CONTRÔLE — 28 février 2021 — 2020 - 2021

*Présenter les résultats avec **quatre chiffres** après la virgule (**par défaut et sans arrondi**)*

Exercice 1 (2+3+3+2=10 POINTS) : Soit (E) l'équation suivante : $(E) \quad x^3 - 3 = e^{-x}$

Notons : $f(x) = x^3 - e^{-x} - 3$ **et** $g(x) = \sqrt[3]{e^{-x} + 3}$. **Si** $1 \leq x \leq 2$ **alors :** $f''(x) > 0$
et $g'(1) \leq g'(x) \leq g'(2)$ avec $g'(1) \simeq -0.05$ et $g'(2) \simeq -0.02$

1. Vérifier que l'équation (E) admet **une et une seule racine**, r_0, dans l'intervalle $[a_0, b_0] = [1, 2]$;
2. Appliquer **deux itérations** de la méthode de **Dichotomie**, **localiser** la racine r_0 dans un intervalle $[a_2, b_2]$ puis donner une **majoration de l'erreur** $|x_2 - r_0|$. Déterminer le **nombre d'itérations**, k, nécessaire pour obtenir une solution approchée, x_k, avec une **précision** $\varepsilon = 2^{-10}$?
3. Soit $(y_n)_n$ la suite générée par la **méthode de Newton**. Écrire l'**algorithme** de la méthode (avec une précision $\varepsilon = 2^{-10}$), justifier un **bon choix** de $y_0 \in [a_2, b_2]$ et étudier la **convergence** de cette méthode. Exécuter les **deux premières itérations** ;
4. Soit $(\theta_n)_n$ la suite définie par : $\theta_n = g(\theta_{n-1})$ et $\theta_0 \in [1, 2]$.
   Vérifier que r_0 est un **point fixe** de g et **montrer** que $(\theta_n)_n$ **converge** vers r_0. Préciser le nombre d'itérations qu'il faut exécuter pour obtenir une précision $\varepsilon = 2^{-10}$.

Exercice 2 (2+2+2+2+2=10 POINTS) :

L'objectif de cet exercice est l'étude de la méthode de **Newton-cotes** ($n = 2$).

1. **Cas particulier :** l'Intervalle $[-1, 1]$. Calculer le pas h puis recopier et compléter le tableau suivant (détailler les calculs) ;
2. Formuler $P_2(x)$ le **polynôme d'interpolation** d'une fonction f sur la base des points x_0, x_1 et x_2. Puis, utiliser $P_2(x)$ pour déterminer une **approximation**, avec une **quadrature** $\widetilde{I}_{[-1,1]}$, de l'intégrale $I_{[-1,1]} = \int_{-1}^{1} f(x)dx$;

i	0	1	2
x_i	??	??	1
$L_i(x)$	??	$1 - x^2$	??
$\int_{-1}^{1} L_i(x)dx$	$\frac{1}{3}$	??	??

3. On note $M_0 = \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(3)}(x)|$. Exprimer l'**erreur d'interpolation** $E_2(x) = |f(x) - P_2(x)|$ et donner une **majoration** de cette erreur. En déduire une majoration de l'**erreur d'intégration** $E_{[-1,1]} = |I_{[-1,1]} - \widetilde{I}_{[-1,1]}|$ (on donne $\int_{-1}^{1} |x^3 - x|dx = \frac{1}{2}$) ;
4. **Cas général** : l'intervalle $[a, b]$. Utiliser **un changement de variable affine** (entre $[a, b]$ et $[-1, 1]$) pour montrer que :
$$\int_a^b f(x)dx \simeq \widetilde{I}_{[a,b]} = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$$
5. On se donne une **discrétisation uniforme** de l'intervalle $[a, b]$ (4 **sous-intervalles**, avec le pas $h = \frac{b-a}{4}$). Donner une approximation $\widetilde{I}^4_{[a,b]}$ de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant une **méthode composite** de la quadrature précédente.

QS (**Question supplémentaire : +1.5 Points**) Un **problème de Cauchy** (PC) est défini par une équation différentielle $y' = h(t, y)$ et une condition initiale $y(x_0) = y_0$ (On suppose que (PC) admet exactement une solution). **Intégrer** l'équation différentielle sur l'intervalle $[x_i, x_{i+2}]$ puis utiliser la **quadrature précédente** et l'**approximation** $y(x_j) \simeq y_j$ pour établir une relation entre y_{i+2}, y_{i+1} et y_i. Transformer cette relation en une **méthode explicite** permettant le calcul d'une solution approchée de ce problème.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT.