_0}{1+r}$$

q étant la seule inconnue de l'équation et on obtient effectivement

Applications et Travaux dirigés

Dans un monde risque-neutre, le rendement attendu sur tous les actifs est le taux sans risque, r. Ceci signifie qu'on peut obtenir directement les probabilités risque-neutre à partir du prix de l'action :

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_1{}^{\mathbb{Q}}[S_1] = \frac{quS_0 + (1-q)dS_0}{1+r}$$

q étant la seule inconnue de l'équation et on obtient effectivement

$$q = \frac{1+r-d}{u-d}$$

Vérification :

$$\frac{72 \times 0.59 + 50 \times 0.41}{1+0.05} = 60$$

Applications et Travaux dirigés

L'évaluation des actifs financiers à l'aide des probabilités risque-neutre est très rapide. Une fois les probabilités risque-neutre calculées, n'importe quel actif financier peut être valorisé, simplement en actualisant au taux sans risque l'espérance de son profil de gain calculée avec les probabilités risque-neutre.

Applications et Travaux dirigés

L'évaluation des actifs financiers à l'aide des probabilités risque-neutre est très rapide. Une fois les probabilités risque-neutre calculées, n'importe quel actif financier peut être valorisé, simplement en actualisant au taux sans risque l'espérance de son profil de gain calculée avec les probabilités risque-neutre.
Le gain en vitesse de calcul va être évident si on considère le modèle multi-périodique, pour la simple raison que nous n'avons plus besoin de construire à chaque période et dans chaque état de nature le portefeuille de replication.

Applications et Travaux dirigés

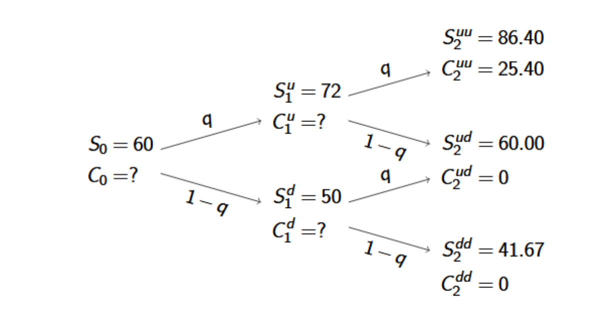
L'évaluation des actifs financiers à l'aide des probabilités risque-neutre est très rapide. Une fois les probabilités risque-neutre calculées, n'importe quel actif financier peut être valorisé, simplement en actualisant au taux sans risque l'espérance de son profil de gain calculée avec les probabilités risque-neutre.
Le gain en vitesse de calcul va être évident si on considère le modèle multi-périodique, pour la simple raison que nous n'avons plus besoin de construire à chaque période et dans chaque état de nature le portefeuille de replication.
Le calcul des prix des options à l'aide des probabilités risque-neutre est donc une deuxième méthode d'évaluation des options.

Applications et Travaux dirigés

On considère l'évolution de l'action de l'exemple précédent sur deux périodes :

Applications et Travaux dirigés

On considère l'évolution de l'action de l'exemple précédent sur deux périodes :



Applications et Travaux dirigés

Les probabilités risque-neutre ne se modifient pas au cours du temps puisque le taux de variation du prix de l'action ne change pas d'une période à l'autre (u et d restent constants). Nous avons maintenant 3 états de nature à la fin issus de 4 trajectoires !

Applications et Travaux dirigés

Les probabilités risque-neutre ne se modifient pas au cours du temps puisque le taux de variation du prix de l'action ne change pas d'une période à l'autre (u et d restent constants). Nous avons maintenant 3 états de nature à la fin issus de 4 trajectoires !

Trajectoire	État	Probabilité
uu	$C_2^{uu} = 25.4$	$q^2 = 0.35$
ud et du	$C_2^{ud} = C_2^{du} = 0$	$2q(1-q) = 0.48$
dd	$C_2^{dd} = 0$	$(1-q)^2 = 0.17$

Le prix du call est alors donné par :

Applications et Travaux dirigés

Les probabilités risque-neutre ne se modifient pas au cours du temps puisque le taux de variation du prix de l'action ne change pas d'une période à l'autre (u et d restent constants). Nous avons maintenant 3 états de nature à la fin issus de 4 trajectoires !

