

Exercice I. (10 POINTS). (Les **six** questions sont **indépendantes**) :

1. **Résoudre**, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'**équation** suivante : $3u - 8v = 6$ avec $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$.

On a $PGCD(3, -8) = PGCD(3, 8) = 1$ divise 6, donc l'équation admet des solutions. Or, On peu remarquer, que $3 \times 10 - 8 \times 3 = 6$ (sinon, on peut utiliser l'algorithme généralisé d'Euclide). La soustraction des deux égalités donne :

$$3 \times (u - 10) - 8 \times (v - 3) = 0 \implies 3 \times (u - 10) = 8 \times (v - 3)$$

On en déduit que 3 divise $8 \times (v - 3)$ et comme 3 ne divise pas 8 alors, d'après le lemme de Cauchy, 3 divise $v - 3$ c'est à dire que $v = 3 + 3k, k \in \mathbb{Z}$. De la même manière : $u = 10 + 8k, k \in \mathbb{Z}$.
Donc :

$$S = \{10 + 8k, 3 + 3k\}, k \in \mathbb{Z}\}$$

2. Donner **tous** les nombres premiers, p , dont les **carrés** sont inférieurs à 617 ($p^2 \leq 617$), **décomposer** 1200 et 1234 en facteurs premiers puis **calculer** : $PGCD(1200; 1234)$ et $PPCM(1200; 1234)$.
On a : $2^2 = 4, 3^2 = 9, 5^2 = 25, 7^2 = 49, 11^2 = 121, 13^2 = 169, 17^2 = 289, 19^2 = 361, 23^2 = 529, 27^2 = 729$. Donc, les nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23.

D'autre part, on a : $1200 = 2 \times 600, 600 = 2 \times 300, 300 = 2 \times 150, 150 = 3 \times 50, 50 = 2 \times 25, 25 = 5^2$, donc :

$$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

et : $1234 = 2 \times 617$, or 617 est un nombre premier (n'est pas divisible pas les nombre premiers de 2 à 23, donc :

$$1200 = 2 \times 617$$

On en déduit :

$$PGCD(1200, 1234) = 2$$

et

$$PPCM(1200, 1234) = \frac{1200 \times 1234}{2} = 740400$$

3. Le **trichlorure de phosphore** est un composé de formule chimique PCl_3 (P : Phosphore, Cl :Chlore). Préciser la **géométrie moléculaire** de ce composé et lister ses **éléments de symétrie**.

La molécule est sous forme d'une pyramide avec une base $(CL)_1(CL)_2(CL)_3$ sous forme d'un triangle équilatéral et un sommet P , les éléments de symétrie :

Rotation dans la plan de la base $(CL)_1(CL)_2(CL)_3$ (O est le centre du triangle) :

$C_3 = R(O, \frac{\pi}{3})$ Rotation du centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans le centre positif : $C_{-3} = R(O, \frac{2\pi}{3}) = R(O, \frac{-\pi}{3})$ Rotation du centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans le centre positif ou d'angle $\frac{-\pi}{3}$ dans le sens négatif,

$Id = R(O, \pi)$ l'identité

$$C_3 \begin{pmatrix} P \rightarrow P \\ (CL)_1 \rightarrow (CL)_2 \\ (CL)_2 \rightarrow (CL)_3 \\ (CL)_3 \rightarrow (CL)_1 \end{pmatrix} \quad C_{-3} \begin{pmatrix} P \rightarrow P \\ (CL)_1 \rightarrow (CL)_3 \\ (CL)_2 \rightarrow (CL)_1 \\ (CL)_3 \rightarrow (CL)_2 \end{pmatrix} \quad Id \begin{pmatrix} P \rightarrow P \\ (CL)_1 \rightarrow CL_1 \\ CL_2 \rightarrow CL_2 \\ CL_3 \rightarrow CL_3 \end{pmatrix}$$

Réflexion par rapport aux plans passant par le sommet P :

σ_1 Réflexion par rapport au plan vertical qui passe par P et les milieu de $[CL_2, CL_3]$

σ_2 Réflexion par rapport au plan vertical qui passe par P et les milieu de $[CL_1, CL_3]$

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} P \rightarrow P \\ CL_1 \rightarrow CL_1 \\ CL_2 \rightarrow CL_3 \\ CL_3 \rightarrow CL_2 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 \begin{pmatrix} P \rightarrow P \\ CL_1 \rightarrow CL_3 \\ CL_2 \rightarrow CL_2 \\ CL_3 \rightarrow CL_1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 \begin{pmatrix} P \rightarrow P \\ CL_1 \rightarrow CL_2 \\ CL_2 \rightarrow CL_1 \\ CL_3 \rightarrow CL_3 \end{pmatrix}$$

4. Soit f la fonction **périodique**, de période 2π , définie, sur $] -\pi, \pi]$, par : $f(x) = x$. Donner le développement en **série de Fourier** de cette fonction.

La fonction f est impaire dans $A_n = 0$ et en utilisant une intégration par parties, on a :

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \left(-\pi \frac{\cos(n\pi)}{n} + \pi \frac{\cos(-n\pi)}{n} \right) = -\frac{2\pi(-1)^n}{n\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$$

Donc :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx)$$

5. Quelle est **la nature de la série** $\sum (2n)! \left(\frac{x^n}{(n!)^2} \right)$? Déterminer son **rayon de convergence**.

