Exercice I. (10 POINTS). (*Les **six** questions sont **indépendantes** *) :

1. **Résoudre**, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, **l'équation** suivante : $3u - 8v = 6$ avec $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$.

2. Donner **tous** les nombres premiers, p, dont les **carrés** sont inférieurs à 617 ($p^2 \leq 617$), **décomposer** 1200 et 1234 en facteurs premiers puis **calculer** : $PGCD(1200; 1234)$ et $PPCM(1200; 1234)$.

3. Le **trichlorure de phosphore** est un composé de formule chimique PCl_3 (P : Phosphore, Cl :Chlore). Préciser la **géométrie moléculaire** de ce composé et lister ses **éléments de symétrie**.

4. Soit f la fonction **périodique**, de période 2π, définie, sur $]-\pi, \pi]$, par : $f(x) = x$. Donner le développement en **série de Fourier** de cette fonction.

5. Quelle est **la nature de la série** $\sum (2n)!(\frac{x^n}{(n!)^2})$? Déterminer son **rayon de convergence**.

6. **Compléter** : $\overline{10101}^2 + \overline{125}^{10} = \overline{\bullet\bullet\bullet}^8$

Exercice II. (5 POINTS) :

Soit $\oplus$ la **loi** définie sur $\mathbb{R}$ par : $a \oplus b = (a^3 + b^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ (pour tout a, b dans $\mathbb{R}$).

1. **Comparer** $a \oplus b$ et $b \oplus a$ puis **conclure** ;

2. **Montrer** que $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un **groupe Abelien** ;

3. Soit $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, \oplus)$ l'**application** définie par : $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.
   Montrer que f est un **isomorphisme de groupes**.

4. Soit la $\odot$ **loi** définie sur $\mathbb{R}$ par $a \odot b = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. **Est ce que** $(\mathbb{R}, \odot)$ est un groupe ?

Exercice III. (5 POINTS) :

Soit :

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

1. **Vérifier** que $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$;

2. **Étudier la convergence** de **la suite de fonctions** $(f_n(x))_n$;

3. Soit $F_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, que peut-on dire de la **convergence simple** de la suite de fonctions $(F_n(x))_n$?

4. **Calculer la somme partielle** $S_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)$ puis **étudier la convergence** de **la série** $\sum F_n(x)$.

RÉDACTION ET PRÉSENTATION : 1 POINT.