CONTRÔLE — 14 janvier 2023 — 2022 - 2023

*Présenter les résultats numériques avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (1.5+2.5+2+1.5=7.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8 - x^3$.

1. **Étudier** la fonction f sur $\mathbb{R}$, **dresser** son tableau de variations, remarquer que f est **bijective** et vérifier que l'équation $(Eqt)\ \ f(x) = 0$ admet **une solution unique** $\widetilde{x}$. Quelle est la valeur **exacte** de $\widetilde{x}$?
2. Vérifier que $\widetilde{x} \in [1; 4]$ et calculer les **trois** premières valeurs approchées, c_0, c_1 et c_2, données par **la méthode de Dichotomie**. Donner une majoration de l'erreur de l'approximation de $\widetilde{x}$ par c_2.
   Déterminer le **nombre d'itérations**, n, nécessaires pour obtenir une valeur approchée, c_n, de $\widetilde{x}$ avec une précision au moins égale à 10^{-5}.
3. Définir la suite, x_n, des itérés de **la méthode de Newton**. Préciser, x_0, la meilleure **initialisation** possible parmi les quatre valeurs suivantes : 1, 4, 1.75 et 2.5 puis calculer x_1. Étudier la **convergence** de cette méthode.
4. Transformer l'équation (Eqt) en un problème de recherche de **point fixe** et écrire l'**algorithme** correspondant (on ne demande pas l'étude de la convergence).

Exercice 2 (3+1.5=4.5 POINTS) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ et les trois points $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$.

1. Déterminer le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 en utilisant **<u>DEUX</u>** parmi les trois méthodes habituelles (Lagrange, Newton et Directe).
2. Donner une **majoration** de l'erreur d'interpolation.

Exercice 3 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Soit f une fonction de classe C^1 et (App) **l'approximation** :

$$(App) \quad \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)$$

1. Déterminer α, β et γ pour que (App) soit **<u>exacte</u>** pour les polynômes de degré 0, 1 et 2 (on peut utiliser successivement $f(x) = 1$, $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$).
2. On suppose que $\alpha = \gamma = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{4}{3}$, puis on se donne les points $\{x_i\}_{i=0\dots n}$ de subdivision de l'intervalle $[a; b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$. En utilisant un **changement de variable affine**, dans I, déduire la formule de **quadrature** suivante :
$$I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{6}(f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_{i+1}))$$
3. En déduire une formule de quadrature **composite** pour l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 (1.5+1.5+1.5=4.5 POINTS) : Considérons le Problème de Cauchy (PC) donné par :

$$(PC) \quad \begin{cases} x'(t) = -3x(t), & \text{Pour } t > 0 \\ x(0) = y_0 & \text{donné} \end{cases}$$

Soit $h > 0$ un pas de temps donné, on pose $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ ainsi $t_0 = 0$ et x_n une approximation de $x(t_n)$.

1. Vérifier que (PC) admet une **solution unique** et déterminer cette solution (**exacte**).
2. **Intégrer** l'équation différentielle sur $[t_n; t_{n+1}]$ et utiliser la méthode du **trapèze** pour exprimer x_{n+1} en fonction de x_n (Schéma de Crank-Nicolson).
3. On suppose que $h = \frac{1}{4}$, calculer $\lim_{n\to+\infty} x_n$.