Série entière avec $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \rightarrow 4$$

Donc : $R = \frac{1}{4}$

6. **Compléter** : $\overline{10101}^2 + \overline{125}^{10} = \bullet\bullet\bullet^8$

On a :

$$\overline{10101}^2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 21$$

Donc

$$\overline{10101}^2 + \overline{125}^{10} = 21 + 125 = \overline{146}^{10}$$

et :

$$146 = 8 \times 18 + 2$$

$$18 = 8 \times 2 + 2$$

$$2 = 8 \times 0 + 2$$

Finalement :

$$\overline{10101}^2 + \overline{125}^{10} = \overline{222}^8$$

Exercice II. (5 POINTS) :

Soit $\oplus$ la **loi** définie sur $\mathbb{R}$ par : $a \oplus b = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ (pour tout a, b dans $\mathbb{R}$).

1. **Comparer** $a \oplus b$ et $b \oplus a$ puis **conclure** ;

$a \oplus b = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}}$ et $b \oplus a = (b^3 + a^3)^{\frac{1}{3}}$ or, la somme est commutative sur $\mathbb{R}$ donc :

$$b \oplus a = (b^3 + a^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}} = a \oplus b$$

On en déduit que la loi $\oplus$ est commutative.

2. **Montrer** que $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un **groupe Abélien** ;

Loi interne : Nous avons pour a et b dans $\mathbb{R}$, $a^3, b^3, a^3, b^3, a^3 + b^3$ et $(a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}}$ sont respectivement dans $\mathbb{R}$ (en utilisant les propriétés des lois sur $\mathbb{R}$) et par conséquent la loi est interne.

Élément neutre : On a : $a \oplus 0 = 0 \oplus a = (0^3 + a^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3)^{\frac{1}{3}} = a$ donc 0 est élément neutre.

Associativité : On a pour a, b et c dans $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que la somme $+$ est une loi associative sur $\mathbb{R}$:

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b^3 + c^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3 + ((b^3 + c^3)^{\frac{1}{3}})^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3 + (b^3 + c^3))^{\frac{1}{3}} = (a^3 + b^3 + c^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$(a \oplus b) \oplus c = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}} \oplus c = (((a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}})^3 + c^3)^{\frac{1}{3}} = ((a^3 + b^3) + c^3)^{\frac{1}{3}} = (a^3 + b^3 + c^3)^{\frac{1}{3}}$$

Donc, la loi $\oplus$ est associative.

Symétrique : Si b est symétrique de a alors $a \oplus b = b \oplus a = 0$ donc :

$$(a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}} = 0 \implies a^3 + b^3 = 0 \implies b^3 = -a^3 \implies b^3 = (-a)^3 \implies b = -a$$

Donc chaque élément a à un symétrique égal à $-a$.

Conclusion : $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un groupe associatif (ou Abélien).

3. Soit $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, \oplus)$ l'application définie par : $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Montrer que f est un **isomorphisme de groupes**.

Nous avons $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}, \oplus)$ sont deux groupes et pour x et y dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f(x + y) = (x + y)^{\frac{1}{3}} = ((x^{\frac{1}{3}})^3 + (y^{\frac{1}{3}})^3)^{\frac{1}{3}} = ((f(x))^3 + (f(y))^3)^{\frac{1}{3}} = f(x) \oplus f(y)$$

Donc f est un morphisme de groupes. Or,

$$\text{Ker } f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x^{\frac{1}{3}} = 0 \right\} = \{0\}$$

$$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = y\}$$

$$\text{Im } f = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^{\frac{1}{3}} = y \right\}$$

$$\text{Im } f = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = y^3\} = \mathbb{R}$$

Donc f est injective et surjective. Par conséquent f est un isomorphisme.

4. Soit la $\odot$ loi définie sur $\mathbb{R}$ par $a \odot b = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. **Est ce que** $(\mathbb{R}, \odot)$ est un groupe ?
1 n'as pas de symétrique car $1 \odot b = (1 + b^2)^{\frac{1}{2}} > 0$. Donc $(\mathbb{R}, \odot)$ n'est pas un groupe.

Exercice III. (5 POINTS) :

Soit :

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

1. **Vérifier** que $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$\text{On a : } 1 + x^2 > 1 \text{ donc } \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \text{ et } 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1.$$

2. **Étudier la convergence de la suite de fonctions** $(f_n(x))_n$;

La suite de fonctions est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{1+x^2}$, deux cas à distinguer :

$$x = 0 \implies q = 1 \text{ et } \lim f_n(x) = 1$$

$$x \neq 0 \implies 0 < q < 1 \text{ donc } \lim f_n(x) = 0$$

Donc la suite de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que les fonctions $f_n(x)$ sont continues tandis que f n'est pas continue, on en déduit que la convergence n'est pas uniforme.

3. Soit $F_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, que peut-on dire de la **convergence simple** de la suite de fonctions $(F_n(x))_n$?

Remarquons que $F_n(x) = x^2 f_n(x)$ et par conséquent, $\lim F_n(x) = 0$ et la suite de fonctions $F_n(x)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $F(x) = 0$.

4. Calculer la somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)$ puis étudier la convergence de la série $\sum F_n(x)$.

Si $x \neq 0$:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} F_k(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^2 f_n(x) = x^2 \sum_{k=0}^{k=n} f_n(x) = x^2 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = x^2 \frac{1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+x^2}}$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = x^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2$ Si $x = 0$, $F_n(x) = 0$ et $S_n(x) = 0 \rightarrow 0$ Donc : La série de terme général $F_n(x)$ converge simplement vers la fonction S définie par : $S(0) = 0$ et $S(x) = 1 + x^2$. remarquons que les fonctions $F_n(x)$ sont continues tandis que S n'est pas continue (car $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2) = 1 \neq S(0)$) par conséquent la convergence ne peut pas être uniforme et par conséquent, elle ne peut pas être normale ! Par contre $F_n(x) > 0$ donc la série est aussi absolument convergente.

La série est simplement convergente et absolument convergente par contre, elle ne converge pas uniformément et elle ne converge pas normalement.