RATTRAPAGE —— 21 février 2022 —— 2021 - 2022

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Toutes les réponses doivent être justifiées et bien rédigées

Exercice 1 (2+3+3+3=11 POINTS) :

Soit (E) l'équation suivante : $(E) \quad 1 + x = e^{1-x^2}$

1. Écrire (E) sous forme d'une équation $f(x) = 0$ (f une fonction à déterminer). Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule solution**, notée $\overline{r}$, dans l'intervalle $[0; 1]$.

$$(E) \qquad 1 + x = e^{1-x^2} \Longrightarrow 1 + x - e^{1-x^2} = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$$
$$f(x) = 0 \Longrightarrow 1 + x = e^{1-x^2} \Longrightarrow (E)$$

avec $f(x) = 1 + x - e^{1-x^2}$.
f est une fonction continue (f est la somme d'un polynôme et d'une fonction exponentielle et les deux sont continues) en plus $f(0) = 1 - e < 0$ et $f(1) = 1$ (donc $f(0)f(1) < 0$) et par conséquent l'equation $f(x) = 0$ (et aussi (E)) admet au moins une solution.
D'autre part, $f'(x) = 1 + 2xe^{1-x^2} > 0$ pour $\in [0; 1]$ ainsi f est strictement croissante et l'équation $f(x) = 0$ (et aussi (E)) admet une et une seule solution.

2. Écrire l'**algorithme** de la méthode de Dichotomie permettant d'obtenir une valeur approchée de $\overline{r}$ avec une **précision** d'au moins ε.
Faire les calculs pour $\varepsilon = 2^{-2}$, **localiser** la solution dans un intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$ et donner une **valeur approchée** de $\overline{r}$.
Initialisation : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ Tant que $|b_k - a_k| > \varepsilon$ Faire $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$
Si $f(a_k)f(x_k) < 0$ alors $\begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ b_{k+1} = x_k \end{cases}$ Sinon $\begin{cases} a_{k+1} = x_k \\ b_{k+1} = b_k \end{cases}$ L'algorithme se termine lorsque $|b_k - a_k| \leq \varepsilon$ et $\overline{r} \in [b_k; a_k]$ et $\overline{r} \simeq \frac{b_k+a_k}{2}$
$\overline{r} \in [a_k; b_k]$ et $\overline{r} \simeq \frac{a_k+b_k}{2}$.
$a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $x_0 = 0.5$ $|b_0 - a_0| = 1 > \varepsilon = 2^{-2} = 0.25$ et $f(0.5) = -0.6170 > 0$
$f(0)f(0.5) > 0 \Longrightarrow a_1 = 0.5$, $b_1 = 1$, $x_1 = 0.75$ $|b_1 - a_1| = 0.5 > \varepsilon = 0.25$ et $f(0.75) = 0.2011$
$f(0.5)f(0.75) < 0 \Longrightarrow a_2 = 0.5$, $b_2 = 0.75$, $x_2 = 0.625$ $|b_2 - a_2| = 0.25 \leq \varepsilon = 0.25$
On en déduit : $\overline{r} \in [0.5; 0.75]$ et $\overline{r} \simeq 0.625$ à 2^{-2} près.

3. On souhaite appliquer la **méthode de Newton** sur l'intervalle $[0, 1]$ et on note $(t_n)_n$ la suite générée par cette méthode. Rappeler le **principe géométrique** de la méthode et exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.
Calculer $f''(0.5)$ et $f''(0.75)$. Que peut-on dire par rapport à la **convergence** de cette méthode.
La méthode de Newton consiste à construire une suite $(t_n)_n$ à partir d'une valeur initiale bien choisie t_0 et en déterminant successivement les termes de la manière suivante :
Pour déterminer le terme t_{k+1}, on trace la tangente T_k à la courbe de f au point $(t_k, f(t_k))$, cette droite T_k coupe l'axe des abscisses au point $(t_{k+1}, 0)$. On a T_k : $\quad y = f'(t_k)(x - t_k) + f(t_k)$
Si la tangente T_k est non horizontale ($f'(t_k) \neq 0$ ou généralement $f'(x) \neq 0$), le point d'intersection de T_k et l'axe d'abscisses est de coordonnées $(t_{k+1}, 0)$ donc :

$$0 = f'(t_k)(t_{k+1} - t_k) + f(t_k) \Longrightarrow t_{k+1} = t_k - \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}$$

donc :

$$t_{k+1} = \frac{-1 + (1 + 2t_k^2)e^{1-t_k^2}}{1 + 2t_k e^{1-t_k^2}}$$

$$f''(x) = 2(1-2x^2)e^{1-x^2})$$
$$f''(0.5) = 2.1170 \qquad f''(0.75) = -0.3872$$

On remarque que $f''(x)$ change de signe dans l'intervalle $[0,1]$ donc une des conditions nécessaires n'est pas vérifiée et nous ne pouvons rien déduire par rapport à la convergence de la méthode.

4. Sur l'intervalle $[0;1]$, on considère **la modification de la méthode de Newton** qui consiste à remplacer la tangente T_n, au point $(t_n, f(t_n))$, par la droite D_n parallèle à la tangente T_0 (au point $(t_0, f(t_0)))$ et qui passe par $(t_n, f(t_n))$. Ainsi t_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la droite D_n avec l'axe des abscisses (OX). Faire un schéma et exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.

