CONTRÔLE — 28 février 2021 — 2020 - 2021

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (2+3+3+2=10 POINTS) : Soit (E) l'équation suivante : $(E) \quad x^3 - 3 = e^{-x}$

Notons : $f(x) = x^3 - e^{-x} - 3$ **et** $g(x) = \sqrt[3]{e^{-x} + 3}$. **Si** $1 \leq x \leq 2$ **alors :** $f''(x) > 0$
et $g'(1) \leq g'(x) \leq g'(2)$ avec $g'(1) \simeq -0.05$ et $g'(2) \simeq -0.02$

1. Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule racine**, r_0, dans l'intervalle $[a_0, b_0] = [1, 2]$;

   La fonction f est continue (somme de deux fonctions continues) et nous avons : $f(1) = -2 - e^{-1} = -2.3678 < 0$ et $f(2) = 5 - e^{-2} \simeq 4.8646 > 0$ donc $f(1)f(2) < 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[1, 2]$. D'autre part, $f'(x) = 3x^2 + e^{-x} > 0$, la fonction f est monotone et le théorème de la bijection montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $[1, 2]$.
   Finalement, $(E) \quad x^3 - 3 = e^{-x} \Longleftrightarrow x^3 - e^{-x} - 3 = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$ d'ou le résultat.

2. Appliquer **deux itérations** de la méthode de **Dichotomie**, **localiser** la racine r_0 dans un intervalle $[a_2, b_2]$ puis donner une **majoration de l'erreur** $|x_2 - r_0|$. Déterminer le **nombre d'itérations**, k, nécessaire pour obtenir une solution approchée, x_k, avec une **précision** $\varepsilon = 2^{-10}$?

   $[a_0, b_0] = [1, 2] \;\; x_0 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \;\; f(x_0) = f(1.5) = 0.1518$
   $[a_1, b_1] = [1, 1.5] \;\; x_1 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25 \;\; f(x_1) = f(1.25) = -1.3333$
   $[a_2, b_2] = [1.25, 1.5] \;\; x_2 = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$
   $r_0 \in [1.25, 1.5]$ et nous avons : $|x_2 - r_0| \leq |b_2 - a_2| = 0.25$ ou $|x_2 - r_0| \leq \frac{2-1}{2^2} = 0.25$
   Nous avons : $|x_k - r_0| \leq \frac{2-1}{2^k}$ pour obtenir la précision souhaitée, il suffit de choisir k vérifiant :

   $$\frac{1}{2^k} \leq 2^{-10} \Longrightarrow 2^{-k} \leq 2^{-10} \Longrightarrow k \geq 10$$

   Il suffit d'exécuter 10 itérations pour obtenir la précision ε.

3. Soit $(y_n)_n$ la suite générée par la **méthode de Newton**. Écrire l'**algorithme** de la méthode (avec une précision $\varepsilon = 2^{-10}$), justifier un **bon choix** de $y_0 \in [a_2, b_2]$ et étudier la **convergence** de cette méthode. Exécuter les **deux premières itérations** ;

   Algorithme :
   y_0 valeur initiale bien choisie
   Tant que $|f(y_n)| > 2^{-10}$ faire :

   $$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} = y_n - \frac{y_n^3 - e^{-y_n} - 3}{3y_n^2 + e^{-y_n}} = \frac{2y_n^3 + (y_n + 1)e^{-y_n} + 3}{3y_n^2 + e^{-y_n}}$$

   Nous avons $f''(x) > 0$ pour assurer l'une des conditions de convergence, il faut choisir $y_0 \in [1.25, 1.5]$ avec $f(y_0) > 0$ nous pouvons choisir $y_0 = 1.5$

   Nous avons : f est de classe $\mathcal{C}^2$ (polynôme et exponentielle)
   $f'(x) > 0 \;\; f''(x) > 0$ et $f''(x)f(1.5) > 0$
   Les conditions suffisantes de convergence sont vérifiées et $y_n \longrightarrow r_0$.

