——————-REMARQUES ET COMMENTAIRES ————-*mercredi 10 janvier 2018*—
——2017 - 2018—

Présenter les valeurs approchées avec 4 chiffres après la virgule (par défaut).
Calculatrice non programmable autorisée (échange interdit). Documents et téléphones portables interdits

Il faut commencer par lire les consignes et l'examen en entier ! !

Les minutes de lecture ne sont pas perdues mais permettent de choisir les questions les plus abordables.

Plusieurs réponses avec deux ou huit chiffres ! !

Exercice 1 (8.5 POINTS) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$

1. Montrer que la fonction f admet un zéro unique, noté r, dans $[0, 1]$;
   La question est simple pourtant : Le TVI ne donne que l'existence ! pour l'unicité, il faut la monotonie ! !
   La dérivée est positive et aucun calcul supplémentaire n'est demandé (la dérivée seconde, Δ,...).
   Les calculs supplémentaires inutiles constituent une perte de temps ! ! !
2. **Sans vérifier les conditions de convergence**, écrire la **suite récurrente** $(x_n)_n$ obtenue en utilisant la **méthode de Newton** pour approcher r. En prenant $x_0 = 1$ calculer x_1 et x_2 et x_3. Que peut-on constater ?
   Deux éléments pour cette question :
   Il est clairement mentionné qu'il ne faut pas vérifier les conditions de convergence pourtant plusieurs étudiants l'ont fait et cela demande un temps considérable ! !
   Dans une suite récurrente on exprime x_{n+1} en fonction de x_n ! ! bien sur à partir de la définition de la méthode de Newton, la démarche a été faite dans les TDs et constitue une simplification très utile pour les calculs et le reste des questions ! !
   Si on ne répond pas correctement à cete question, les autres demanderont plus calcul et de temps ! ! !
3. Appliquer en **trois itérations**, sur l'intervalle $[0, 1]$, la méthode de **dichotomie** et comparer la dernière valeur obtenue avec x_3 ;
   Le principe de la méthode de dichotomie consiste à diviser l'intervalle à chaque itération mais les tests d'arrêt sont nombreux et il faut appliquer le test demandé et ne pas reciter l'exercice de TD ! !
   La question demande trois itérations ! ! il n'y a pas d'erreur à calculer et ca sert à rien de calculer $|b_k - a_k|$
   L'initialisation a_0, b_0, x_0 ne constitue pas une itération ! ! donc il faut donner les valeurs x_0,...x_3 et ne pas s'arrêter à x_2 ! !
   La consigne au début précise qu'il faut donner les valeurs approchées avec 4 chiffres donc ca sert à rien de faire un long calcul exact avec des fractions ! !
   Il faut gagner du temps en utilisant la calculatrice une seule fois pour chaque valeur (est il nécessaire de rappeler combien de fois j'ai répété cette phrase ! ! !)
   Le test d'arrêt de la méthode de dichotomie peut prendre plusieurs forme : nombre d'itérations, majoration de l'erreur, erreur d'incrément, amplitude de l'intervalle,... La bonne comprehension de la méthode aidera à répondre correctement à la question posée et non pas reprendre la question du TD et faire des calculs inutiles jusqu'au a_8, b_8 dans ce cas évidement le temps ne suffira pas ! !

4. Déterminer le nombre d'itérations à exécuter pour obtenir une valeur approchée de r à 10^{-5} près ;
   La question est littéralement tirée d'un exercice TD, pourtant plusieurs étudiants ont essayé de continuer les calculer a_k b_k x_k jusqu'au trouver la solution avec cette précision souhaitée et ils ont fait 3 ou 4 pages de calculs sans pouvoir arriver à une réponse ! ! d'autres ont trouvé $n = 16$, $n = 16,6$, $n = 5$ ou même $n = -16$. La formule est toujours sous forme $n \geq ...$ et comme n est un entier, on prend la premiere plus grande valeur entière !
5. Par la suite, on se propose de démontrer que la suite $(x_n)_n$ définie dans [2.] converge vers r :
   Il n'y a aucune question ici ! !
   a. Étudier, sur $[0, +\infty[$, les variations de la fonction h définie par : $h(x) = 2x^3 - 3rx^2 + 1 - r$ et déduire **son signe** ;
      Etude d'un polynôme avec un parameter, la dérivée est factorisable $6x(x - r)$ et le signe dépend de $(x - r)$ qui est une fonction affine qui change de signe en r ! ! Ce n'est pas nécessaire de calculer la dérivée seconde, ni de calculer Δ,...
      Faut il rappeler que r est une constante et que la dérivée de r est 0 ? ? ? Faut il rappeler que r n'est pas égale 0 ou 1 ou x_3 ? ? ?
   b. On suppose que $x_0 \in [0, 1]$. Montrer par recurrence que $x_n \in [r, 1]$ pour tout $n \geq 1$;
      La suite récurrente est définie auparavant, la méthode est bien précisée et ce n'est pas la première fois qu'un étudiant utilisera la récurrence ! !
      La seule difficulté est d'utiliser les variations pour déduire le signe de $h(x)$! !
      La suite est définie dans la question 2 et non pas une nouvelle application de la méthode de Newton en utilisant h ! !
      On ne démontre pas une propriété générale par un exemple ! ! !

   c. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est décroissante et conclure.
      On ne démontre pas une propriété générale par un exemple ! ! !
      Toute suite décroissante et minorée est convergente ! ! ! !

Exercice 2 (5 Points) :

Soit (P_C) le problème de Cauchy donné par : (P_C) $\begin{cases} y'(t) = -y(t) + e^t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

1. Montrer que (P_C) admet une solution unique et résoudre ce problème (solution exacte) ;
   Le problème admet une seule solution si la fonction $f(t, y) = -y + e^t$ est Lipschitizienne par rapport à la deuxième variable. Pour vérifier la propriété la première variable t doit être fixe et la deuxième variable prendera les deux valeurs y_1, y_2 avec :

   $$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 - y_2|$$

   L'équation est une équation différentielle linéaire du 1er ordre avec condition initiale ! ! Les étapes de résolution :
   Résoudre l'équation sans second membre : $y' = -y$
   Trouver une solution particulière : variation de la constante
   Formuler la solution générale comme somme des deux (en fonction d'une constante k) puis utiliser la condition initiale pour exprimer k en fonction de y_0
   Pour un rappel, se référer au cours Analyse 2 ou à l'exercice presque identique de la série 3 ! ! !

2. Soit $h > 0$ un pas de temps donné, $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$ (ainsi $t_0 = 0$) et y_n une approximation de $y(t_n)$. Par la suite, on intègre l'équation différentielle entre t_n et t_{n+1} puis on utilise **la méthode du trapèze** pour approcher l'intégrale sur $[t_n,\ t_{n+1}]$ du **second membre** ;
   Donner le schéma permettant de calculer y_{n+1} à partir de y_n (en fonction de y_n, n et h).
   Lorsque nous avons une égalité $f = g + h$ on en déduit $\int f = \int (g + h)$ et non pas $\int f = (\int g) + h$
   Le second membre de l'équation est $-y(t) + e^t$ et non pas $y(t)$! !
   La question demande d'écrire :
   $$\int y'(t)dt = \int (-y + e^t)dt$$
   et d'utiliser la méthode du trapèze pour le second membre ! !

Exercice 3 (6.5 Points) :

On considère une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ que l'on suppose assez régulière. On souhaite calculer une valeur approchée de $I = \int_a^b f(x)dx$ par la méthode du trapèze composite.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = \frac{b-a}{m}$ et $x_i = a + ih$ et $\widetilde{I}(m, f)$ la valeur approchée de $I = \int_a^b f(x)dx$ donnée par la méthode du trapèze **composite** (ou la **méthode des** m **trapèzes**).

Il n'y a aucune question ! ! Seulement des Notations et une explication de la démarche ! !

1. Cas $m = 1$
   a. Donner le polynôme $P_1(x)$ interpolant f en $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, formuler l'erreur d'interpolation $e_f(x) = |f(x) - P_1(x)|$ en fonction de a, b, x et f'' et donner une majoration de $e_f(x)$ pour $x \in [a, b]$;
   Le polynôme de degré 1 à partir de deux points en fonction de a, b, $f(a)$, $f(b)$, on utilise l'une des deux méthodes (se référer à un exercice de la série 2) ! ! Il n' y a pas de valeurs 0 et 1 dans la question (le danger d'apprendre un exercice TD sans le comprendre) ! !
   L'erreur est toujours positive et elle est définie par une valeur absolue ! ! $x \in [a, b] \Rightarrow (x - b) \leq 0 \Rightarrow |x - b| = b - x$! ! !
   La majoration de l'erreur est obtenue en remarquant que $|f''(\xi)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| = M$ et comme l'expression de f n'est pas connue, il n'y a pas de calcul supplémentaire ! !
   b. En intégrant $P_1(x)$, montrer que $\widetilde{I}(1, f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$;
   Il s'agit de calculer $\int_a^b$ d'un polynôme de degré 1 pour retrouver la formule et ne pas de reciter la formule ! ! ce calcul figure dans les TD (au lieu de $\int_a^b$ nous avons calculer $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$)
   c. On donne $\int_a^b (b-x)(x-a)dx = \frac{(b-a)^3}{6}$, déduire une bonne majoration de $E_{1,f} = \left|I - \widetilde{I}(1, f)\right|$.
   Il y a une différence entre l'erreur de l'integration qui est la différence entre les valeurs exacte et approchée de l'intégrale et l'erreur de l'interpolation qui est la différence entre f et P_1 et dépend de x ! !
   Il ne faut pas oublier les expressions de I et de $\widetilde{I}$, remplacer et utiliser la propriété bien connue : $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ puis utiliser la valeur donnée $\int_a^b (b - x)(x - a)dx = \frac{(b-a)^3}{6}$

2. On suppose maintenant que $m > 1$:
   a. En utilisant le résultat établi en [1.], sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, donner l'expression de $\widetilde{I}(m, f)$;
   La méthode des trapèzes consiste à utiliser la méthode du trapèze (T_i) sur chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ puis de faire la somme (voir cours ! ! !) et exercice TD (le même travail sur $[0, 1]$! !
   b. Démontrer la majoration de l'erreur : $E_{m,f} = \left|I - \widetilde{I}(m, f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$
   Cette question est relativement difficile et nécessite une bonne manipulation des outils mathématiques (voir solution)
3. Application : $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$. Calculer $\widetilde{I}(1, f)$ et $\widetilde{I}(2, f)$.
   $\widetilde{I}(1, f)$ **: méthode du trapèze**
   $\widetilde{I}(2, f)$ **méthode composite de deux trapèzes ! !**
   Les deux formules ne sont pas les mêmes ! ! !

Question facultative (+1 POINT) :

Soit f un polynôme de degré n, $(x_i)_{i=0,\dots,m}$ une famille de points distincts et $P_m(x)$ le polynôme d'interpolation de f par rapport aux points $(x_i)_{i=0,\dots,m}$, montrer que si $m \geq n$ alors $P_m(x) = f(x)$.