CONTRÔLE — 14 janvier 2023 — 2022 - 2023

*Présenter les résultats numériques avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (1.5+2.5+2+1.5=7.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8 - x^3$.

1. **Étudier** la fonction f sur $\mathbb{R}$, **dresser** son tableau de variations, remarquer que f est **bijective** et vérifier que l'équation $(Eqt)\ \ f(x) = 0$ admet **une solution unique** $\widetilde{x}$. Quelle est la valeur **exacte** de $\widetilde{x}$?
   f est un Polynôme, $f'(x) = -3x^2 < 0$ (pour $x \neq 0$), $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Donc f est une fonction définie, continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et par conséquent f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit que 0 admet un seul antécédent $\widetilde{x}$ tel que $f(\widetilde{x}) = 0$ c'est à dire que $\widetilde{x}$ est l'unique solution de (Eqt).
   $$8 - x^3 = 0 \Longrightarrow x^3 = 8 = 2^3 \Longrightarrow x = 2$$
   Donc
   $$\widetilde{x} = 2$$
2. Vérifier que $\widetilde{x} \in [1; 4]$ et calculer les **trois** premières valeurs approchées, c_0, c_1 et c_2, données par **la méthode de Dichotomie**. Donner une majoration de l'erreur de l'approximation de $\widetilde{x}$ par c_2.
   Déterminer le **nombre d'itérations**, n, nécessaires pour obtenir une valeur approchée, c_n, de $\widetilde{x}$ avec une précision au moins égale à 10^{-5}.

   $f(1) = 8 - 1 = 7$, $f(4) = 8 - 64 = -56$ et $f(1)f(4) < 0$ par conséquent $\widetilde{x} \in [1, 4]$ et on a :
   $a_0 = 1$, $b_0 = 4$, $c_0 = \frac{1+4}{2} = 2.5$, $f(2.5) = -7.625$ et $f(1)f(2.5) < 0$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 2.5$
   $a_1 = 1$, $b_1 = 2.5$, $c_1 = \frac{1+2.5}{2} = 1.75$, $f(1.75) = 2.6406$ et $f(1)f(1.75) > 0$ donc $a_2 = 1.75$ et $b_1 = 2.5$
   $a_2 = 1.75$, $b_1 = 2.5$, $c_2 = \frac{1.75+2.5}{2} = 2.125$
   Deux itérations :
   $$|\widetilde{x} - c_2| \leq \frac{4-1}{2^2} = \frac{3}{4} = 0.75$$
   Ou bien $\widetilde{x}$ et c_2 sont donc $[1.75; 2.5]$ donc
   $$|\widetilde{x} - c_2| \leq 2.5 - 1.75 = 0.75$$
   Pour c_n nous avons :
   $$|\widetilde{x} - c_n| \leq \frac{3}{2^n}$$
   Il suffit de choisir n tel que :
   $$\frac{3}{2^n} \leq 10^{-5} \Longrightarrow 3e^{-n\ln(2)} \leq e^{-5\ln(10)} \Longrightarrow n \geq \frac{\ln(3) + 5\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 18,1946$$
   Au moins 19 itérations.
3. Définir la suite, x_n, des itérés de **la méthode de Newton**. Préciser, x_0, la meilleure **initialisation** possible parmi les quatre valeurs suivantes : 1, 4, 1.75 et 2.5 puis calculer x_1. Étudier la **convergence** de cette méthode.
   x_0 bien choisie et
   $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{8 - x_n^3}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 8}{3x_n^2}$$
   Nous avons $f''(x) = -6x < 0$ pour $x > O$ donc x_0 doit vérifier $f(x_0)$ à le même signe que $f''(x)$ et par conséquent $f(x_0)$ doit être négative ce qu'est vrai pour 2.5 et 4 mais d'après la questions précédente, la solution est localisée dans $[1.75; 2.5]$ alors la meilleure initialisation est 2.5.
   $$x_1 = \frac{2x_0^3 + 8}{3x_0^2} = \frac{2(2.5)^3 + 8}{3(2.5)^2} \simeq 2.0933$$

Les conditions de convergence sont bien vérifiées :
f est de classe C^2 (Polynôme)
$f'(x) = -3x^2 < 0$ pour $x \in [1.75; 2.5]$
$f''(x) = -6x < 0$ pour $x \in [1.75; 2.5]$
$f(x_0)f''(x) > 0$ pour $x \in [1.75; 2.5]$
La méthode de Newton est convergente sur $x \in [1.75; 2.5]$.

4. Transformer l'équation (Eqt) en un problème de recherche de **point fixe** et écrire l'**algorithme** correspondant (on ne demande pas l'étude de la convergence).

$$(Eqt)\ \ 8 - x^3 = 0 \Longrightarrow -x^3 + x + 8 = x \Longrightarrow g(x) = x$$

avec $g(x) = -x^3 + x + 8$
L'algorithme (avec une précision ε) :
$y_0 \in [1.75; 2.5]$
Tant que $|g(y_n) - y_n| > \varepsilon$ faire

$$y_{n+1} = g(y_n)$$

Exercice 2 (3+1.5=4.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ et les trois points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

1. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 en utilisant **<u>DEUX</u>** parmi les trois méthodes habituelles (Lagrange, Newton et Directe).

$f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$
Méthode directe : $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ et les equations $f(x_i) = P_2(x_i)$ donnent le système suivant :

$$\begin{cases} a - b + c = -1 \\ c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc $P_2(x) = x$
Méthode de Newton :

x_i	$f(x_i)$	$DD1$	$DD2$
-1	-1		
0	0	1	
1	1	1	0

Donc

$$P_2(x) = -N_0(x) + N_1(x) + 0 \times N_2(x) = -1 + (x+1) + 0 = x$$

Méthode de Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2 - x}{2}$$
$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = 1 - x^2$$
$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{((1+1)(1+0)} = \frac{x^2 + x}{2}$$
$$P_2(x) = f(-1)L_0(x) + f(0)L_1(x) + f(1)L_2(x) = -\frac{x^2 - x}{2} + 0 + \frac{x^2 + x}{2} = x$$

2. Donner une **majoration** de l'erreur d'interpolation.

$$E_2(x) = |f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{3!}|(x+1)(x-0)(x-1)| \sup_{x\in[-1;1]} |f^{(3)}(x)|$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$$
$$f''(x) = -(\frac{\pi}{2})^2\sin(\frac{\pi}{2}x)$$
$$f^{(3)}(x) = -(\frac{\pi}{2})^3\cos(\frac{\pi}{2}x)$$
$$\sup_{x\in[-1,1]} |f^{(3)}(x)| = (\frac{\pi}{2})^3$$
$$E_2(x) = |f(x) - P_2(x)| \leq \frac{1}{6}(\frac{\pi}{2})^3|x^3 - x| = \frac{\pi^3}{48}|x^3 - x|$$

Exercice 3 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Soit f une fonction de classe C^1 et (App) **l'approximation** :

$$(App) \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)$$

1. Déterminer α, β et γ pour que (App) soit **exacte** pour les polynômes de degré 0, 1 et 2 (on peut utiliser successivement $f(x) = 1$, $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$).

$$f(x) = 1 \Longrightarrow \int_{1}^{1} dx = 2 = \alpha + \beta + \gamma$$
$$f(x) = x \Longrightarrow \int_{1}^{1} xdx = 0 = -\alpha + \gamma$$
$$f(x) = x \Longrightarrow \int_{1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} = \alpha + \gamma$$
$$\begin{cases} 2 = \alpha + \beta + \gamma \\ 0 = -\alpha + \gamma \\ \frac{2}{3} = \alpha + \gamma \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{4}{3} \\ \gamma = \frac{1}{3} \end{cases}$$

2. On suppose que $\alpha = \gamma = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{4}{3}$, puis on se donne les points $\{x_i\}_{i=0\ldots n}$ de subdivision de l'intervalle $[a;b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$. En utilisant un **changement de variable affine**, dans I, déduire la formule de **quadrature** suivante :

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}(f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_{i+1}))$$

On pose $x = mt + p$ le changement de variable entre $[x_i; x_{i+1}]$ et $[-1, 1]$ alors :
Pour $x = x_i$, $t = -1$ donc $x_i = -m + p$
Pour $x = x_{i+1}$, $t = 1$ donc $x_{i+1} = m + p$

$$\begin{cases} x_i = -m + p \\ x_{i+1} = m + p \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m = \frac{x_{i+1}-x_i}{2} = \frac{h}{2} \\ p = \frac{x_{i+1}+x_i}{2} = x_i + \frac{h}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{h}{2}t + x_i + \frac{h}{2}$, $dx = \frac{h}{2}dt$, $t = \frac{x - x_i - \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ et $dt = \frac{dx}{\frac{h}{2}}$ On a :

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(\frac{h}{2}t + x_i + \frac{h}{2})\frac{h}{2}dt = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{h}{2}t + x_i + \frac{h}{2})dt$$

En utilisant (App) on a :

$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(\frac{1}{3}f(-\frac{h}{2} + x_i + \frac{h}{2}) + \frac{4}{3}f(\frac{h}{2}\times 0 + x_i + \frac{h}{2}) + \frac{1}{3}f(\frac{h}{2} + x_i + \frac{h}{2})\right)$$
$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left(\frac{1}{3}f(x_i) + \frac{4}{3}f(x_i + \frac{h}{2}) + \frac{1}{3}f(x_{i+1})\right) = \frac{h}{6}\left(f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_{i+1})\right)$$

3. En déduire une formule de quadrature **composite** pour l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x)dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$$\frac{h}{6}\left(f(x_0)+4f(x_0+\frac{h}{2})+f(x_1)\right)+\frac{h}{6}\left(f(x_1)+4f(x_1+\frac{h}{2})+f(x_2)\right)+\cdots+\frac{h}{6}\left(f(x_{n-1})+4f(x_{n-1}+\frac{h}{2})+f(x_n)\right)$$

$$= \frac{h}{6}\left(f(x_0)+2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)+4\sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i+\frac{h}{2})+f(x_n)\right)$$

Exercice 4 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Considérons le Problème de Cauchy (PC) donné par :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = -3x(t), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = y_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi $t_0 = 0$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Vérifier que (PC) admet une **solution unique** et déterminer cette solution (**exacte**). Le problème de Cauchy est tel que $f(t,x) = -3x$ qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable (de rapport 3) :

$$|f(x)-f(y)| = |-3x+3y| = 3|x-y|$$

On en déduit le problème admet une solution unique. Par séparation des variables, nous avons :

$$\frac{dx}{x} = -3dt \Longrightarrow \ln(x) = -3t + c \Longrightarrow x(t) = ke^{-3t}$$

Or

$$x(0) = y_0 \Longrightarrow k = y_0$$

Donc, la solution exacte est :

$$x(t) = y_0 e^{-3t}$$

2. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser la méthode du **trapèze** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n (Schéma de Crank-Nicolson).

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} x'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} -3x(t)dt \Longrightarrow x(t_{n+1}) - x(t_n) = \frac{h}{2}(-3x(t_n) - 3x(t_{n+1}))$$

En utilisant l'approximation $x(t_j) \simeq x_j$ on :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-3h}{2}(x_{n+1}+x_n) \Longrightarrow (1+\frac{3h}{2})x_{n+1} = (1-\frac{3h}{2})x_n$$

Soit

$$x_{n+1} = \frac{2-3h}{2+3h}x_n$$

3. On suppose que $h = \frac{1}{4}$, calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

$$x_{n+1} = \frac{2-3h}{2+3h}x_n = \frac{5}{11}x_n$$

La suite $(x_n)_n$ est géométrique de raison $q = \frac{5}{11}$ avec $|q| < 1$ et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$$