$y_0 = 1.5$ et $y_1 = \frac{2y_0^3+(y_0+1)e^{-y_0}+3}{3y_0^2+e^{-y_0}} = 1.4782$ et $y_2 = \frac{2y_1^3+(y_1+1)e^{-y_1}+3}{3y_1^2+e^{-y_1}} = 1.4779$

4. Soit $(\theta_n)_n$ la suite définie par : $\theta_n = g(\theta_{n-1})$ et $\theta_0 \in [1, 2]$.
Vérifier que r_0 est un **point fixe** de g et **montrer** que $(\theta_n)_n$ **converge** vers r_0. Préciser le nombre d'itérations qu'il faut exécuter pour obtenir une précision $\varepsilon = 2^{-10}$.

r_0 est solution de (E) donc (rappelons que $r_0 \in [1, 2]$)) :

$$r_0^3 - 3 = e^{-r_0} \Longrightarrow r_0^3 = e^{-r_0} + 3 > 0 \Longrightarrow r_0 = \sqrt[3]{e^{-r_0} + 3} = g(r_0)$$

donc r_0 est point fixe de g.
D'après les données, $g'(x) < 0$ sur $[1, 2]$, $g(1) = \sqrt[3]{e^{-1} + 3} \simeq 1.9477 < 2$ et $g(2) = \sqrt[3]{e^{-2} + 3} \simeq 1.3956 > 1$
Donc : $g([1, 2]) = [g(2), g(1)] \subset [1, 2]$
D'autre part : $g'(1) \le g'(x) \le g'(2) \Longrightarrow |g'(x)| \le \max(|g'(1)|, |g'(2)|) = |g'(1)|$
$\Longrightarrow \sup_{x\in[1,2]} |g'(x)| \le L = |g'(1)| \in]0, 1[$
On en déduit que g est contractante de rapport L et par conséquent, les condition de convergence de la méthode de point fixe sont vérifiées et on a :

$$|\theta_n - r_0| = |g(\theta_{n-1} - g(r_0)| \le L|\theta_{n-1} - r_0|$$

Par induction ou par récurrence, nous obtenons :

$$|\theta_n - r_0| \le L^n|\theta_0 - r_0| \le L^n$$

car θ_0 et r_0 sont dans $[1, 2]$
On en déduit, finalement, que la suite $(\theta_n)_n$ converge vers r_0.
Pour obtenir la précision souhaitée, il suffit de choisir n tel que :

$$L^n \le 2^{-10} \Longrightarrow n \ln(L) \le -10 \ln(2) \Longrightarrow n \ge -10\frac{\ln(2)}{\ln(L)} \simeq 2.3137$$

IL faut au moins trois itérations.

Exercice 2 (2+2+2+2+2=10 POINTS) : L'objectif de cet exercice est l'étude de la méthode de **Newton-cotes** ($n = 2$).

1. **Cas particulier :** l'Intervalle $[-1,1]$. Recopier et compléter le tableau suivant (détailler les calculs); $h = \frac{1-(-1)}{2} = 1$ $x_i = -1 + ih$ $x_0 = -1$ $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$

$$L_0(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$
$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = 1-x^2$$
$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2+x}{2}$$
$$\int_{-1}^{1} L_0(x)dx = [\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$
$$\int_{-1}^{1} L_1(x)dx = [x - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$
$$\int_{-1}^{1} L_2(x)dx = [\frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
$L_i(x)$	$\frac{x^2-x}{2}$	$1-x^2$	$\frac{x^2+x}{2}$
$\int_{-1}^{1} L_i(x)dx$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$

