

**Exercice 1.** (7.5 POINTS) :

Soit  $(ABCD)$  un carré de centre  $O$ .

Dans le plan du carré, on considère les transformations suivantes :

$r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $r'$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $s$  la symétrie centrale de centre  $O$  et  $e$  l'identité.

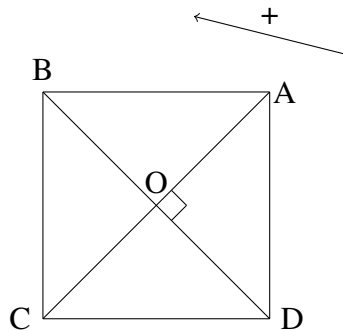
1. Expliciter les 4 transformations en précisant, pour chacune, les images des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $O$  ;

**La question demande seulement les images des cinq points par chaque transformation géométriques (dans le plan du carré) et non pas les éléments de symétrie d'une manière générale !!**  
 $C_n$  ou l'axe de symétrie qui passe par les milieux de deux cotés, ..., ne sont pas traités dans cette questions mais à la dernière question !!

**Toutes les images sont en fonction des cinq point, on ne peut pas utiliser des points inexistants ou non définis  $C'$ ,  $B'$ , ... !!**

**On n'utilise que des transformations habituelles connues depuis le lycée et mentionnées dans le cours (Polycopiées et Diapos) !!**

**La question demande d'expliciter chaque transformation (donc à partir de la situation initiale) et non pas d'appliquer les transformations une après une !!**



2. Soit  $(T, \circ)$  l'ensemble des quatre transformations muni de la loi  $\circ$  de composition des applications. Recopier et compléter la table ci-jointe puis vérifier que  $(T, \circ)$  est un groupe.

Ce groupe est-il Abélien ? Quel-il est son ordre ?

**Faut-il rappeler que pour calculer  $r \circ s$ , on commence par appliquer  $s$  puis  $r$  !!**

**Avec des bonnes réponses à la question 1), les calculs ne sont ni longues ni difficiles !!**

**Les transformations ici n'ont rien à avoir avec les permutations ( $O$  à toujours la même image) et on ne peut pas trouver  $\tau_i, \sigma_i, \dots$**

**La vérification des propriétés :**

**ON NE PEUT PAS VERIFIER UNE PROPRIÉTÉ EN UTILISANT UN OU DEUX EXEMPLES !!!**

**On ne peut pas écrire d'après le tableau  $r \circ e = r$  car ici il s'agit d'un cas parmi d'autres !!**

**On ne peut pas utiliser  $r, r', s, e$  pour traiter le cas général car elles représentent des transformations précises !! Pour ne pas écrire l'une des propriétés pour les 3 ou transformations, nous pouvons utiliser une autre notation  $t, x, a$  et dire : Pour tout  $t \in T$  on a :  $t \circ e = e \circ t = t$  !!**

**L'associativité NE SE DÉMONTRE PAS par un ou deux exemples (attention à des vidéos sur Internet qui donnent des exemples pour justifier une propriété générale comme l'associativité)**

**Dois-je rappeler que avant de vérifier l'associativité, il faut se poser la question : Est ce que la loi est habituelle ou définie dans l'exercice ??**

**Dans le 1er cas, souvent, on a juste besoin de mentionner que la loi est associative dans un ensemble plus large ( $\circ$  est associative dans l'ensemble des applications quelconques), dans le 2eme,**

il faut faire des calculs :  $x$  loi  $(y$  loi  $z)$  puis  $(x$  loi  $y)$  loi  $z$  et comparer les deux résultats !!!  
 Il ne suffit pas dire, d'après la table, tout élément admet un symétrique, mais il faut préciser le symétrique de chaque élément !!

$s \circ r = r \circ s$  ne signifie pas que la loi est commutative !!! il faut dire  $t \circ t' = t' \circ t$  pour tout  $t, t' \in T$   
 ou que la table est symétrique par rapport à la première diagonale !!!

L'ordre d'un groupe fini est son cardinal et  $\text{card}T = 4$  !!

| $\circ \nearrow$ | $e$             | $r$              | $r'$ | $s$              |
|------------------|-----------------|------------------|------|------------------|
| $e$              | $e \circ e = e$ | $e \circ r = r$  | ?    | $e \circ s = s$  |
| $r$              | $r \circ e = r$ | $r \circ r = s$  | ?    | ?                |
| $r'$             | ?               | $r' \circ r = e$ | ?    | $r' \circ s = r$ |
| $s$              | $s \circ e = s$ | $s \circ r = r'$ | ?    | ?                |

3. Déterminer Tous les sous-groupes de  $(T, \circ)$  (justifier la réponse) ;

L'ordre d'un sous groupe  $H$  divise l'ordre du groupe  $T$ , donc, ça sert à rien de chercher des sous groupes de 3 éléments !! A propos,  $\{e, r, r'\}$  n'est pas un sous groupe car même s'il contient  $e$  et que  $r$  et  $r'$  sont symétriques l'un de l'autre ! la loi n'est pas interne sur cet ensemble !! pensez à  $r \circ r$  ou  $r' \circ r'$  !!!

4. On note  $(\mathbb{Z}_5^*, \times)$  le groupe des classes modulo 5 (non nulles) muni de la multiplication.

Soit  $f : (T, \circ) \rightarrow (\mathbb{Z}_5^*, \times)$  l'application telle que :  $r \mapsto \bar{2}$   $r' \mapsto \bar{4}$  et  $s \mapsto \bar{3}$

Calculer  $f(r \circ s)$ . Est ce que  $f$  est un homomorphism de groupes ?

L'application  $f$  est définie entre deux ensembles avec deux lois qui sont différentes !! On ne peut pas écrire les lois d'une manière aléatoire !! avant d'écrire  $x \circ y$  il faut s'assurer que  $x$  et  $y$  sont deux transformations dans  $T$  et avant d'écrire  $a \times b$  il faut s'assurer que  $a$  et  $b$  sont deux classes dans  $\mathbb{Z}_5^*$  !! Les écritures :  $\bar{2} \circ \bar{3}$  ou  $f(r) \circ f(s)$  n'ont aucun sens de même que  $s \times r$  !!

$f$  est un morphism si elle vérifie  $f(x$  la loi du 1er groupe  $y) = f(x)$  la loi du 2eme groupe  $f(y)$  !! et nous avons deux manières pour utiliser cette définition :

Directe, pour déduire que  $f$  est effectivement un morphisme et dans ce cas, il faut faire les calculs dans le cas général !!

Indirecte en trouvant un contre exemple  $(x_1, y_1)$  tel que  $f(x_1$  la loi du 1er groupe  $y_1) = f(x_1)$  la loi du 2eme groupe  $f(y_1)$  et dans ce cas,  $f$  n'est pas un morphisme !!!

5. Le tétrafluorure de xénon est le composé chimique de formule  $XeF_4$ , il se forme à partir de xénon ( $Xe$ ) et de fluor ( $F$ ). Il se présente sous forme d'un solide cristallin incolore et les études chimiques montrent que, dans les conditions normales, la molécule  $XeF_4$  possède une géométrie plane carrée (Les cinq atomes sont dans le même plan et représentent les sommets et le centre d'un carré).

a. Déterminer quatre (4) éléments de symétrie de  $XeF_4$  dont un axe de symétrie noté  $A$  et un plan de symétrie noté  $P$  (Préciser la nature de chaque élément) ;

Les éléments de symétrie, dans l'espace, sont à déduire à partir de la question 1 !! en plus, il faut préciser leurs natures  $C_n, S_n, \sigma_v, \sigma_h$  ! Il faut noter que les angles au centre d'un carré sont égaux  $\frac{\pi}{2}$  (préciser d'ailleurs sur la figure) et non pas à  $\frac{2\pi}{3}$  !!!! (Encore une fois le danger d'apprendre les exercices TD sans les comprendre !!!)

b. Déterminer la composition :  $A$  suivi de  $P$ .

**Exercice 2.** Les trois questions sont indépendantes (6.5 POINTS) :

1. Recopier et compléter les trois transformations entre les différentes bases en présentant les détails des calculs :

Il faut lire les questions attentivement !! La questions demande de compléter les 3 transformations et a majorité des réponses n'a traitée que 2 seulement !!!

Pourtant la question est simple et il s'agit d'une application des directe des méthodes étudiées !

$$\overline{432}^{\bullet\bullet} \longrightarrow \overline{123}^{\bullet\bullet 4}$$

2. a. **Recopier et compléter** le tableau de l'algorithme généralisé d'Euclide en présentant les détails des calculs et **déduire** les **deux résultats** donnés par cet algorithme ;

**La majorité a réussie à faire les calculs mais a eu des difficultés concernant les conclusions ou les résultats de l'algorithme !! L'algorithme ne donne pas directement le PPCM mais donne le PGCD et une combinaison entière :  $PGCD(a, b) = ua + bv$  !!!**

- b. Déterminer  $PGCD(20, 35)$  et  $PPCM(20, 35)$  en utilisant une autre méthode.

**Une autre méthode veut dire qu'on peut pas utiliser la valeur du PGCD obtenue avec l'algorithme pour calculer ensuite le PPCM !! Il y a deux possibilités : soit d'utiliser la décomposition en facteurs premiers soit de chercher directement les diviseurs ou les multiples et d'utiliser la relation entre le PPCM et le PGCD !!**

**IL FAUT LIRE ATTENTIVEMENT LES QUESTIONS POUR NE PAS PERDRE DES POINTS FACILES!!!!**

|       |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|
| $R_1$ | 35 | ?  | ?  | 5  |
| $R_0$ | 20 | 15 | ?  | 0  |
| $u_0$ | 1  | ?  | 1  | ?  |
| $u_1$ | 0  | ?  | -1 | 4  |
| $v_0$ | 0  | 1  | ?  | ?  |
| $v_1$ | 1  | -1 | ?  | -7 |
| $Q$   | 1  | 1  | ?  | NA |
| $R$   | ?  | 5  | ?  | NA |
| $u$   | ?  | -1 | 4  | NA |
| $v$   | ?  | ?  | -7 | NA |

3. Résoudre les équations modulaires suivantes :

**Une application directe des propriétés du cours et similaires aux questions TD, pourtant il faut bien lire les questions !! LA RESOLUTION DANS  $F$  EST DIFFÉRENTE DE LA RESOLUTION DANS  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  !! Les solutions trouvées doivent être exprimées dans l'ensemble référence !!  $\bar{7}$  n'appartient pas à  $\mathbb{Z}$  et  $3 + 5k$  n'appartient pas  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  !!**

**Le symétrique d'une classe dépend du modulo et par conséquent, on ne peut pas utiliser le tableau modulo 8 (1ère question) pour déterminer le symétrique d'une classe pour la 2ème question (modulo 5) !!!!**

- Dans  $\mathbb{Z}$  :  $(E_1) \quad 2x = 6 \quad \text{modulo } 8$
- Dans  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  :  $(E_2) \quad 3t = 4$

### Exercice 3. (6 POINTS) :

Soit :

$$f_n(x) = x^{2n}$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions  $f_n(x)$  sur  $[0, 1]$  ;

**La suite est évidemment géométrique mais la raison est  $x^2$  et non pas  $x^n$  ou  $x$  !!! l'intervalle d'étude est  $[0, 1]$  donc, il y a que deux cas !!  $x \in [0, 1[$  et  $x = 1$  !!!!**

**ICI LA QUESTION CONCERNE UNE SUITE DE FONCTIONS !! CA SERT 0 RIEN DE CALCULER UNE SOMME PARTIELLE !!!**

**FAUT IL RAPPELER QUE L’AFFIRMATION :” SUITE DE FONCTIONS CONVERGENTE” DOIT ÊTRE COMPLETER PAR LA NATURE (SIMPLEMENT OU UNIFORMEMENT), L’INTERVALLE ET LA FONCTION LIMITE !!**

2. Que peut-on dire de la convergence uniforme de cette suite de fonctions sur  $[0, a]$  avec  $a \in ]0, 1[$  ?

**IL N Y A AUCUNE NOTION DE SUITE DE FONCTIONS NORMALEMENT CONVERGENTE (LA NOTION EXISTE SEULEMENT POUR LES S2RIES DE FONCTIONS)!!!**

**L’INÉGALITÉ  $0 \leq x^{2n} \leq a^{2n}$  et  $a^{2n} \rightarrow 0$  n’implique pas que la suite de fonctions converge uniformément mais seulement la convergence simple (déjà établie dans la question précédente)!!!**

**Pour obtenir la convergence uniforme, il faut utiliser l’inégalité :**

$$\sup_{x \in [0, a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, a]} x^{2n} \leq a^{2n} \rightarrow 0$$

3. Étudier la convergence simple de la série de fonctions de terme général  $f_n(x)$  sur  $[0, 1[$  ;  
**JE PENSE QUE A CE NIVEAU IL FAUT FAIRE LA DIFFERENCE ENTRE SUITE DE FONCTIONS ET SERIE DE FONCTIONS!!** Le terme général de la série est  $f_n(x)$  qui est géométrique, donc, nous avons la possibilité de calculer la somme partielle  $S_n(x)$  puis de calculer la limite de  $S_n(x)$  sans oublier l’intervalle qui est  $[0, 1[$  et donc il n’ya pas de cas  $x = 1$  à étudier (l’intervalle est ouvert)!!!!

**La somme des termes d’une suite géométrique de raison  $q$  est  $\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \rightarrow \frac{1}{1-q}$  et non pas 0!!!!**

4. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général  $f_n(x)$  sur  $[0, a[$  avec  $a \in ]0, 1[$  ;

**L’utilisation de la définition de la convergence uniforme d’une série de fonctions  $\sup |S_n(x) - s(x)| \rightarrow 0$  n’est pas le premier choix même dans le cas d’une série géométrique simple (les calculs et les encadrements sont relativement difficiles, même si certains étudiants les ont réussi)!!! L’utilisation de la convergence normale est la meilleurs méthode mais sans oublier la définition :**

**$|f_n(x)| \leq u_n$  et LA SÉRIE NUMÉRIQUE  $\sum u_n$  converge et non pas  $u_n \rightarrow 0$ !!!!**

5. Développer la fonction  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$  en série entière de  $x$  et étudier le rayon de convergence de la série obtenue.

### **Question facultative (+1 POINT) :**

Soit  $f$  la fonction impaire  $2\pi$ -périodique telle que  $f(x) = 1$  pour tout  $x \in [0, \pi[$ . Calculer les coefficients de Fourier de  $f$ .