Trajectoire	État	Probabilité
uu	$C_2^{uu} = 25.4$	$q^2 = 0.35$
ud et du	$C_2^{ud} = C_2^{du} = 0$	$2q(1-q) = 0.48$
dd	$C_2^{dd} = 0$	$(1-q)^2 = 0.17$

Le prix du call est alors donné par :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^2}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_2] = \frac{25.4 \times 0.35 + 0 \times 0.48 + 0 \times 0.17}{(1.05)^2} = 8.04$$

Applications et Travaux dirigés

La méthode fonctionne pour cet exemple pour les cas d'une et deux périodes. D'une manière générale, pour n périodes, le prix du call est donnée par :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_n]$$

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}q^i(1-q)^{n-i}\max[u^i d^{n-i}S_0 - K]$$

Si le nombre de périodes devient très grand, alors que la maturité reste la même, la durée de chaque période va tendre vers 0 et la distribution binomiale converge vers une distribution normale. C'est ce qu'on utilise dans la méthode de Black-Scholes.

Applications et Travaux dirigés

Le modèle binomial ne nécessite aucune hypothèse sur les préférences des agents, les probabilités d'occurrence des états de la nature futurs ou la rentabilité anticipée du sous-jacent.

Applications et Travaux dirigés

Le modèle binomial ne nécessite aucune hypothèse sur les préférences des agents, les probabilités d'occurrence des états de la nature futurs ou la rentabilité anticipée du sous-jacent.
Dans un monde réel, il est probable que les investisseurs manifestent de l'aversion au risque. L'espérance de rendement de tout actif financier doit donc être actualisée à un taux supérieur au taux sans risque.

Applications et Travaux dirigés

Le modèle binomial ne nécessite aucune hypothèse sur les préférences des agents, les probabilités d'occurrence des états de la nature futurs ou la rentabilité anticipée du sous-jacent.
Dans un monde réel, il est probable que les investisseurs manifestent de l'aversion au risque. L'espérance de rendement de tout actif financier doit donc être actualisée à un taux supérieur au taux sans risque.
Dans un monde risque-neutre, l'espérance de rendement des actifs risqués correspond exactement au taux de rendement sans risque.

Applications et Travaux dirigés

Pour concilier ces deux visions,le prix de l'action dans le monde risque-neutre doit être exactement égal au prix de l'action dans le monde réel. Il faut donc ajuster les probabilités réelles (inconnues)afin d'avoir égalité entre les deux prix.

Applications et Travaux dirigés

Pour concilier ces deux visions,le prix de l'action dans le monde risque-neutre doit être exactement égal au prix de l'action dans le monde réel. Il faut donc ajuster les probabilités réelles (inconnues)afin d'avoir égalité entre les deux prix.
Ensuite, le prix de n'importe quel actif dérivé peut être obtenu en actualisant au taux sans risque l'espérance risque-neutre des flux monétaires futurs versés par cet actif.

Applications et Travaux dirigés

Modèle Black-Scholes comme limite du modèle binomial.

Applications et Travaux dirigés

Modèle Black-Scholes comme limite du modèle binomial.
Pour dériver leur formule, Black et Scholes ont supposé que le cours de l'action était une variable continue, et que pour répliquer une option, les investisseurs devaient donc continuellement ajuster leur savoirs en actif sous-jacent.

Applications et Travaux dirigés

Modèle Black-Scholes comme limite du modèle binomial.
Pour dériver leur formule, Black et Scholes ont supposé que le cours de l'action était une variable continue, et que pour répliquer une option, les investisseurs devaient donc continuellement ajuster leur savoirs en actif sous-jacent.
Leur formule fonctionne remarquablement bien dans la réalité, où les actifs s'échangent de manière intermittente et où les prix sautent d'un niveau à un autre.

Applications et Travaux dirigés

Modèle Black-Scholes comme limite du modèle binomial.
Pour dériver leur formule, Black et Scholes ont supposé que le cours de l'action était une variable continue, et que pour répliquer une option, les investisseurs devaient donc continuellement ajuster leur savoirs en actif sous-jacent.
Leur formule fonctionne remarquablement bien dans la réalité, où les actifs s'échangent de manière intermittente et où les prix sautent d'un niveau à un autre.
C'est aussi un modèle très flexible : il peut être adapté à l'évaluation d'options sur une variété d'actifs avec des caractéristiques spéciales tels que les devises étrangères, les obligations et les contrats à terme. Il a donc eu beaucoup d'influence et est devenu un modèle standard pour l'évaluation des options.

Applications et Travaux dirigés

Cadre du modèle :
S_t cours à l'instant t du titre sous-jacent
K prix d'exercice de l'option
σ écart-type par année du taux de rentabilité de l'action(capitalisation en continu)
T date d'échéance, le temps de l'instant t jusqu'à l'échéance est donné par $T - t$
r taux d'intérêt annuel, continûment composé.
Les paramètres du modèle (n périodes) :

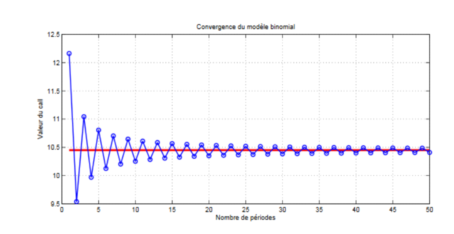
$$u_n = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \qquad d_n = \frac{1}{u_n} \qquad r_n = e^{r\frac{T}{n}} - 1$$

Applications et Travaux dirigés

On considère un call européen expirant dans une année(T=1)et ayant pour sous-jacent une action. Le prix d'exercice est de 100UM L'action vaut 100UM au départ et a une volatilité annuelle de $\sigma = 0.2$. Le taux sans risque est de $r = 0.05$.
Evaluation sur une période : $C_0 = 12.16$,

Applications et Travaux dirigés

On considère un call européen expirant dans une année(T=1)et ayant pour sous-jacent une action. Le prix d'exercice est de 100UM L'action vaut 100UM au départ et a une volatilité annuelle de $\sigma = 0.2$. Le taux sans risque est de $r = 0.05$.
Evaluation sur une période : $C_0 = 12.16$, sur deux périodes : $C_0 = 9.52$, sur deux périodes : $C_0 = 11.04$
puis, 9.97, 10.81, 10.1256,...



Applications et Travaux dirigés

Plus on augmente le nombre de périodes, plus le prix semble converger vers une valeur située autour de 10.5 (plus précisément 10.45)

Applications et Travaux dirigés

Plus on augmente le nombre de périodes, plus le prix semble converger vers une valeur située autour de 10.5 (plus précisément 10.45)
Il devrait donc y avoir une limite quand le nombre de périodes augmente à infini. Cette limite est donnée par la formule de Black-Scholes.

Applications et Travaux dirigés

Plus on augmente le nombre de périodes, plus le prix semble converger vers une valeur située autour de 10.5 (plus précisément 10.45)
Il devrait donc y avoir une limite quand le nombre de périodes augmente à infini. Cette limite est donnée par la formule de Black-Scholes.
Dans ce cas, nous sommes en temps continu. Avant, nous étions en temps discret

Applications et Travaux dirigés

Plus on augmente le nombre de périodes, plus le prix semble converger vers une valeur située autour de 10.5 (plus précisément 10.45)
Il devrait donc y avoir une limite quand le nombre de périodes augmente à infini. Cette limite est donnée par la formule de Black-Scholes.
Dans ce cas, nous sommes en temps continu. Avant, nous étions en temps discret
Comme la méthode binomiale, la méthode de Black-Scholes repose sur un argument d'arbitrage. Toutefois, le portefeuille de replication n'est pas modifié de période en période, mais en continu.

Applications et Travaux dirigés

Plus on augmente le nombre de périodes, plus le prix semble converger vers une valeur située autour de 10.5 (plus précisément 10.45)

Il devrait donc y avoir une limite quand le nombre de périodes augmente à infini. Cette limite est donnée par la formule de Black-Scholes.

Dans ce cas, nous sommes en temps continu. Avant, nous étions en temps discret

Comme la méthode binomiale, la méthode de Black-Scholes repose sur un argument d'arbitrage. Toutefois, le portefeuille de replication n'est pas modifié de période en période, mais en continu.

Applications et Travaux dirigés

La formule de Black-Scholes pour évaluer un call sur une action est :

$$C_t = S_t \times \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \times \mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln[\frac{S_t}{e^{-r(T-t)}}]}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

et $\mathcal{N}(d)$ représente la fonction de densité de la loi normale cumulée(càd $\mathcal{N}(d)$est la probabilité qu'une variable aléatoire x normalement distribuée puisse être inférieure ou égale à d).

Applications et Travaux dirigés

La formule de Black-Scholes pour évaluer un call sur une action est :

$$C_t = S_t \times \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \times \mathcal{N}(d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln[\frac{S_t}{e^{-r(T-t)}}]}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

et $\mathcal{N}(d)$ représente la fonction de densité de la loi normale cumulée(càd $\mathcal{N}(d)$est la probabilité qu'une variable aléatoire x normalement distribuée puisse être inférieure ou égale à d).
Dans l'exemple précédent, nous trouvons $d_1 = 0.35$, $d_2 = 0.15$, $\mathcal{N}(d_1) = 0.6368$, $\mathcal{N}(d_2) = 0.5596$ et finalement $C_0 = 10.45$.