2. Formuler $P_2(x)$ le **polynôme d'interpolation** d'une fonction f sur la base des points x_0, x_1 et x_2. Puis, utiliser $P_2(x)$ pour déterminer une **approximation**, avec une **quadrature** $\widetilde{I}_{[-1,1]}$, de l'intégrale $I_{[-1,1]} = \int_{-1}^{1} f(x)dx$;

$$P_2(x) = f(-1)L_0(x) + f(0)L_1(x) + f(1)L_2(x)$$
$$\widetilde{I}_{[-1,1]} = \int_{-1}^{1} P_2(x)dx = f(-1)\int_{-1}^{1} L_1(x)dx + f(0)\int_{-1}^{1} L_1(x)dx + f(1)\int_{-1}^{1} L_2(x)dx$$
$$\widetilde{I}_{[-1,1]} = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) = 2\left(\frac{f(-1)}{6} + \frac{4f(0)}{6} + \frac{f(1)}{6}\right)$$

3. On note $M_0 = \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(3)}(x)|$. Exprimer l'**erreur d'interpolation** $E_2(x) = |f(x) - P_2(x)|$ et donner une **majoration** de cette erreur. En déduire une majoration de l'**erreur d'intégration** $E_{[-1,1]} = |I_{[-1,1]} - \widetilde{I}_{[-1,1]}|$ (on donne $\int_{-1}^{1} |x^3 - x|dx = \frac{1}{2}$);
Il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que :

$$E_2(x) = |f(x) - P_2(x)| = \frac{1}{3}|(x+1)(x-0)(x-1)||f^(3)(\xi)|$$

$$E_2(x) \le \frac{1}{3}|x^3 - x| \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(3)}(x)| = \frac{M_0}{3}|x^3 - x|$$

et

$$E_{[-1,1]} = |I_{[-1,1]} - \widetilde{I}_{[-1,1]}| = |\int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} P_2(x)dx| = |\int_{-1}^{1}(f(x) - P_2(x))dx|$$

$$E_{[-1,1]} \le \int_{-1}^{1} |f(x) - P_2(x)|dx \le \frac{M_0}{3}\int_{-1}^{1} |x^3 - x|dx = \frac{M_0}{6}$$

4. **Cas général** : l'intervalle $[a,b]$. Utiliser un changement, de variables, **affine** et montrer que :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \widetilde{I}_{[a,b]} = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

On pose :

$$x = mt + p$$

on a : $a = -m + p$ et $b = m + p$ donc : $p = \frac{a+b}{2}$ et $m = \frac{b-a}{2}$

Finalement : $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$ et $dx = \frac{b-a}{2}dt$ et :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})\frac{b-a}{2}dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 \underbrace{f(\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2})}_{g(t)} dt$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}\left(2(\frac{g(-1)}{6} + \frac{4g(0)}{6} + \frac{g(1)}{6})\right)$$

$g(-1) = f(a)$ $g(0) = f(\frac{a+b}{2})$ et $g(1) = f(b)$ et par conséquent :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \widetilde{I}_{[a,b]} = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$

5. On se donne une **discrétisation uniforme** de l'intervalle $[a, b]$ (4 sous-intervalles, avec le pas $h = \frac{b-a}{4}$). Donner une approximation $\widetilde{I}^4_{[a,b]}$ de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant une **méthode composite** de la quadrature précédente.

   $x_i = a + ih$ pour $i = 0, ..., 4$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \simeq \frac{x_2 - x_0}{6}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)) + \frac{x_4 - x_2}{6}(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4))$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4))$$

QS (**Question supplémentaire : +1.5 Points**) Un **problème de Cauchy** (PC) est défini par une équation différentielle $y' = h(t, y)$ et une condition initiale $y(x_0) = y_0$ (On suppose que (PC) admet exactement une solution). **Intégrer** l'équation différentielle sur l'intervalle $[x_i, x_{i+2}]$ puis utiliser la **quadrature précédente** et l'**approximation** $y(x_j) \simeq y_j$ pour établir une relation entre y_{i+2}, y_{i+1} et y_i. Transformer cette relation en une **méthode explicite** permettant le calcul d'une solution approchée de ce problème.

Voir support du cours