

Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)

Toutes les réponses doivent être justifiées et bien rédigées

Exercice 1 (2+1.5=3.5 POINTS) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$

1. En utilisant la **méthode de Newton**, déterminer le **polynôme d'interpolation** de f , noté P , sur la base des points : $-2, -1$ et 1 . Utiliser P pour donner une valeur **approchée** de $f(0)$.
2. Calculer la valeur **exacte de l'erreur** commise au point $x = 0$ puis utiliser la formule du cours. Comparer et Expliquer.

Exercice 2 (2+3+3.5+3.5=12 POINTS) :

Soit (E) l'équation suivante : $(E) \quad \ln(1+x) = 1 - x^2$

1. Étudier, sur l'intervalle $[0; 2]$, les **variations** de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1+x)$. En déduire que l'équation (E) admet **une et une seule solution**, notée x^* , dans l'intervalle $[0; 2]$;
2. Appliquer la méthode de **Dichotomie** pour **localiser** la solution x^* dans un intervalle $[a; b]$ d'**amplitude** $A = b - a = 0.5$. Déterminer le **nombre d'itérations** nécessaire pour pouvoir localiser la solution dans un intervalle d'amplitude $A = 0.0625$;
3. On note $(y_n)_n$ la suite générée par la **méthode de Newton**.
 - a) Écrire l'**algorithme**, de cette méthode, permettant d'obtenir une **précision** d'au moins 10^{-6} ;
 - b) Justifier un **bon choix** de l'intervalle initial et de la **valeur initiale** y_0 puis calculer y_1 ;
 - c) Étudier la **convergence** de cette méthode et expliquer pourquoi on peut la considérer comme la meilleure méthode ?
3. Sur l'intervalle $[0.5; 1]$, on considère le **schéma numérique** définissant la suite $(t_n)_n$ telle que :

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_n = g(t_{n-1}) = \sqrt{1 - \ln(1 + t_{n-1})} \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

On donne : $\sup_{x \in [0.5; 1]} |g'(x)| = 0.45$

- a) **Vérifier** que ce schéma peut être utilisé pour déterminer une valeur approchée de x^* (la solution de (E)).
Identifier une méthode classique qui peut générer ce schéma et la suite $(t_n)_n$;
- b) Étudier la **convergence** de ce schéma;
- c) Formuler une **majoration** de l'erreur $|t_n - x^*|$ puis déterminer le **nombre d'itérations** nécessaire pour obtenir une précision d'au moins 10^{-10} .

Exercice 3 (1+2+1.5=4.5 POINTS) :

Soient x_0 et x_1 deux points tels que $x_0 = -1$ et $x_1 = 2$ et soit f une fonction continue sur $[-1; 2]$.

1. Déterminer les deux **polynômes caractéristiques de Lagrange** $L_0(x)$ et $L_1(x)$ puis formuler le **polynôme d'interpolation** de f sur la base des points x_0 et x_1 (noté Q);
2. **Intégrer**, sur l'intervalle $[-1; 2]$, les deux polynômes de Lagrange et le polynôme Q et déduire une **quadrature** $\tilde{I}$ de l'intégrale $I = \int_{-1}^2 f(t)dt$, en précisant les deux **poids** ω_0 et ω_1 .
Peut-on associer cette quadrature à une **méthode classique** ? Laquelle ?
3. Utiliser la méthode **des trapèzes** (exactement 3 trapèzes) pour formuler une deuxième approximation l'intégrale I (notée $\hat{I}$). Sans faire de calcul supplémentaire, comparer $\tilde{I}$ et $\hat{I}$ et expliquer.