   D et T_0 sont parallèles sont elles ont le même coefficient directeur donc :

   $D: \quad y = f'(t_0)x + b$ et comme $(t_n, f(t_n)) \in D$ alors :
$$f(t_n) = f(t_0)t_n + b \Longrightarrow b = f(t_n) - f'(t_0)t_n$$
$$D: \quad y = f'(t_0)x + f(t_n) - f'(t_0)t_n$$

   La droite D est non horizontale ($f'(t_0) \neq 0$), le point d'intersection de D et l'axe d'abscisses est de coordonnées $(t_{k+1}, 0)$ donc :
$$f'(t_0)t_{n+1} + f(t_n) - f'(t_0)t_n = 0 \Longrightarrow t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_0)}$$

Exercice 2 (2.5+1.5=4 Points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)^3 - 1$

1. En utilisant la **méthode directe**, déterminer le **polynôme d'interpolation** de f, noté P, sur la base des points : -1, 0 et 1. Utiliser P pour donner une valeur **approchée** de $f(-\frac{1}{2})$ et calculer la valeur **exacte de l'erreur** commise au point $x = -\frac{1}{2}$.

   P est un polynôme de degré 2 on peut l'écrire $P(x) = ax^2 + bx + c$ et comme $P(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, 1, 2$ on obtient le système suivant :
$$\begin{cases} P(-1) = a - b + c = f(-1) = -1 \\ P(0) = c = f(0) = 0 \\ P(1) = a + b + c = f(1) = 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a - b = -1 \\ a + b = 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

   Donc :
$$P(x) = 3x^2 + 4x$$
$$f(-0.5) \simeq P(-0.5) = -1.25$$
$$E_P(-0.5) = |f(-0.5) - P(-0.5)| = |-0.875 - (-1.25)| = 0.375$$

2. Sans faire de calcul supplémentaire, donner le **polynôme d'interpolation** de f, noté Q, sur la base des points : -2, -1, 0 et 1. Que peut-on dire de l'**erreur** au point $x = -\frac{1}{2}$ (par rapport à Q).

   Le polynôme Q est de degré 3 (4 points) et comme f est un polynome de degré 3 alors $Q(x) = f(x)$ et l'erreur est par conséquent nulle $E_Q(-0.5) = 0$

Exercice 3 (1.5+2+1.5=5 Points) :

Soient $x_0 = -2$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ et soit f une fonction continue sur $[-2;1]$.

1. On donne $L_0(x) = \frac{1}{6}(x^2 - x)$, déterminer les deux autres **polynômes caractéristiques de Lagrange** $L_1(x)$ et $L_2(x)$ puis formuler le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0, x_1 et x_2 (noté P).
$$L_1(x) = \frac{(X+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)} = \frac{-1}{2}(x^2 + x - 2) \qquad L_2(x) = \frac{(x+2)(x-0)}{(1+2)(1-0)} = \frac{1}{3}(x^2 + 2x)$$

2. On donne $\int_{-2}^{1} L_1(x)dx = \frac{9}{4}$, calculer $\int_{-1}^{2} L_0(x)dx$ et $\int_{-1}^{2} L_2(x)dx$. Puis, en **Intégrant**, sur l'intervalle $[-2;1]$, le polynôme d'interpolation, P, déduire une **quadrature** $\widetilde{I}$ de l'intégrale $I = \int_{-2}^{1} f(t)dt$. On donne $\omega_0 = \frac{1}{4}$, préciser les deux autres **poids** ω_1 et ω_2.

$$\int_{-2}^{1} L_0(x)dx = \frac{1}{6}[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_{-2}^{1} = \frac{3}{4} \qquad \int_{-2}^{1} L_2(x)dx = \frac{1}{3}[\frac{x^3}{3} + x^2]_{-2}^{1} = 0$$

$$\widetilde{I} = \int_{-2}^{1} P(t)dt = f(-2)\int_{-2}^{1} L_0(t)dt + f(0)\int_{-2}^{1} L_1(t)dt + f(1)\int_{-2}^{1} L_2(t)dt$$

$$\widetilde{I} = \frac{3}{4}f(-2) + \frac{9}{4}f(0) + 0f(1) = 3(\frac{1}{4}f(-2) + \frac{3}{4}f(0) + 0f(1))$$

$$\omega_0 = \frac{1}{4} \quad \omega_1 = \frac{3}{4} \quad \omega_2 = 0$$

3. Utiliser la méthode **de Simpson** pour formuler une deuxième approximation de l'intégrale I (notée $\widehat{I}$). Expliquer la différence entre $\widetilde{I}$ et $\widehat{I}$.

$$\widehat{I} = 3(\frac{1}{6}f(-2) + \frac{4}{6}f(-0.5) + \frac{1}{6}f(1))$$

La méthode de Simpson est une méthode Newton-cotes (les points sont équidistants -2, -0.5 et 1 car $-0.5-(-2) = 1.5$ et $1-(-0.5) = 1.5$) alors que la première quadrature est obtenue sur la base de trois points non équidistants (-2, 0 et 1 car $0-(-2) = 2$ et $1-0 = 1$).

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT.